

О некоторых проблемах полиномиальной и
сплайн-аппроксимации

Н.П.Корнейчук

В докладе будут затронуты два круга вопросов, которые, на наш взгляд, можно отнести к "горячим точкам" теории аппроксимации, привлекающим внимание исследователей трудностью естественно поставленных задач.

1. О наилучшем линейном методе приближения. Впервые задача о наилучшем для данного класса периодических функций линейном методе приближения, построенном на базе сумм Фурье, была поставлена и в некоторых важных случаях решена Фаваром [1,2] в 1936-37 гг. Основные вехи дальнейшего развития этой проблематики идут через работы Б.Надя [3] и С.М.Никольского [4]. Привычная постановка задачи в общей ситуации выглядит так. В функциональном банаховом пространстве X фиксируется подпространство $\mathcal{N}_N$ размерности N с базисом $\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$ и функции $f(t) \in X$ сопоставляется функция

$$(1) \quad g(f, \Lambda_N, t) = \sum_{k=1}^N \lambda_k(f) \varphi_k(t),$$

где $\Lambda_N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ — некоторая система заданных на X линейных функционалов. Если $\mathcal{M}$ — класс функций из X , то требуется найти величину

$$(2) \quad \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{N}_N)_X = \inf_{\Lambda_N} \sup_{f \in \mathcal{M}} \|f - g(f, \Lambda_N)\|_X$$

и указать набор $\Lambda_N^* = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*\}$, реализующий в (2) нижнюю

грань и определяющий наилучший линейный метод приближения класса $\mathcal{M}$ подпространством $\mathcal{N}_N$. Метод Δ_N заведомо будет наилучшим, если окажется, что

$$\sup_{f \in \mathcal{M}} \|f - g(f, \Delta_N)\|_X = E(\mathcal{M}, \mathcal{N}_N)_X =: \sup_{f \in \mathcal{M}} E(f, \mathcal{N}_N)_X,$$

где $E(f, \mathcal{N})_X = \inf \{ \|f - \psi\|_X : \psi \in \mathcal{N} \}$ — наилучшее приближение функции $f(t)$ множеством $\mathcal{N}$ в метрике X . Пусть еще

$$(3) \quad d_N(\mathcal{M}, X) = \inf_{\mathcal{N}_N} E(\mathcal{M}, \mathcal{N}_N)_X, \quad d'_N(\mathcal{M}, X) = \inf_{\mathcal{N}_N} \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{N}_N)_X$$

— соответственно N -поперечник по Колмогорову [5] и линейный N -поперечник [6] класса $\mathcal{M}$ в пространстве X . В (3) нижние грани вычисляются по всем подпространствам $\mathcal{N}_N$ (или их сдвигам) фиксированной размерности N .

Через C и L_p ($1 \leq p \leq \infty$) обозначаем пространства заданных на $[0, 1]$ функций $f(t)$ с обычной нормой, $\tilde{C}$ и $\tilde{L}_p$ — соответствующие пространства 1-периодических функций. Для краткости полагаем $\|f\|_{L_p} = \|f\|_p$, $E(f, \mathcal{N})_{L_p} = E(f, \mathcal{N})_p$ и т.д. T_n будет обозначать подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$ по системе функций $\{\sin 2\pi kt, \cos 2\pi kt\}$, $k=0, 1, \dots$, ($\dim T_n = 2n-1$); $S_{N,r}$ — подпространство сплайнов порядка r дефекта 1 по равномерному разбиению $t_k = k/N$, $k=0, 1, \dots, N$, $\tilde{S}_{2n,r}$ — соответствующее подпространство (при $N = 2n$) 1-периодических сплайнов ($\dim \tilde{S}_{2n,r} = 2n$).

Отметим две конкретные ситуации, которые интересны возможностью сравнить ашпроксимативные свойства полиномов и сплайнов, а также тем, что давно поставленные задачи до сих пор остаются без ответа.

