

Тони Чехларова

МАТЕМАТИЧЕСКИ ИЗСЛЕДВАНИЯ
С ДИНАМИЧНИ КОНСТРУКЦИИ
В НАЧАЛНОТО УЧИЛИЩЕ



DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE
AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

София
2013

Книгата е издадена във връзка с изпълнение на задължения по проект „Fibonacci – разпространение на изследователския подход в образованието по математика и природни науки в Европа“.



Проектът Fibonacci е получил финансиране от Седма рамкова програма на Европейския съюз. Участник от България е Институтът по математика и информатика на БАН.



<http://www.fibonacci-project.eu/>

Координатор на проекта за България: акад. Петър Кендеров

Съдържанието на книгата не отразява непременно възгледите на Европейската комисия и не включва каквато и да е отговорност от нейна страна.

Автор: Тони Чехларова

Редактор: Йорданка Горчева

Издател: Макрос – www.makros.net

Всички права запазени

© 2013

Никоя част от тази книга не може да бъде възпроизвеждана, съхранявана в информационна система или предавана в някаква форма чрез електронни или механични средства, чрез фотокопиране, микрофилми или друг тип запис без писменото съгласие на автора.

Разпространява се безплатно.

ISBN 978-954-561-309-8

Съдържание

Увод

1. Час	7
2. Минути (с точност до 15 минути).....	9
3. Минути (с точност до 5 минути)	11
4. Минути (с точност до 1 минута)	13
5. Секунди	15
6. Сравняване на отсечки в квадратна мрежа	16
7. Видове триъгълници според страните	17
8. Обиколка на триъгълник	19
9. Обиколка на правоъгълник.....	20
10. Обиколка.....	23
11. Лице.....	25
12. Лице на правоъгълник и квадрат	26
13. Конструкции от правоъгълници	29
14. Конструкции от квадрати	31
15. Удвояване на страна на правоъгълник	32
16. Видове ъгли 1.....	33
17. Видове триъгълници според ъглите 1	34
18. Измерване на ъгли с транспортир.....	36
19. Провери и развий окомера си с ъгли.....	37
20. Видове ъгли 2	38
21. Видове триъгълници според ъглите 2	39
22. Конструкции от триъгълници и правоъгълници	41
23. Квадрати в квадратна мрежа	42
24. Преброяване на правоъгълници	43
25 Преброяване на триъгълници	45
26. Допълване до фигура	47
27. Действия с фигури.....	49
28. Провери и развий окомера си	51
29. Ъгли и часовници	53
За учителя.....	55

Някои икони от Geogebra

икона	значение	
	преместване	Move
	точка	Point
	сечение на два обекта	Intersect Two Objects
	среда на отсечка	Midpoint
	права през две точки	Line through Two Points
	перпендикулярна права	Perpendicular Line
	успоредна права	Parallel Line
	многоъгълник	Polygon
	правилен многоъгълник	Regular Polygon
	окръжност с център през точка	Circle with Centre through Point
	окръжност с център и радиус	Circle with Centre and Radius
	ъгъл	Angle
	Разстояние, дължина, обиколка	Distance, Length, Perimeter
	лице на фигура	Area
	премества изгледа	Move Graphics View
	плъзгач	slider
	изтрива	Delete
	опреснява изгледа	RefreshViews
	вмъква картина	Insert Image
	връзка между два обекта	Relation between Two Objects

Увод

За да се подготвят бъдещите граждани на общество, основано на знания и творчество, образованието трябва да предложи стратегии, които насърчават учителите и учениците да учат по нов начин, да развият творческия си потенциал и да се справят в ситуации, в които от тях се очаква да създадат нещо ново, нещо, което може да се споделя. Основната цел на няколко европейски проекти е да се разработят и разпространят иновативни методи в математическото образование и да се осъществи поздравя връзка между наука и образование. Целта на европейския проект Фибоначи е внедряване на изследователския подход (inquiry based education) в обучението по математика и природни науки. България участва в проект Фибоначи чрез Института по математика и информатика към Българската академия на науките. В резултат на този проект българският екип с координатор акад. Петър Кендеров разработва динамични сценарии и методика на използването им на теми, подходящи за ученици от 1-12. клас. Акцентът при работа с тях е върху експериментирането с динамични геометрични конструкции, при които учениците наблюдават, откриват закономерности, формулират хипотези, материализират ги с разработени от екипа динамични модели и ги обосновават или опровергават с помощта на учителя. Ролята на учителя вече не е да демонстрира готови факти, а да създава условия на учениците си да действат, да генерират идеи, да преоткриват математически резултати.

Майсторството на учителя се проявява и в съчетаването на класическите педагогически средства с иновативните, в зависимост от конкретните условия.

За работа с готовите динамични файлове:

необходимо е да е инсталирана Java (свободен продукт)

<http://www.java.com/en/download/manual.jsp>

препоръчваме инсталиране на Geogebra (свободен продукт)

<http://www.geogebra.org/cms/en/installers>

Можете да работите с динамичните файлове на адрес

<http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm>

Литература

Baptist, Peter and Dagmar Raab (eds.): Implementing Inquiry in Mathematics Education, Bayreuth 2012. ISBN 978-3-00-040752-9

Баптист, П., К. Милер, Д. Рааб. Към нов подход към математическото образование. http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/SINUS_Bg-ver4.pdf

Inquiry-Based Mathematics Education for Gifted Children in Primary School. Volker Ulm (Ed.) University of Augsburg. 2011

Kenderov, P., E. Sendova. Towards enhancing the inquiry based mathematics education. In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies - Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information technologies. 2012.

Supporting geometric competences. Ruth Dolenc-Petz, Petra Ihn-Huber (Ed.) University of Augsburg. 2012

Горчева, Й. Проблемни ситуации и откривателство при изучаване на естествените числа. сп. Математика и информатика, бр.5, 2007. с.3-10

Димкова, Д. Учи и преподавай математика с *GeoGebra*. Везни 4. 2012.

Кендеров, П. Иновации в математическото образование: европейските проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci*. 39 Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2010. Чехларова, Т. Геометрични фигури – изследвания с динамични конструкции. Макрос. 2012. http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/book-geom_figuri.pdf

Чехларова, Т., Е. Сендова. Необикновено за обикновените дроби – изследвания с динамични конструкции. Макрос. 2012. ISBN 978-954-561-282-4
<http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/book-drobi.pdf>

Чехларова, Т., Е. Сендова. Динамично паркетирание. сп. Математика и информатика, бр.6, 2011. С. 5-17, ISSN 1310-2230

Чехларова, Т. Зад кулисите сп. Математика, бр. 1. 2012.

Чехларова, Т. Задачи с фигури в триъгълна мрежа. сп. Начално образование, бр.1, 2010, с.34-41, ISSN 0204-4951

Чехларова, Т. Преброяване на правоъгълници. сп. Начално образование, бр.4, 2009, с.31-36, ISSN 0204-4951

Чехларова, Т. Задачи с часовник за развитие на пространствената интелигентност. сп. Начално образование, бр.2, 2009, с.8-22, ISSN 0204-4951

Чехларова, Т. Задачи с часовник без стрелки за развитие на мисленето. В: сб. „120 години Софийски университет „Св. Климент Охридски“ и развитие на педагогическата наука“, „Веда словена - ЖГ“, София, 2008, с. 172 - 177

Чехларова, Т., Д. Димкова, Е. Сендова. Въздушни следотърсачи с *GeoGebra* (Математическа приказка за падащата стълба). сп. Математика и информатика, бр.6, 2010. с. 3-13

Чехларова, Т. Пулсиращо сърце. сп. Математика, бр. 2. 2012.

Чехларова, Т. Следата. сп. Математика, бр. 6. 2012.

1. Час

1. Колко часа показва часовникът?

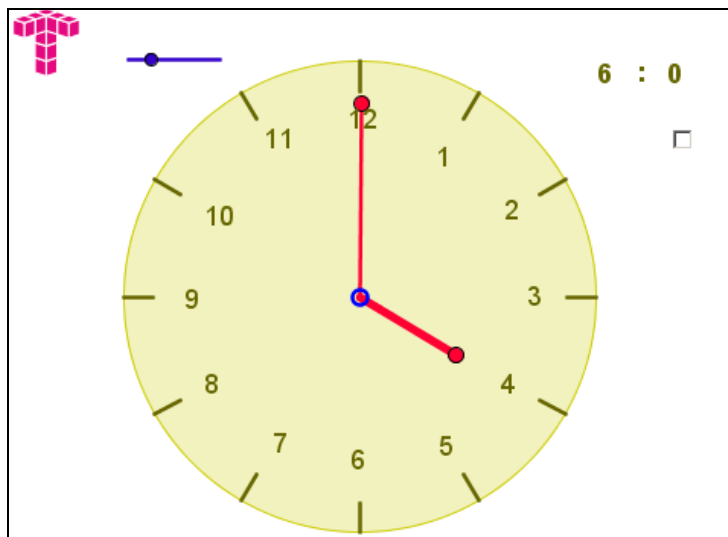
Часовникът показва, че е време за *Лека нощ*?

Не, време е за закуска!



Скрий отговора и премести плъзгача за следващ пример.

2. Премести червените стрелки така, че часовникът да показва 6:00.

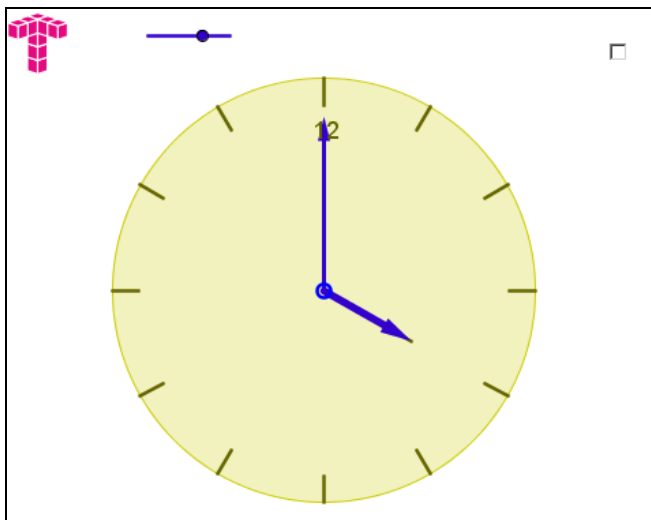


Скрий отговора и премести плъзгача за следващ пример.

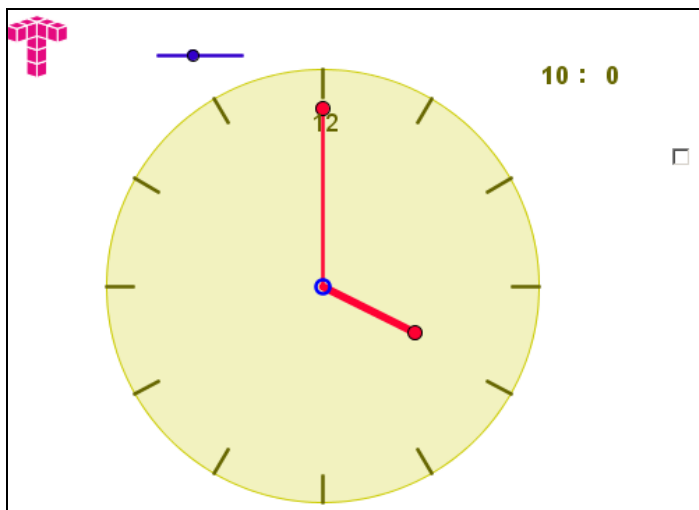
3. а) Сега е 7 часа. След колко часа ще стане 11 часа?
 б) Сега е 14 часа. Преди колко часа е било 6 часа?
 в) Сега е 8 часа. След колко часа ще стане 20 часа?

На някои часовници часовете (или някои от тях) не са отбелязани с цифри, но пак може да се определи часът.

4. Колко часа показва часовникът?



5. Премести червените стрелки така, че часовникът да показва 10:00.



Скрий отговора и премести плъзгача за следващ пример.

2. Минути (с точност до 15 минути)

1. Колко часа показва часовникът?



Преди петнайсет минути беше три часа.

Значи пак съм назад с половин час.

2. Премести червените стрелки така, че часовникът да показва 13:15.

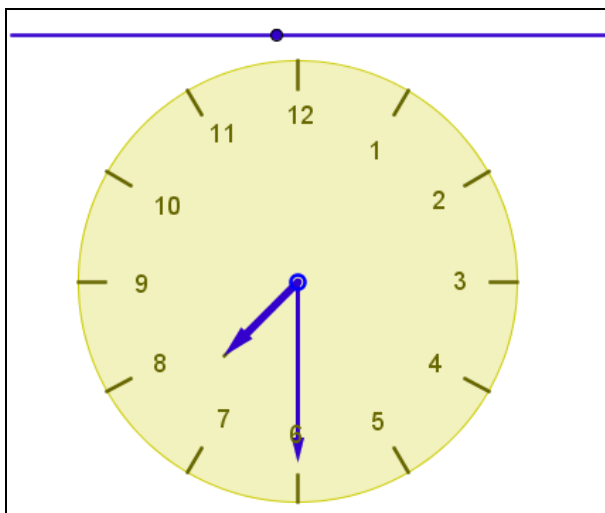


13 : 15

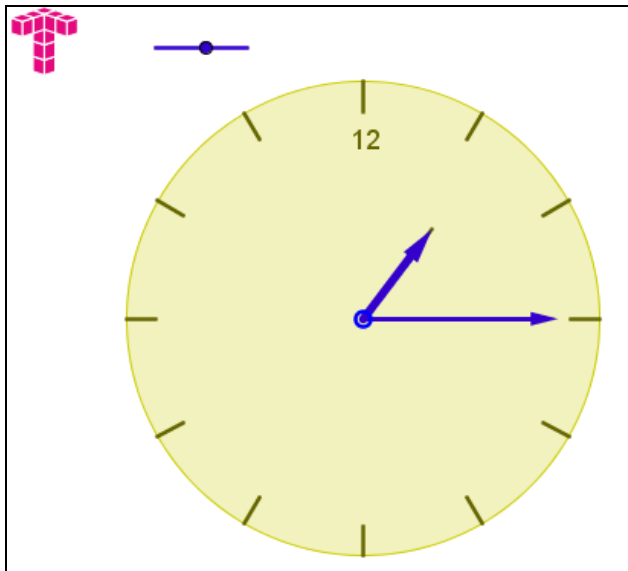


Скрий отговора и премести плъзгача за следващ пример.

3. а) Сега е 7 ч 30 мин. След колко минути ще стане 8 ч 45 мин?
 б) Сега е 14 ч 15 мин. Преди колко минути е било 12 ч 30 мин?
 в) Сега е 8 ч 45 мин. След колко време ще стане 12 ч 30 мин?



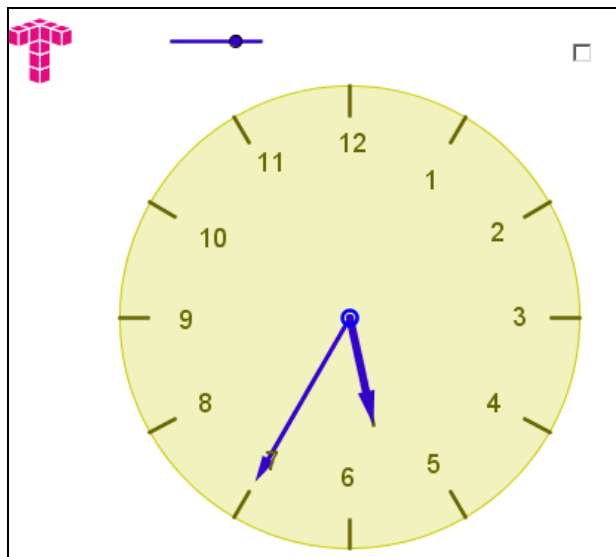
4. Колко часа показва часовникът?



5. Премести червените стрелки така, че часовникът да показва 6:45.

3. Минути (с точност до 5 минути)

1. Колко часа показва часовникът?

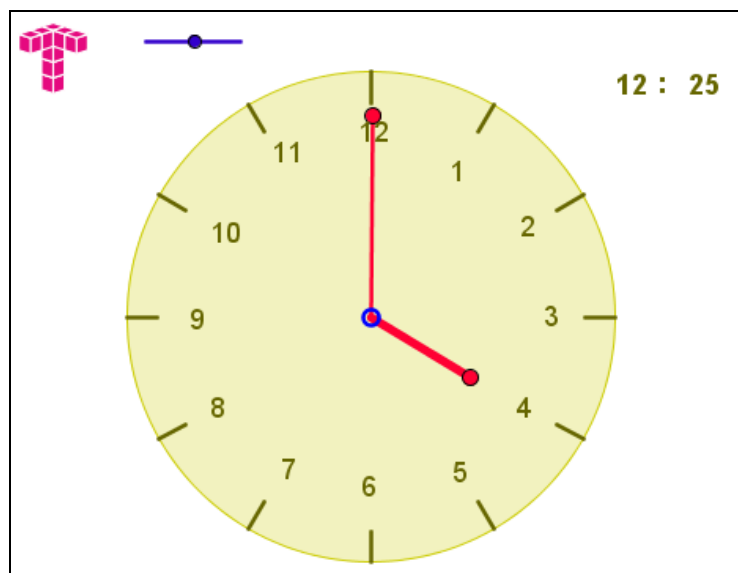


Три без десет е.

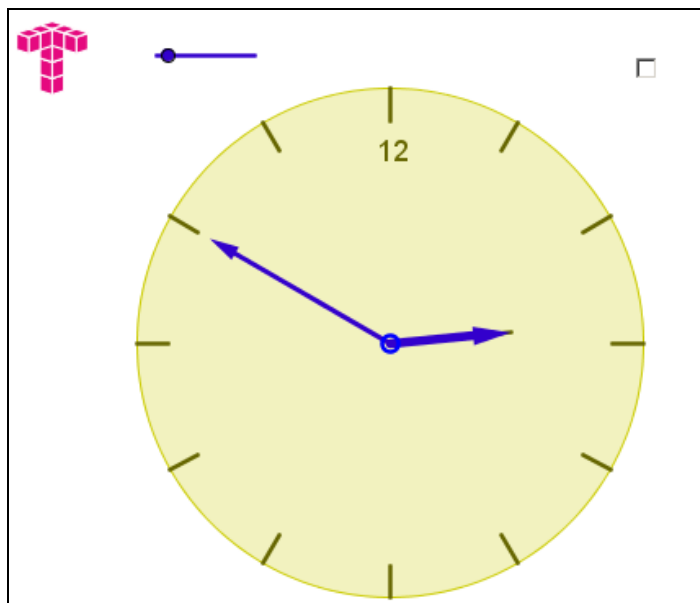
А аз показвам
само два и
петдесет.

Скрий отговора и премести плъзгача за следващ пример.

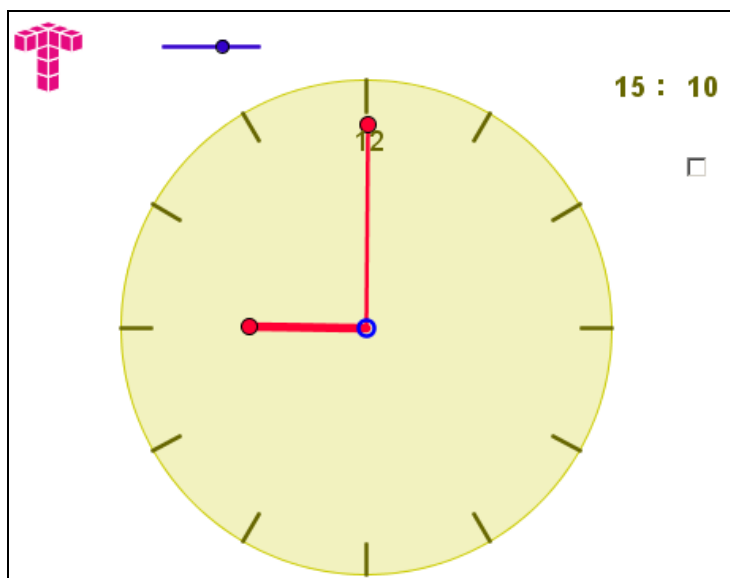
2. Премести червените стрелки така, че часовникът да показва 12:25.



3. а) Сега е 7 ч 10 мин. След колко минути ще стане 7 ч 35 мин?
 б) Сега е 11 ч 5 мин. Преди колко минути е било 10 ч 25 мин?
 в) Сега е 8 ч 35 мин. След колко време ще стане 14 ч 10 мин?
4. Колко часа показва часовникът?