Пусть H^α ($0 < \alpha \leq 1$) — класс функций $f(t) \in C$, удовлетворяющих на $[0, 1]$ условию Липшица: $|f(t') - f(t'')| \leq |t' - t''|^\alpha$, $\tilde{H}^\alpha$ — соответствующий класс 1-периодических функций. Известно [6 —

-8], что

$$(4) \quad E(\tilde{H}^\alpha, T_n)_C = d_{2n-1}(\tilde{H}^\alpha, \tilde{C}) = \frac{1}{2(2n)^\alpha},$$

$$(5) \quad E(H^\alpha, S_{N,0})_\infty = d_N(H^\alpha, L_\infty) = \frac{1}{2N^\alpha},$$

а применяя метод промежуточного приближения по аналогии с [9, с.228] нетрудно показать, что $E(H^\alpha, S_{N,1})_C = 1/2N^\alpha$ и

$$(6) \quad E(\tilde{H}^\alpha, \tilde{S}_{2n,1})_C = d_{2n}(\tilde{H}^\alpha, \tilde{C}) = \frac{1}{2(2n)^\alpha}.$$

В случае $\alpha = 1$ существуют линейные методы, реализующие верхние грани в левых частях (4) - (6); это соответственно суммы Фавара, кусочно-постоянные функции $\psi_N(f, t)$, интерполирующие среднее значение $f(t)$ на (t_{k-1}, t_k) и ломаные, интерполирующие значения $f(t)$ в точках $t = t_k$.

При $0 < \alpha < 1$ величины $E(\tilde{H}^\alpha, T_n)_C, E(H^\alpha, S_{N,0})_\infty, E(\tilde{H}^\alpha, \tilde{S}_{2n,1})_C$ не найдены, — так же, как и линейные поперечники классов H^α и $\tilde{H}^\alpha$ в $\tilde{C}$ или L_∞ . Известно только, что никакой линейный оператор со значениями в соответствующем подпространстве не реализует верхние грани наилучших приближений в (4) - (6) [9, с.213], [10]. Интересно, что в метрике $L_p, 1 \leq p \leq 3$, кусочно-постоянные $\psi_N(f, t)$ (линейно зависящие от f) реализуют наилучшее приближение

$E(H^\alpha, S_{N,0})_p$, а вместе с ним и N -поперечник, — как колмогоровский, так и линейный [8]. Есть основания предполагать, что при $p > 3$ будет выполняться строгое неравенство $E(H^\alpha, S_{N,0})_p > E(\tilde{H}^\alpha, S_{N,0})_p$.

Отметим, что вместо классов Липшица можно было говорить о классах H^ω , задаваемых выпуклым вверх модулем непрерывности $\omega(\delta)$.

Рассмотрим еще ситуацию с наилучшим линейным методом для класса $\tilde{W}_\infty^r$ функций из $\tilde{C}^{r-1}$, у которых производная $f^{(r-1)}(t)$

абсолютно непрерывна, а $\|f^{(r)}\|_{\infty} \leq 1$. Известно [11, 12], [9, с.288], что если $\tilde{b}_{2n,r-1}(f, t)$ — сплайн из $\tilde{S}_{2n,r-1}$, интерполирующий функцию $f(t)$ из $\tilde{C}$ в равноотстоящих точках $\tau_k = k/2n + [1 + (-1)^r]/8n$, то для всех $p \in [1, \infty]$

$$\sup_{f \in \tilde{W}_{\infty}^r} \|f - \tilde{b}_{2n,r-1}(f)\|_p = E(\tilde{W}_{\infty}^r, \tilde{S}_{2n,r-1})_p = \|\varphi_{n,r}\|_p,$$

где $\varphi_{n,r}(t)$ — r -й 1-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sgn} \sin 2\pi n t$.

Оказалось также, [11, 13], что $d_{2n}(\tilde{W}_{\infty}^r, \tilde{L}_p) = \|\varphi_{n,r}\|_p$, т.е. линейный метод, задаваемый интерполяционными сплайнами $\tilde{b}_{2n,r-1}(f, t)$ реализует как колмогоровский, так и линейный $2n$ -поперечники класса $\tilde{W}_{\infty}^r$ в L_p ($1 \leq p \leq \infty$).