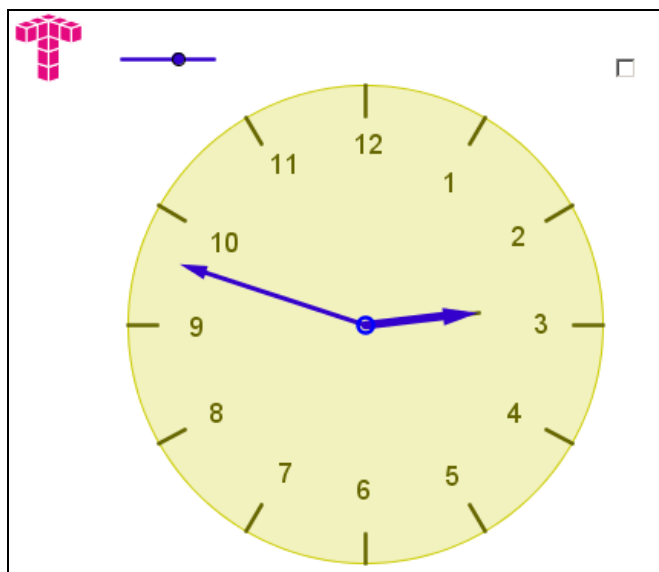
5. Премести червените стрелки така, че часовникът да показва 15:10.



4. Минути (с точност до 1 минута)

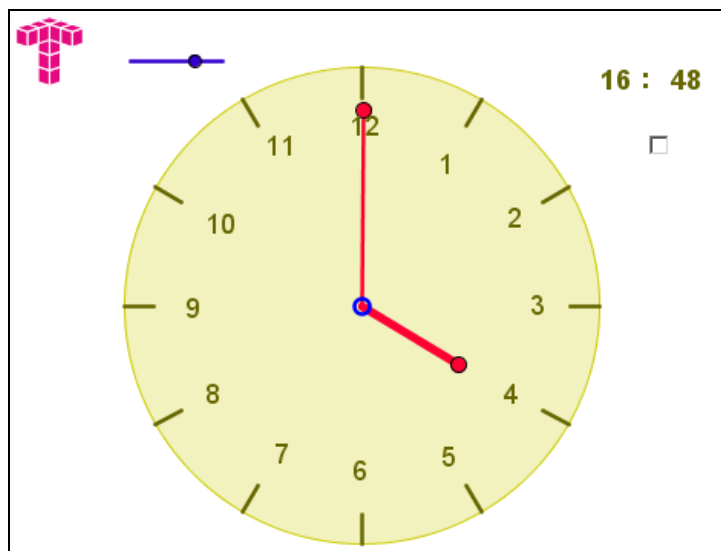
1. Колко часа показва часовникът?

След минута ...

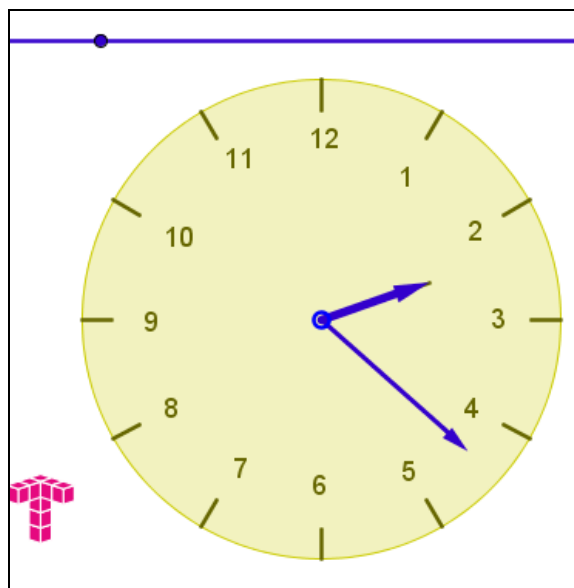


Скрий отговора и премести плъзгача за следващ пример.

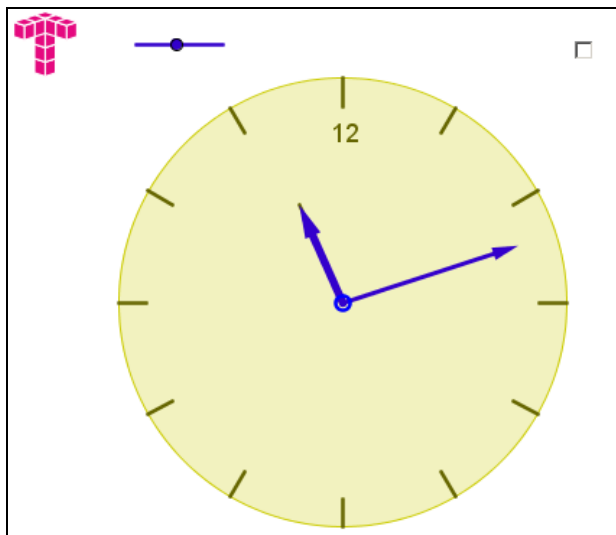
2. Премести червените стрелки така, че часовникът да показва 16:48.



3. а) Сега е 13 ч 48 мин. След колко минути ще стане 14 ч 12 мин?
 б) Сега е 11 ч 32 мин. Преди колко минути е било 10 ч 57 мин?
 в) Сега е 6 ч 33 мин. След колко време ще стане 23 ч 15 мин?



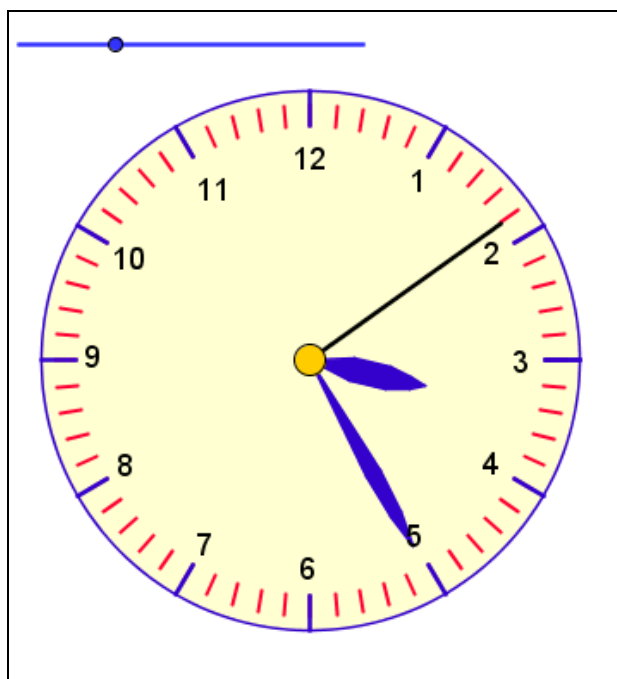
4. Колко часа показва часовникът?



5. Секунди

Десет, девет, осем...

1. Колко часа показва часовникът?



Премести плъзгач за следващ пример.

2. След колко секунди ще бъде 15:25:40?

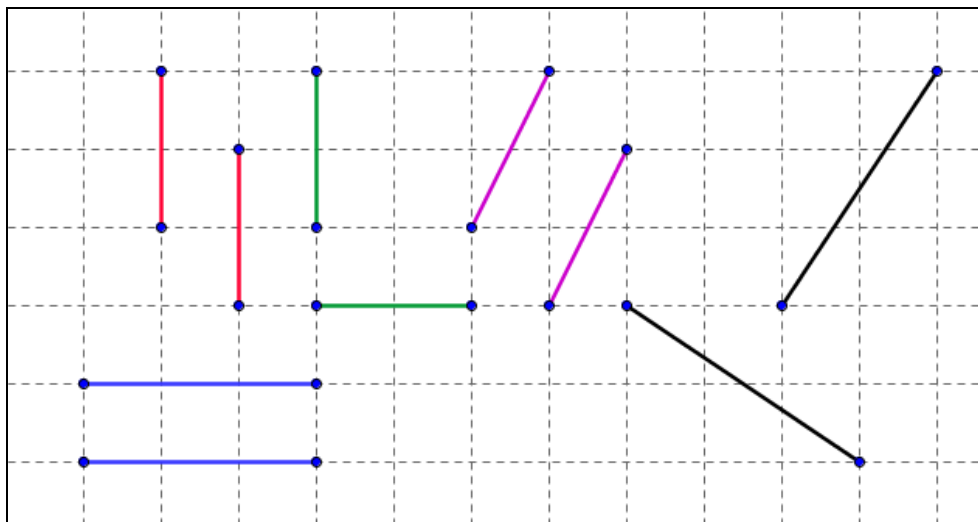
3. Преди колко секунди е било 3:10:00?

6. Сравняване на отсечки в квадратна мрежа

Аз имам три възела от мрежата.

Аз имам само два, но съм по-дълга от теб.

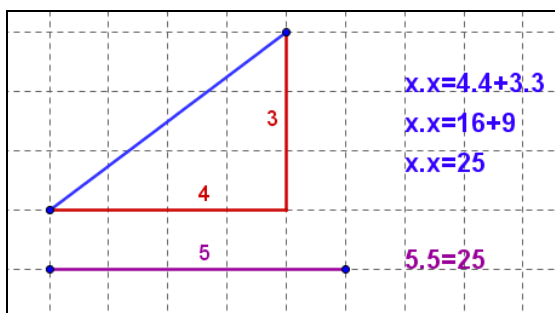
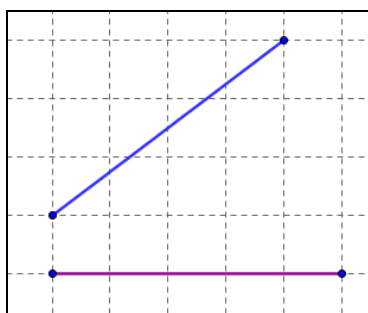
1. Равни ли са отсечките с еднакви цветове?



Тези отсечки бързо можеш да сравниш: двете сини са с дължина 3 ед.; двете червени - 2 ед.; двете зелени - 2 ед. Лилавите отсечки са диагонали в правоъгълници с измерения 1 ед. и 2 ед., а черните - диагонали в правоъгълници с измерения 2 ед. и 3 ед.

Построй и ти няколко равни отсечки в квадратната мрежа.

За някои отсечки не можеш веднага да прецениш равни ли са или не, например начертаните долу. Ето един начин да сравниш дължините им.



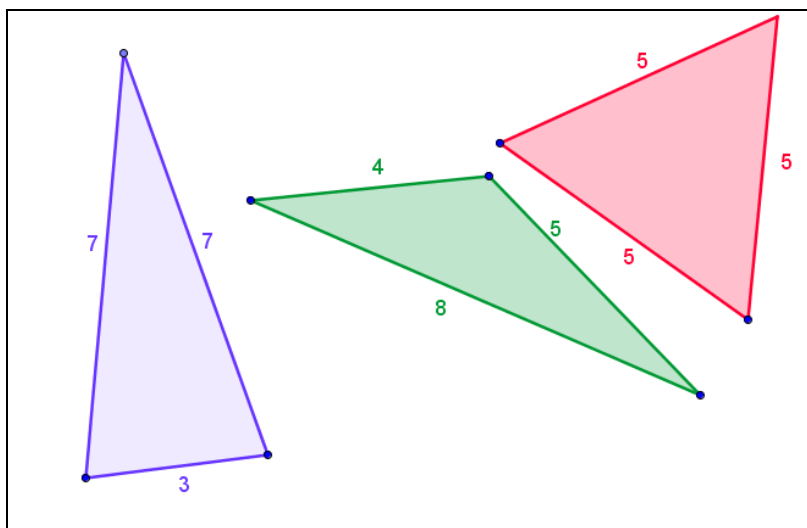
2. Построй две отсечки в квадратна мрежа. Сравни дължините им.

7. Видове триъгълници според страните

Имам равни страни.

Но имаш и различни, а на мен всички страни са равни.

1. Построени са три триъгълника и са записани дължините на страните им. Наблюдавай!



Има ли триъгълник, на който поне две от страните са с равни дължини?

Има ли триъгълник, на който и трите страни са с равни дължини?

Има ли триъгълник, който няма страни с равни дължини?

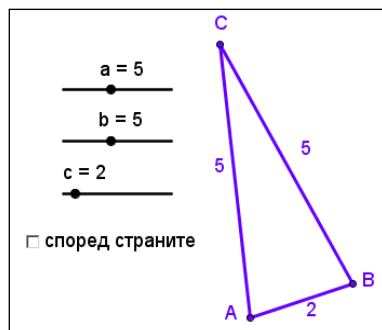
Построй триъгълник в тетрадката си. Измери дължините на страните му. Сравни ги. Според резултата от сравняването, на кой от триъгълниците горе прилича построения от теб – на синия, зеления или червения?

Според страните триъгълниците се разделят на три вида: равнострани, равнобедрен, разностранен.

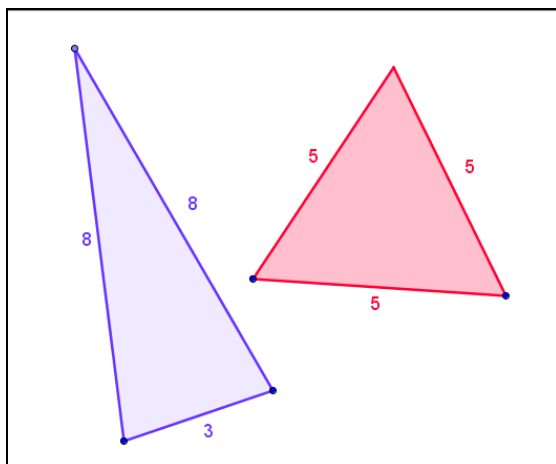
Можеш да потренираш!

2. Какъв е видът на триъгълника според страните?

Скрий отговора и използвай плъзгачите за получаване на нов триъгълник.



3. Вярно ли е, че равностранныят триъгълник е равнобедрен?

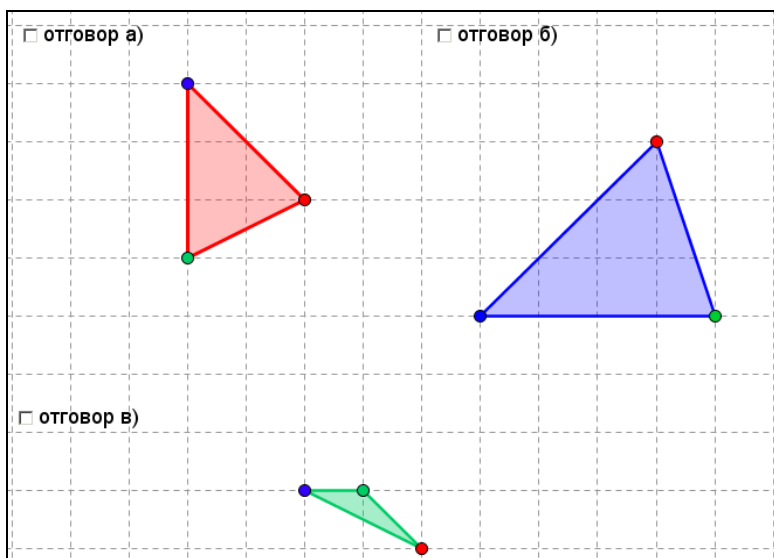


Провери отговора си, като използваш синия равнобедрен триъгълник и червения равнобедрен триъгълник. Опитай се да обосновеш.

Промени равнобедрения триъгълник до получаване на равнобедрен.

Повтори при друга дължина на основата.

4. Премести червения връх на триъгълника във връх на квадратната мрежа така, че да стане равнобедрен.



Потърси всички възможности върху изобразената част от квадратна мрежа.

Състави аналогична задача.

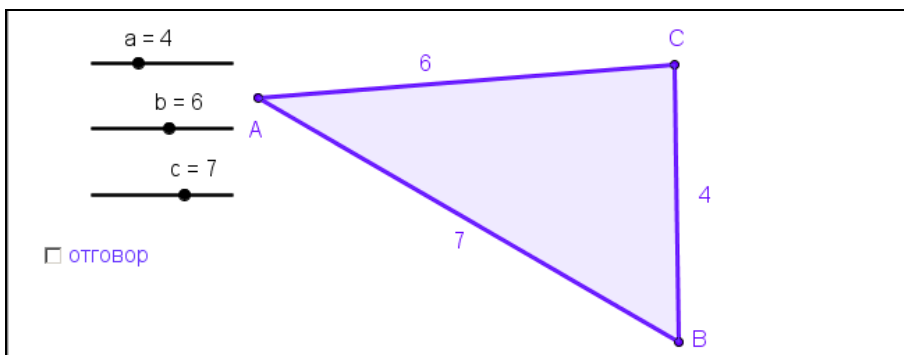
8. Обиколка на триъгълник

Не съм стигала с метър за ограждане на триъгълен участък, с измерения 12 м, 14 м, 17 м.

А аз съм перфектна за ограждане на равностранен триъгълник със страна 10 м.

1. Намери обиколката на триъгълник с дължини на страните:

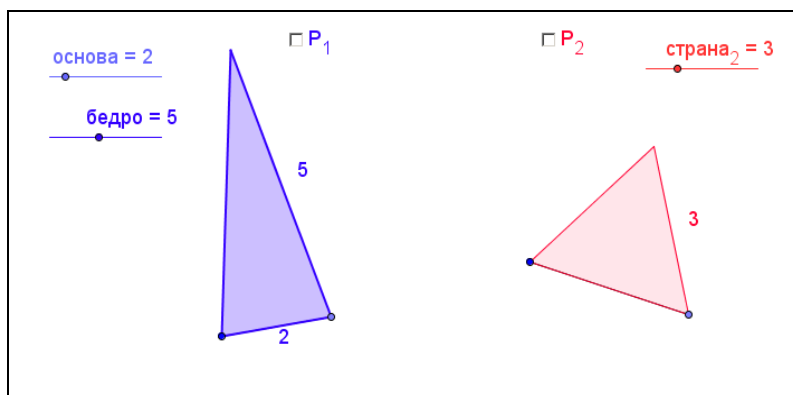
- а) 4 см, 6 см и 7 см б) 3 см, 5 см и 5 см в) 4 см, 4 см и 4 см.



Използвай плъзгачите за получаване на следващ триъгълник.

Състави сам още примери и се самопровери. Вече знаеш, че трябва да скриеш отговора, преди да създадеш нов пример.

2. Сравни обиколките на равностранен триъгълник със страна 3 см и равнобедрен триъгълник с основа 2 см и бедро 4 см.



3. Построй триъгълник с обиколка 12 см.

9. Обиколка на правоъгълник

С мен може да се огради игрално поле с форма на правоъгълник с размери 5 м и 8 м.

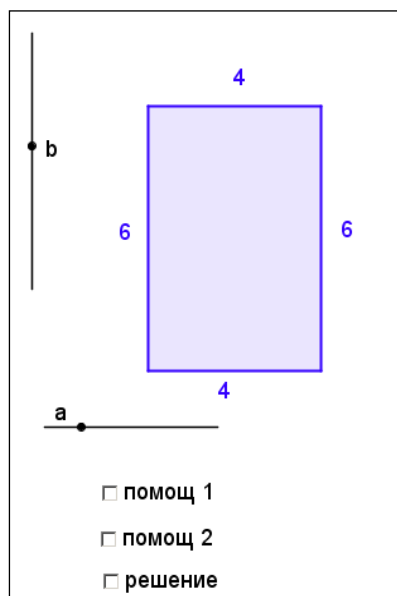
А с мен - игрално поле с форма на квадрат със страна 10 м.

1. Като използваш модела, намери обиколката на пет правоъгълника. Използвай плъзгачите за получаване на следващ правоъгълник. Опитай се да запишеш на колко е равна обиколката на правоъгълник с измерения a и b .

2. Намери обиколката на правоъгълник с измерения:

- а) 3 см и 4 см
- б) 3 см и 5 см
- в) 3 см и 6 см
- г) 3 см и 7 см.

Можеш да използваш модела и провериш. Попълни резултатите в таблица.



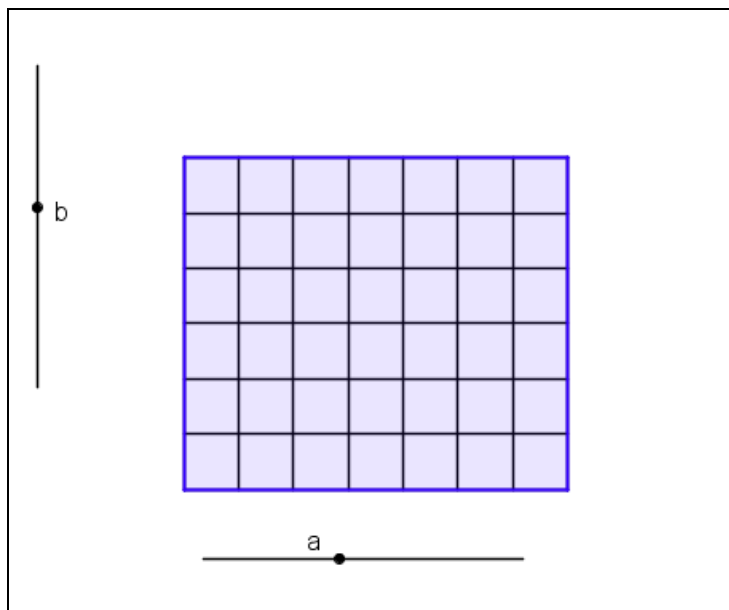
a	3	3	3	3				
b	4	5	6	7				
P								

Направи прогноза за следващите четири правоъгълника в тази последователност. Провери вярна ли е прогнозата ти.