В случае тригонометрического приближения результаты в аналогичной задаче менее исчерпывающие. Еще Фавар [1, 2] построил линейный метод $A_{n,r}$, сопоставляющий функции $f(t) \in \tilde{W}_{\infty}^r$ тригонометрический полином $A_{n,r}(f, t) \in T_n$ такой, что

$$\sup_{f \in \tilde{W}_{\infty}^r} \|f - A_{n,r}(f)\|_C = E(\tilde{W}_{\infty}^r, T_n)_C = \|\varphi_{n,r}\|_C;$$

значительно позже выяснилось [6], что это есть $(2n-1)$ -поперечник $d_{2n-1}(\tilde{W}_{\infty}^r, C) = d'_{2n-1}(\tilde{W}_{\infty}^r, C)$. Переход к двойственной задаче позволил установить [14, 15] равенство $E(\tilde{W}_{\infty}^r, T_n)_1 = \|\varphi_{n,r}\|_1$, а потом оказалось (см., например, [9, с.273]), что это есть поперечник $d_{2n-1}(\tilde{W}_{\infty}^r, L_1)$.

Как видим, несмотря на длительный период, в течение которого задача приближения класса $\tilde{W}_{\infty}^r$ тригонометрическими полиномами находилась в поле зрения специалистов, все еще ждут своего решения следующие вопросы: 1) Будет ли справедливо равенство $E(\tilde{W}_{\infty}^r, T_n)_p = \|\varphi_{n,r}\|_p$ не только при $p = 1$ и $p = \infty$, но и при $1 < p < \infty$? 2) Существует ли линейный оператор из $\tilde{W}_{\infty}^r$ в T_n ,

реализующий верхнюю грань $E(\tilde{W}_\infty^r, T_n)_p$ при $1 \leq p < \infty$? 3) Не обладает ли таким свойством (хотя бы при $p = 1$) оператор Фавара $A_{n,r}$?

Возвращаясь к общей постановке задачи о наилучшем линейном методе, отметим, что с точки зрения приложений более естественным может оказаться иной ее вариант. Набор значений функционалов $\lambda_k(f)$ в (1) можно рассматривать как информацию о функции $f(t)$, по которой надо оптимальным образом восстановить ее, зная еще, что она принадлежит классу $\mathcal{M}$, обычно задаваемому с помощью тех или иных дифференциально-разностных характеристик. Считая набор функционалов $\Lambda_N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ фиксированным, можно ставить задачу об оптимальном выборе системы $\Phi_N = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ линейно независимых функций, при котором величина

$$\sup_{f \in \mathcal{M}} \|f - \sum_{k=1}^N \lambda_k(f) \varphi_k\|_X$$

будет минимальной. Примечательно, что интерполяционные сплайны $\sigma_{2n,r-1}(f,t)$ решают на классе $\tilde{W}_\infty^r$ оптимизационную задачу и в такой постановке: если $\lambda_k(f) = f(\tau_k)$, то никакая другая линейная комбинация вида $f(\tau_1)\varphi_1(t) + \dots + f(\tau_{2n})\varphi_{2n}(t)$ не обеспечивает на классе $\tilde{W}_\infty^r$ меньшую погрешность, причем не только по норме L_p , $1 \leq p \leq \infty$, но и в каждой точке t .

2. Приближение индивидуальных функций. Второй круг задач, на котором нам хотелось бы остановиться, связан с аппроксимацией индивидуальных функций из заданного класса $\mathcal{M}$. Величины $E(\mathcal{M}, n)_X$ и $\mathcal{E}(\mathcal{M}, n)_X$ дают оценку погрешности приближения на всем классе $\mathcal{M}$, иначе говоря, они ориентированы на самую "плохую" функцию в $\mathcal{M}$. Мы не можем рассчитывать на более точную оценку, если при фиксированном приближающем множестве о приближаемой функции знаем только то, что она принадлежит классу $\mathcal{M}$. Однако легко представить себе ситуации, когда есть смысл оценивать погрешность приближе-

ния индивидуальной функции. Например:

а) Рассматривается расширяющаяся последовательность $\pi_1, \pi_2, \dots$ приближающих множеств, объединение которых всюду плотно в X . При каждом $N = 1, 2, \dots$ самая "плохая" в классе $\mathcal{M}$ функция $f(t) = f_N(t)$, для которой $E(f_N, \pi_N)_X = E(\mathcal{M}, \pi_N)_X$, обычно существенно зависит от N и возникает вопрос об асимптотическом (при $N \rightarrow \infty$) поведении величины $E(f, \pi_N)_X$ для фиксированной функции $f \in \mathcal{M}$.

в) О приближаемой функции $f(t)$ из класса $\mathcal{M}$, задаваемого обычно дифференциально-разностными характеристиками, имеется дополнительная информация глобального характера (монотонность, выпуклость и т.п.), которую естественно использовать для получения более точной оценки.