Провери верността на откритата от теб връзка за правоъгълници с измерения:

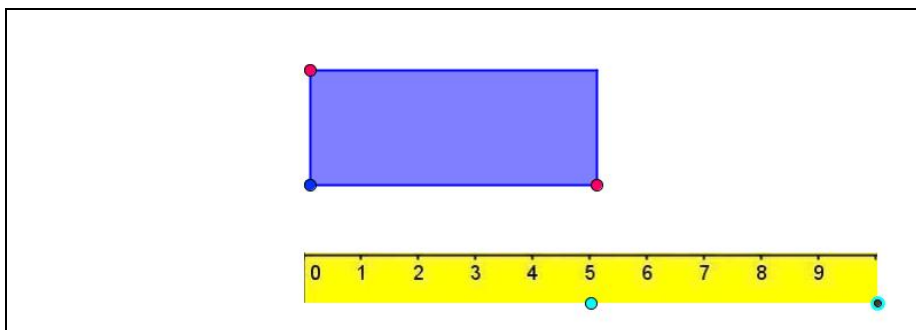
- 6 и 2 6 и 3 6 и 4 6 и 5
- 8 и 5 7 и 5 6 и 5 5 и 5
- ти задай подходящи измерения.

3. Намери обиколката на правоъгълника, ако страната на единичното квадратче е с дължина 1 см.



Потренирай, като променяш измеренията с плъзгача.

4. Намери обиколката на правоъгълника.



Тук инструментът е линейка. Можеш да я въртиш и преместваш.
За следващ пример получи нов правоъгълник с преместване на червени точки.

5. Намери обиколката на квадрат с дължина на страната:

- а) 2 см б) 4 см в) 5 см г) 8 см.

Запиши формула за намиране на обиколка на квадрат със страна a .

6. Сравни обиколките на правоъгълниците с измерения:

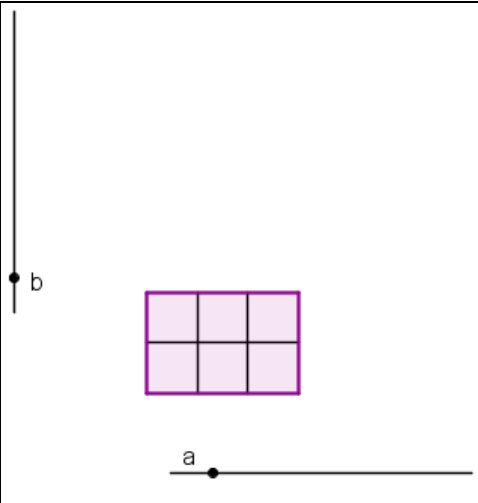
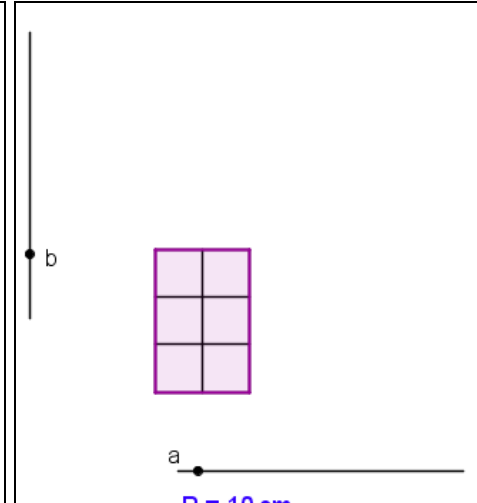
а) 2 см и 3 см и 3 см и 2 см

б) 7 см и 4 см и 4 см и 7 см

в) 9 см и 2 см и 2 см и 9 см

г) 5 см и 4 см и 4 см и 5 см

Формулирай хипотеза. Опитай се да я обосновеш.

 ☒ отговор $P = 10 \text{ cm}$	 ☒ отговор $P = 10 \text{ cm}$
--	---

7. Построй различните правоъгълници с обиколка 28 ед.

Избери удобен динамичен модел от предишните задачи и го използвай.

8. Правоъгълник има обиколка 22 см. Ако дължината на едната му страна е 3 см, намери дължината на другата му страна.

Направи проверка с някой от динамичните модели от предишните задачи (избери ти).

10. Обиколка

Четиридесет и осем педи!

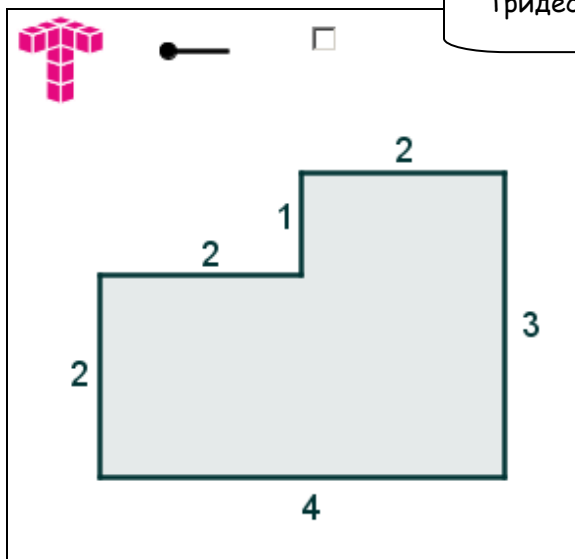
Осем крачки.

Сто миши стъпки!

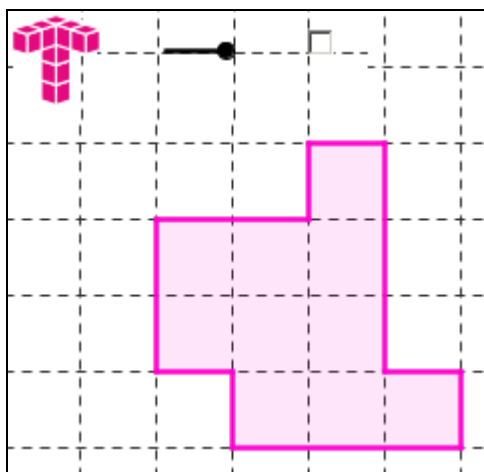
Дванайсет метра.

1. Намери обиколката на фигурата.

Тридесет и два лакътя.

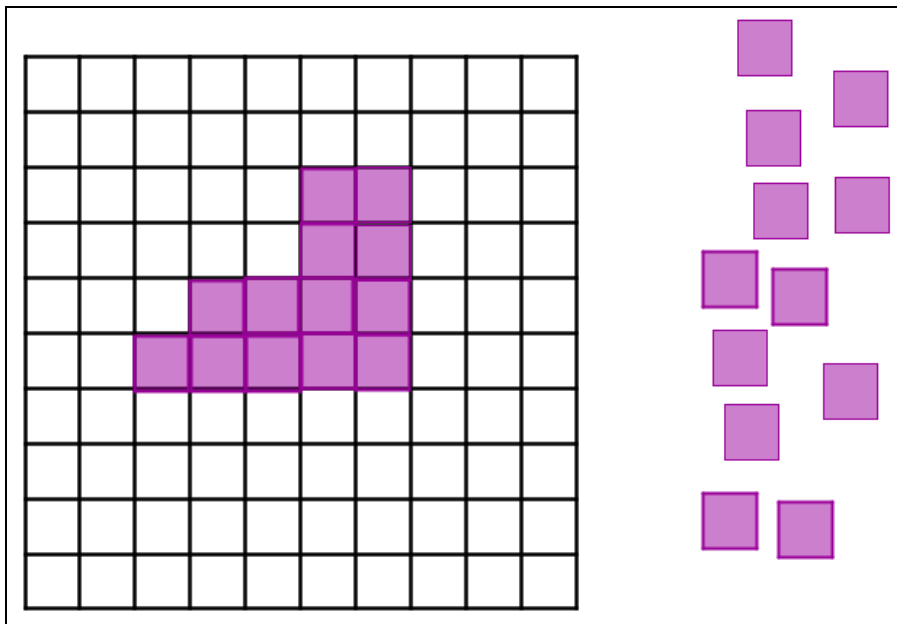


2. Намери обиколката на фигурата.



3. **Добави** едно квадратче така, че обиколката на фигурата да се:
а) запази б) увеличи.

По колко начина може да бъде направено това?



Какъв е максималният брой квадратчета, които могат да се добавят, без да се изменя обиколката?

Ако е възможно, **отстрани** едно квадратче така, че обиколката на фигурата да се: а) запази б) увеличи в) намали.

По колко начина може да бъде направено това?

Какъв е максималният брой квадратчета, които могат да се отстранят, без да се изменя обиколката?

Ако е възможно, **премести** едно квадратче така, че обиколката на фигурата да се: а) запази б) увеличи в) намали.

Има ли квадратче, с което не може да се реализира преместването?

По колко начина може да бъде направено това с избрано от теб квадратче?

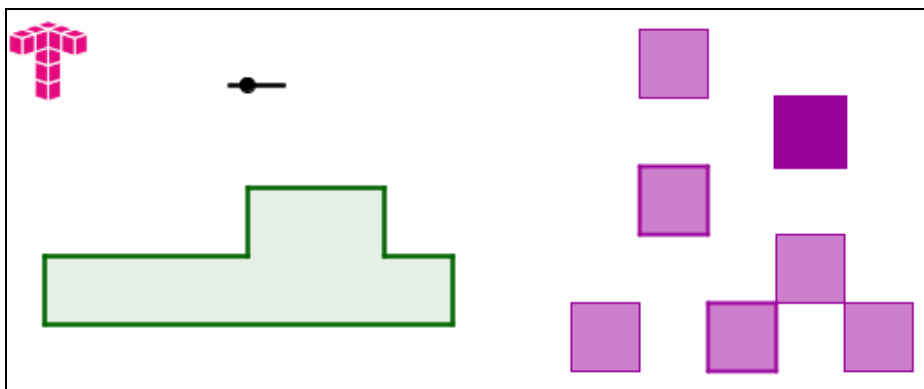
Състави аналогични задачи.

11. Лице

Мога да те покрия с 5 малки квадратчета.