с) Приближающий полином или сплайн строится с помощью некоторой дискретной информации о функции $f(t)$ (например, по значениям $f(t)$ в отдельных точках). Эту информацию, получение которой, может быть, требует определенных затрат, надо оптимальным образом использовать при оценке погрешности.

Рассмотрим сначала ситуацию а). Применительно к наилучшему равномерному приближению полиномами детальное исследование задачи приближения индивидуальных функций из заданного класса начато еще С.Н.Бернштейном [16] ($f(t) = |t|, |t| \leq 1$) и С.М.Никольским [17] ($f(t) \in H^1$), [18] ($f(t) \in \tilde{W}_\infty^r$). В периодическом случае к настоящему времени наиболее общий результат [19] состоит в том, что в классе $\tilde{W}^r H^\omega$ существует функция $f(t)$, для которой

$$(7) \limsup_{n \rightarrow \infty} E(f, T_n)_C / E(\tilde{W}^r H^\omega, T_n)_C = 1.$$

Аналогичный факт имеет место и для наилучшего приближения алгебраическими многочленами функций класса H^1 [17].

Сплаины — более гибкий, чем полиномы, аппарат, и приближение ими индивидуальных функций можно трактовать в различных вариантах. Если ставить задачу как при полиномиальной аппроксимации, когда система базисных функций фиксирована, то надо зафиксировать последовательность разбиений $0 = t_{N,0} < t_{N,1} < \dots < t_{N,N} = 1$, $N = 2, 3, \dots$, которая определяет последовательность приближающих подпространств сплайнов определенного порядка. Рассматривая простейший случай — приближение ломаными по равномерному разбиению $\{k/N\}$, $k = 0, 1, \dots, N$, легко построить функцию $f(t) \in H^1$, для которой $\limsup N \cdot E(f, S_{N,1})_C = 1/4$, тогда как $E(H^1, S_{N,1})_C = 1/2N$, т.е. порядок приближения индивидуальной функции и здесь не выше, чем всего класса. Нам неизвестно, существует ли в H^1 функция $f(t)$, для которой $\limsup N E(f, S_{N,1})_C = 1/2$, т.е. имеет ли место в этом случае аналог соотношения (7). Такой же вопрос можно поставить и в случае приближения сплайнами функций из других классов.

Принципиально иная ситуация возникает, если узлы сплайна сделать свободными, приспособлявая сплайн к приближаемой функции не только за счет коэффициентов, но также и за счет базисных функций. Введем в рассмотрение (нелинейное) множество $Q_{N,r}$ ($N = 2, 3, \dots$, $r = 0, 1, \dots$) заданных на $[0, 1]$ сплайнов $q(t)$ порядка r дефекта 1, имеющих на интервале $(0, 1)$ не более, чем $N-1$ узел. Оказывается, что для любой функции $f(t) \in H^1$ существует последовательность вписанных в $f(t)$ ломаных $q_N(f, t) \in Q_{N,1}$ такая, что $\|f - q_N(f)\|_C = o(N^{-1})$, т.е. свободные узлы позволяют повысить порядок приближения ломаными индивидуальной функции из H^1 . Впервые этот эффект (в более общей ситуации) установили Фройд и Попов [20]; после опубликования их работы автор обнаружил, что указанный факт можно вывести из доказательств работы [21]. Были получены и другие результаты аналогичного характера (см., напр., [22-24]). Интересно было бы найти точный порядок величины $E(H^1, Q_{N,1})_C$, а также выяс-

нить все ситуации, в которых порядок приближения индивидуальной функции из класса $\mathcal{M}$ сплайнами может быть повышен за счет перехода к свободным узлам.

Что касается использования дополнительной (глобальной) информации о приближаемой функции $f(t)$ из задаваемого дифференциально-разностными характеристиками класса $\mathcal{M}$, то некоторые аспекты этой проблематики можно проследить опять же на приближении ломаными функций класса H^α . Условие монотонности, если принимать в расчет только порядок приближения, есть смысл учитывать лишь при $0 < \alpha < 1$. Легко понять, что ограниченность вариации $f(t)$ на $[0, 1]$ сразу влечет соотношение $E(f, Q_{N,1})_C = O(N^{-1})$; неясно, однако, сказывается ли условие монотонности на порядке величины $E(f, Q_{N,1})_C$, если $f(t) \in H^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$).

Более определенно можно сказать о влиянии на порядок приближения ломаными условия выпуклости. Если $f(t) \in H^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, и $f(t)$ выпукла (вогнута) на $[0, 1]$, то существует последовательность вписанных в $f(t)$ ломаных $q_N(f, t) \in Q_{N,1}$ такая, что

$$\|f - q_N(f)\|_C = O(N^{-2}).$$

Рассмотрение функции $f(t) = t^\alpha$ показывает, что на множестве выпуклых функций из H^α порядок $O(N^{-2})$ является точным.

Нам неизвестно, будет ли $E(f, Q_{N,1})_C = O(N^{-2})$ для любой ограниченной на $[0, 1]$ функции, у которой вторая производная существует и знакопостоянна на интервале $(0, 1)$.

Говоря об использовании дискретной информации, мы кратко остановимся на, пожалуй, наиболее интересном варианте задачи — адаптивной аппроксимации. При практическом построении для функции $f(t)$ приближающего сплайна (полинома) обычно используются значения на $f(t)$ некоторых функционалов, например, значения $f(t)$ в конечном числе точек. В практических задачах добывание этой информации может быть сопряжено с затратой дорогостоящих ресурсов. Так обстоит, в частности,

дело, когда нет явного задания функции $f(t)$, а ее значения в отдельных точках приходится находить экспериментальным путем. Ясно, что последовательно выбирая эти точки, мы можем на каждом шаге учитывать информацию о $f(t)$, полученную на предыдущих шагах.

Эти соображения естественным образом приводят к такой, например, постановке задач. Задан класс функций $\mathcal{M}$, определяемый дифференциально-разностными или другими характеристиками. Пусть $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ и $A_N = A_N(\mathcal{M})$, $N \geq 2$, — некоторый алгоритм последовательного выбора точек $x_2, x_3, \dots, x_N$, при котором точка x_k выбирается с учетом как значений $f(x_l)$, $l=0, 1, \dots, k-1$, так и того, что $f(t) \in \mathcal{M}$; сплайн $q(f, A_N, t)$ из $Q_{N,r}$ (или другой приближающий агрегат) однозначно определяется значениями $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)$ и только ими. Требуется найти величину

$$(8) \quad \varepsilon(\mathcal{M}, Q_{N,r})_X = \sup_{f \in \mathcal{M}} \inf_{A_N} \|f - q(f, A_N)\|_X,$$

или при заданном $\varepsilon > 0$ указать наименьшее $N = N(\varepsilon)$ и алгоритм $A_{N(\varepsilon)}$, при которых неравенство $\|f - q(f, A_{N(\varepsilon)})\|_X \leq \varepsilon$ гарантируется для любой функции $f(t)$ из $\mathcal{M}$.

Надо сказать, что задача оптимизации адаптивных алгоритмов ставилась в разных вариантах во многих работах (см., напр., [25, 26, 27]), известные нам точные результаты относятся к простейшим ситуациям.

Легко видеть, (применяя адаптивный процесс к функции $f(t) \equiv 0$), что

$$\varepsilon(H^\alpha, Q_{N,1})_C \geq 1/(2N)^\alpha, \quad N=2,3, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Этот факт интересно сравнить с соотношением $E(H^\alpha, S_{N,1})_C = 1/2N^\alpha$ и (при $\alpha = 1$) с приведенным раньше результатом Фрейда и Попова, при получении которых предполагалось, что мы располагаем информацией

о значениях функции $f(t)$ в каждой точке и можем использовать ее при построении приближающей ломаной.

Для монотонных функций из H^α порядок адаптивного приближения при $0 < \alpha < 1$ выше. Если точкой x_k , $k=2, 3, \dots$, делить пополам промежуток уже имеющегося разбиения, на котором $f(t)$ имеет наибольшее приращение, то вписанная ломаная обеспечивает монотонной функции $f(t)$ из H^α погрешность $\leq c(\alpha)/N$, причем такой порядок на этом множестве функций улучшен быть не может.

Для выпуклой функции $f(t) \in H^1$ можно указать алгоритм выбора узлов вписанной ломаной, обеспечивающий порядок $O(N^{-2})$, — как и в случае использования информации о значениях $f(t)$ в каждой точке. Нам неизвестен точный порядок адаптивного приближения ломаными выпуклых функций класса H^α при $0 < \alpha < 1$.