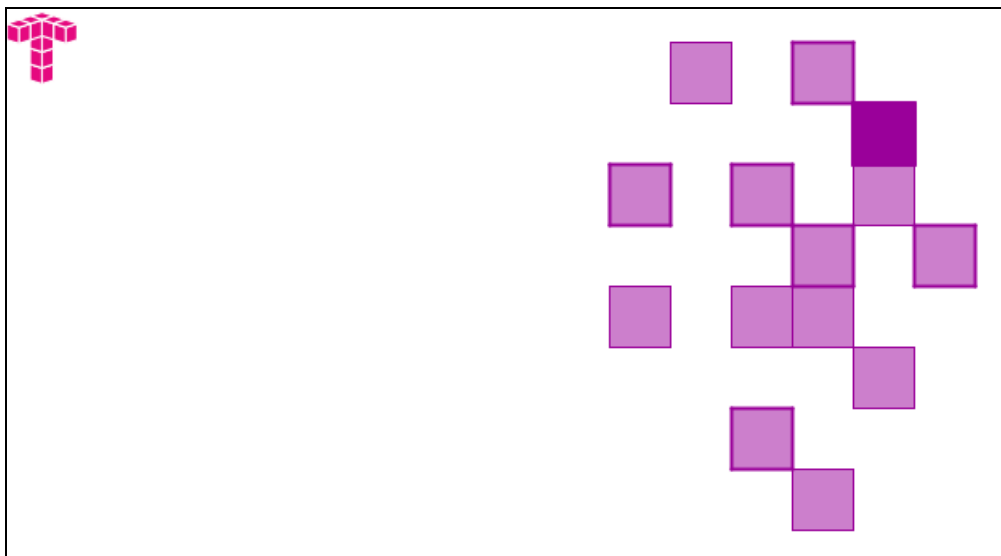
И аз теб, но не мога да те оградя с моята ограда.

1. Намери лицето на фигурата.



Използвай единичните квадратчета.

1. Построй с единичните квадратчета фигура с лице: а) 4 кв. ед. б) 5 кв. ед.



По колко начина може да стане това?

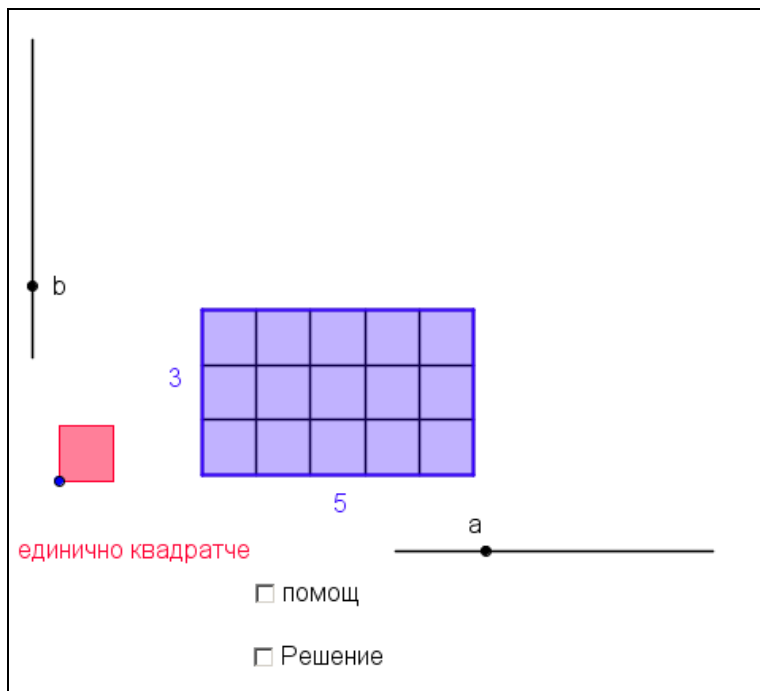
12. Лице на правоъгълник и квадрат

Могат да покрият под с форма на правоъгълник с размери 5 дм и 4 дм.

И са квадратни със страна 1 дм.

Но не могат да покрият под с форма на правоъгълник с размери 3 дм и 7 дм.

1. Като използваш модела долу, намери лицето на пет правоъгълника.



Използвай плъзгачите за получаване на следващ правоъгълник. Опитай се за запишеш на колко е равно лицето на правоъгълник с измерения a и b .

2. Намери лицето на правоъгълника.

4

6

a

$S = a \cdot b$

☒ помощ

☐ решение

Мести плъзгача за следващ пример.

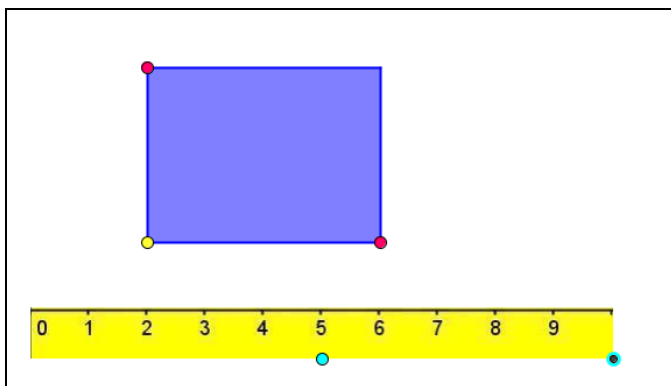
3. Намери лицето на правоъгълника.

b

a

Потренирай, като променяш измеренията с плъзгача.

4. Намери лицето на правоъгълника.



Тук инструментът е линейка. Можеш да я въртиш и преместваш. За следващ пример премести червени точки.

5. Намери лицето на квадрат с дължина на страната:

а) 2 см б) 3 см в) 5 см г) 10 см.

Запиши формула за намиране на лице на квадрат.

6. Сравни лицата на правоъгълниците с измерения:

а) 2 см и 3 см и 3 см и 2 см

б) 7 см и 4 см и 4 см и 7 см

в) 9 см и 2 см и 2 см и 9 см

г) 5 см и 4 см и 4 см и 5 см

Формулирай хипотеза. Опитай се да я обосновеш.

отговор $S = 6\text{cm}^2$ a _____	отговор $S = 6\text{cm}^2$ a _____
--	--

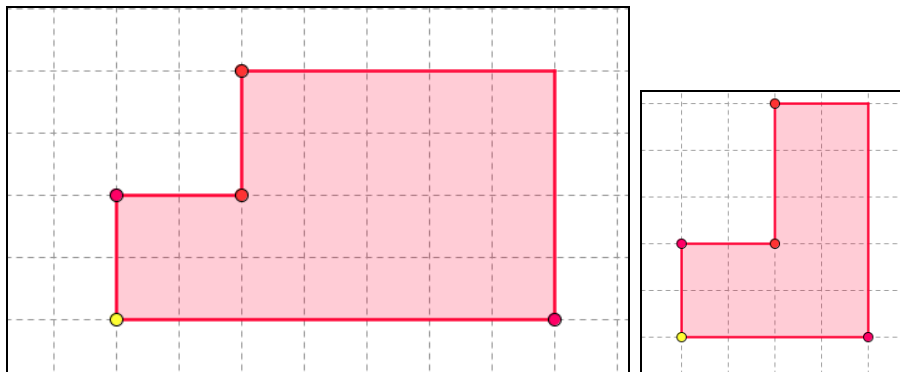
7. Построй различните правоъгълници с лице 12 кв. см.

13. Конструкции от правоъгълници

Мога да се разглобя на три еднакви правоъгълника.

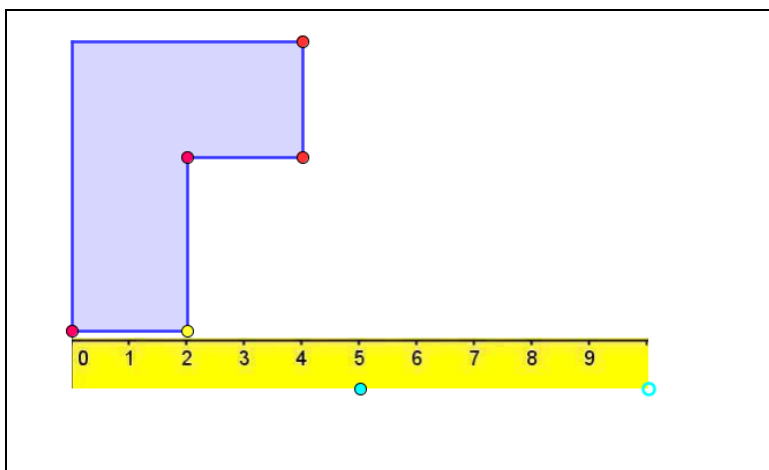
А аз - да те разглобя на два еднакви правоъгълника.

1. Намери обиколката и лицето на фигурата.



С преместване на червени точки получи нова фигура.

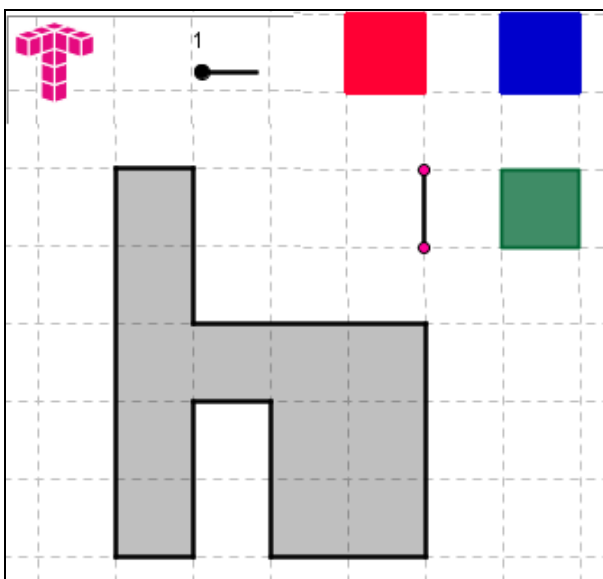
2. Намери обиколката и лицето на фигурата.



Можеш да преместваш и завърташ линийката.

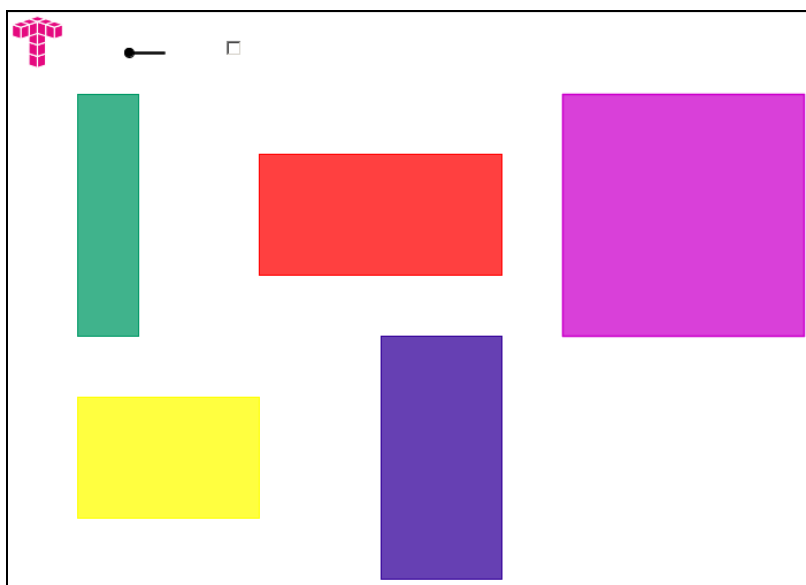
С преместване на червени точки получи нова фигура.

2. Намери обиколката и лицето на фигурата.



Можеш да използваш единичните квадратчета и отсечките като инструменти.

4. Сглоби правоъгълник (с използване на всички части).

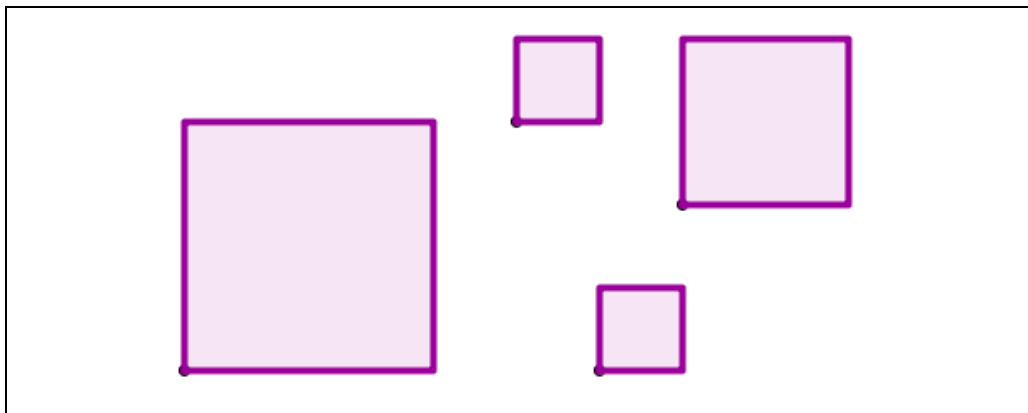


14. Конструкции от квадрати

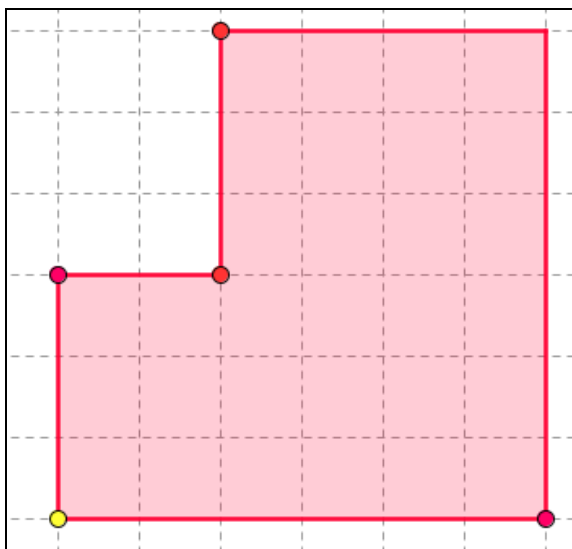
Аз съм направен
от 4 квадратчета.

И аз,
но съм по-дълъг.

1. Сглоби от квадратите правоъгълник.



2. Представи фигурата като обединение на минимален брой квадрати.

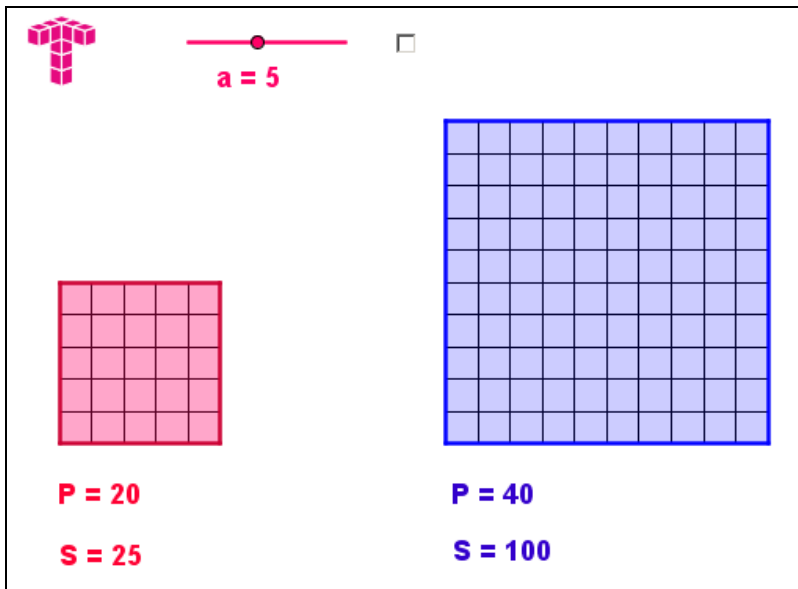


Използвай инструмента горе за построяване на помощни квадрати.
Премести червени точки за следващ пример.

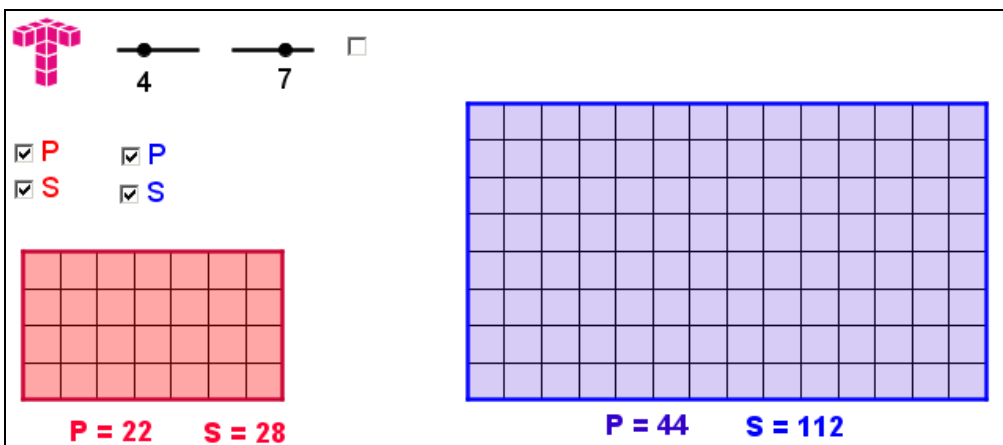
15. Удвояване на страна на правоъгълник

Страната ми е двойна,
лицето ми - четворно.

1. Как се променя лицето на квадрат при удвояване на страната му?
Как се променя обиколката на квадрат при удвояване на страната му?



2. Как се променя лицето на правоъгълник при удвояване на страните му?



Как се променя обиколката на правоъгълник при удвояване на страните му?

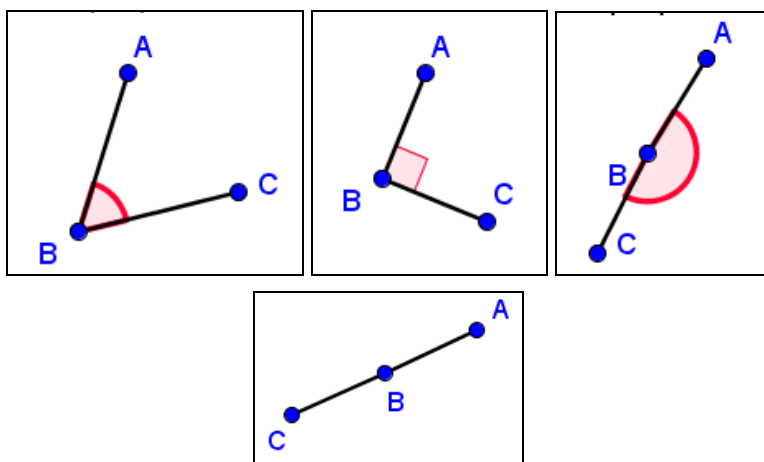
16. Видове ъгли 1

Не, тъп си!

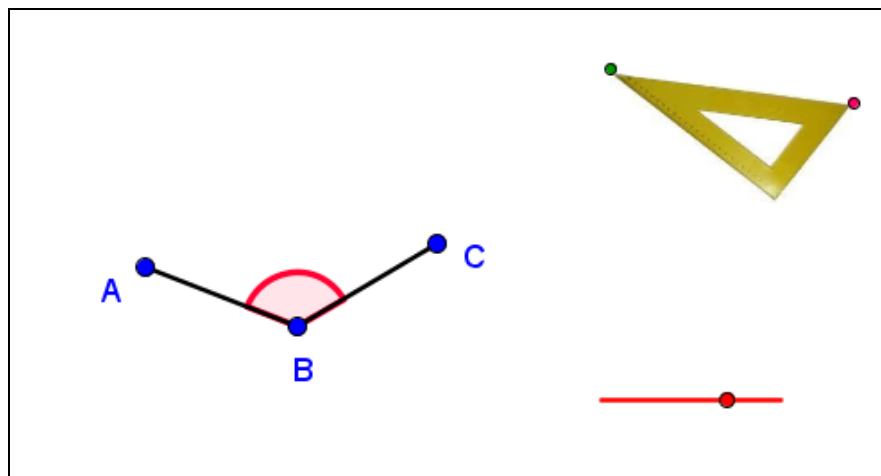
Много си остър!

Прав съм!

1. Определи вида на ъгъла.



2. Определи вида на ъгъла.



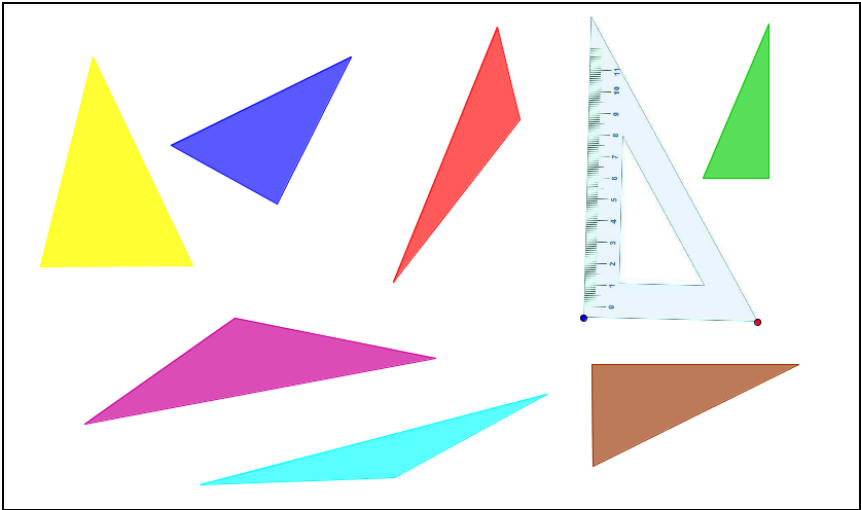
Мести плъзгача за следващ пример.