В заключение отметим, что и в теории приближенного интегрирования можно рассматривать задачи, связанные с оптимизацией квадратурной формулы за счет учета индивидуальной информации об интегрируемой функции. В ряде случаев повышение точности (по сравнению с оценкой на классе) равномерного приближения сплайнами индивидуальной функции немедленно влечет аналогичный эффект в приближенном интегрировании, — достаточно коэффициенты квадратурной формулы выбрать из условия точности ее для соответствующих сплайнов. Разумеется, не меньший смысл имеет рассмотрение вопросов аппроксимации индивидуальных функций двух и большего числа переменных (см. [28]).

Л и т е р а т у р а

1. J. Favard. Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques. C.R. Acad. Sci. (Paris), 203, 1936, 1122-1124.
2. J. Favard. Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynômes trigonométriques. Bull. Sci. Math., 61, 1937, 209-224, 243-256.
3. B. Nagy. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. Berichte Acad. Wiss., Leipzig, 90, 1938, 103-134.

4. С.М.Никольский. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. Известия АН СССР. Сер.матем., 10, 1946, 207-256.
5. А.Н.Колмогоров. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen. Ann.of Math., 37, 1936, 107-110.
6. В.М.Тихомиров. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. Успехи матем., наук, 15, 1960, № 6, 81-120.
7. Н.П.Корнейчук. О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций. Докл.АН СССР, 140, 1961, 748-751.
8. Н.П.Корнейчук. Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных. Изв.АН СССР. Сер.матем., 45, 1980, 266-290.
9. Н.П.Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения. Москва, 1976.
10. Н.П.Корнейчук. К задаче о наилучшем линейном методе приближения для класса H^ω . В: Современные проблемы действительного и комплексного анализа. Киев, 1984.
11. В.М.Тихомиров. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1,1]$. Матем.сборник, 80, 1969, 290-304.
12. А.А.Женсыкбаев. Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению. Матем.заметки, 13, 1973, 807-816.
13. А.А.Лигун. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций. Матем.заметки, 27, 1980, 61-75.
14. Л.В.Тайков. О приближении в среднем некоторых классов периодических функций. Труды Матем.ин-та АН СССР, 88, 1967, 61-70.
15. С.П.Туровец. О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых функций. Докл. АН УССР, 1968, № 5, 417-421.
16. С.Н.Бернштейн. Собрание сочинений. Т.1. Москва, 1952, 157-206.
17. С.М.Никольский. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. Изв. АН СССР.Сер.матем., 10, 1946, 295-322.
18. С.М.Никольский. Об интерполировании и наилучшем приближении дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами. Изв. АН СССР.Сер.матем., 10, 1946, 393-410.

19. В.Н.Темляков. К вопросу об асимптотическом поведении наилучших приближений непрерывных функций. Матем.сборник, 110,1979,399-413.
20. G.Freud and V.A.Popov. On approximation by spline functions, Proc.Conf.Constr.Func.Theory, Budapest, 1969, 163-172.
21. Н.П.Корнейчук. О наилучшем приближении непрерывных функций. Изв. АН СССР. Сер.матем., 27, 1963, 29-44.
22. Бл.Сендов, В.А.Попов. Об аппроксимации сплайн-функциями. Доклады Болг.АН, 23, 1970, 755-758.
23. В.А.Попов. Об аппроксимации абсолютно непрерывных функций сплайн-функциями. Доклады Болг.АН, 28, 1975, 1299-1301.
24. V.A.Popov. Direct and converse theorems for spline approximation with free knots. Serdica, 1, 1975, 218-224.
25. А.Г.Сухарев. Оптимальный метод построения наилучших равномерных приближений для функций некоторого класса. Журн.вычисл.матем.и матем.физики, 18, 1978, 302-313.
26. В.В.Иванов. Об оптимальных по точности алгоритмах приближения функций некоторых классов на ЭВМ. В: Теория приближения функций, Москва, 1977, 195-200.
27. Дж.Трауб, Х.Вожняковский. Общая теория оптимальных алгоритмов. Перевод с англ., Москва, 1983.
28. G.Sonnevend. An Optimal Sequential Algorithm for Uniform Approximation on Convex Functions on $[0,1]^2$. Appl.Math.Optim., 10, 1983, 127-142.

Институт математики АН УССР,

Киев - 4 , СССР