17. Видове триъгълници според ъглите 1

Имам остър ъгъл!

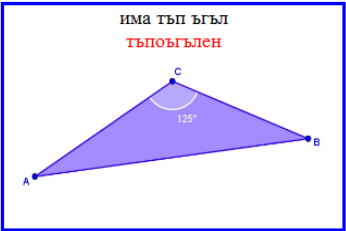
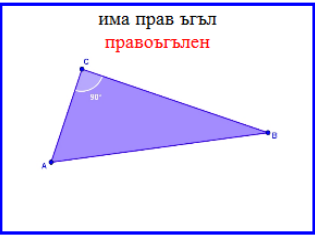
Но имаш и тъп!

1. Провери вида на ъглите на начертаните триъгълници и попълни таблицата.

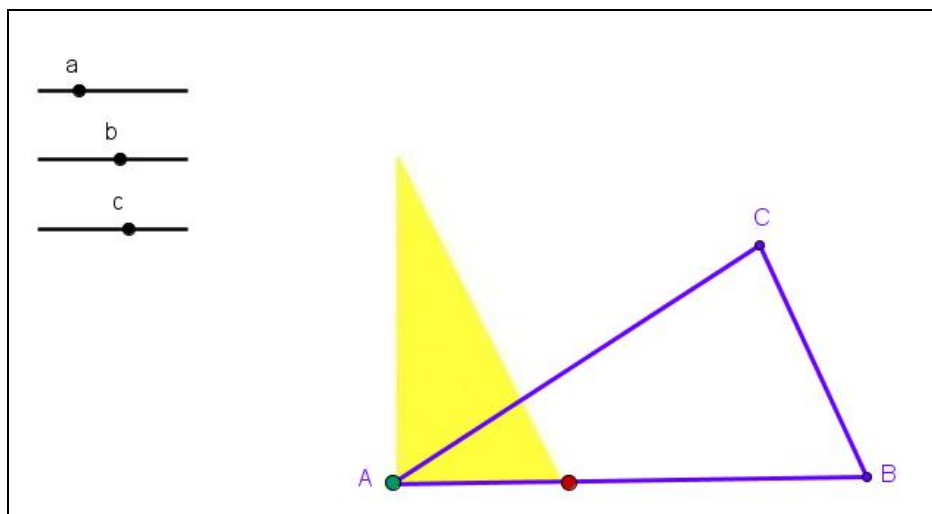


	жълт	син	червен	кафяв	зелен	лилав	електрик
ъгъл							
ъгъл							
ъгъл							

Триъгълниците според ъглите са три вида:



2. Какъв е видът на триъгълника според ъглите?

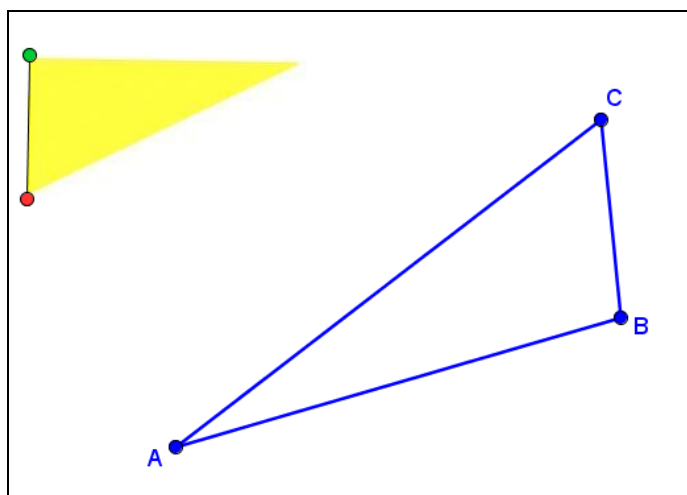


Използвай:

- жълтия инструмент - триъгълник, който можеш да местиш със зелената точка и да завърташ с червената
- плъзгачите за получаване на следващ триъгълник.

3. Получи:

- остроъгълен триъгълник
- правоъгълен триъгълник с прав ъгъл при върха B
- тъпоъгълен триъгълник с тъп ъгъл при върха C.

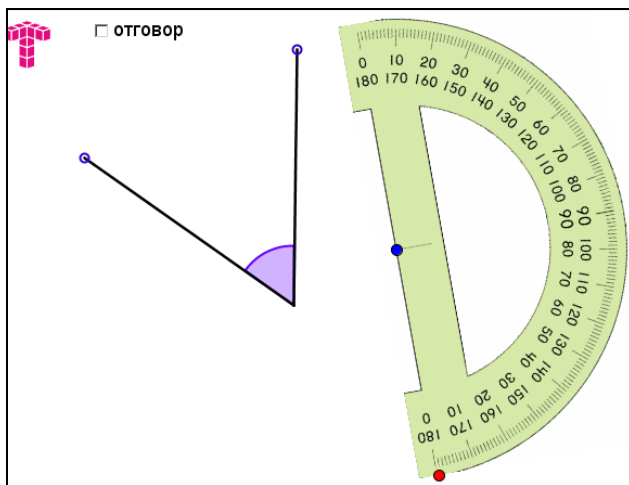


18. Измерване на ъгли с транспортир

30 или 150 съм?

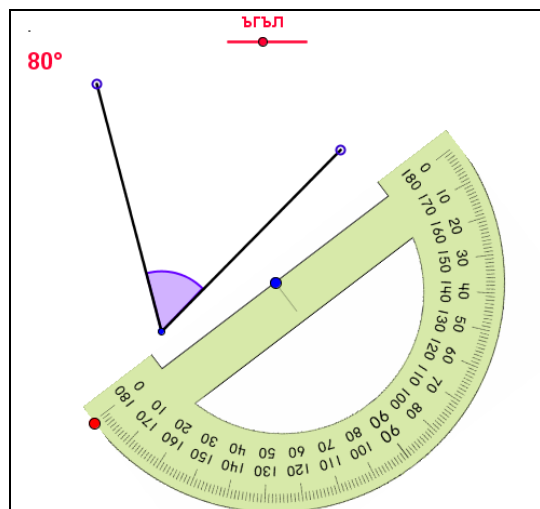
Не виждаш ли,
че си тъп?

1. Намери градусната мярка на ъгъла.



За следващ пример променяй ъгъла чрез точките върху рамената му.

2. Премести лъчите чрез точките така, че ъгълът да е равен на:



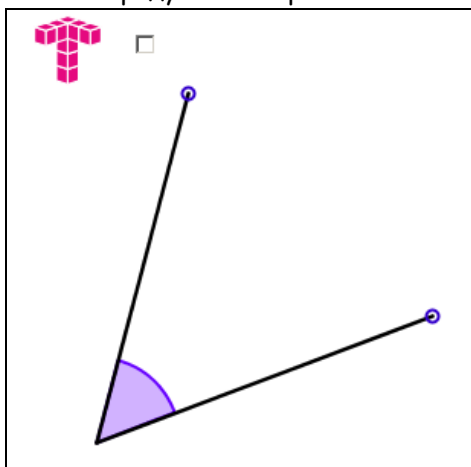
Скрий отговора. За следващ пример използвай плъзгача.

19. Провери и развий окомера си с ъгли

Под тази лупа изглеждам двойна.

А аз и под лупата съм същия!

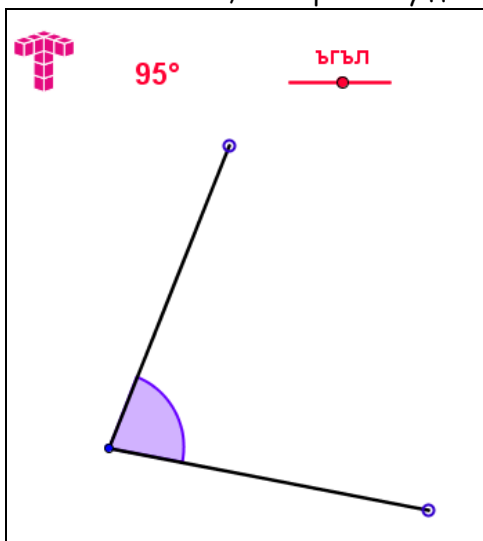
1. Прецени на око колко е градусната мярка на ъгъла.



Скрий отговора.

За следващ пример променяй ъгъла чрез точките върху рамената му.

2. Премести рамената на ъгъла така, че мярката му да е 95° .



Скрий отговора. За следващ пример използвай плъзгача.

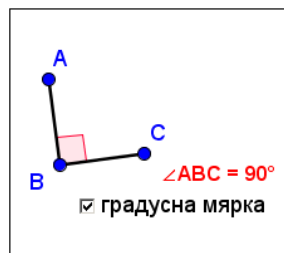
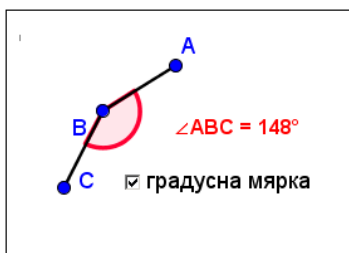
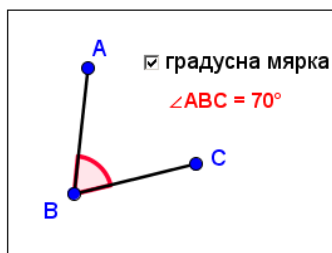
20. Видове ъгли 2

Мярката ми е 42° .

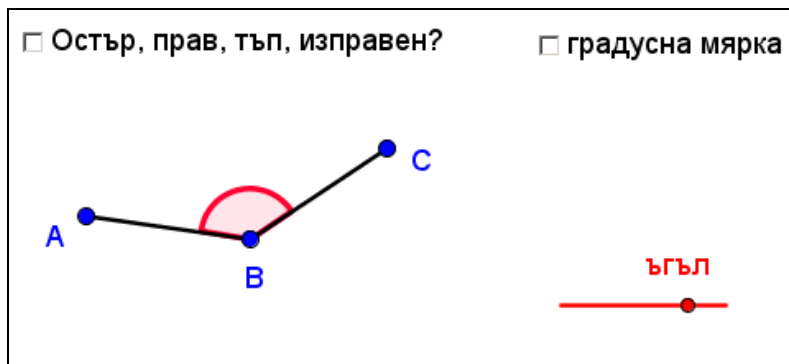
Моите измерения са 90 на 60.

А моите - 60 на 90 на 60.

1. Определи вида на ъгъла.



2. Определи вида на ъгъла.



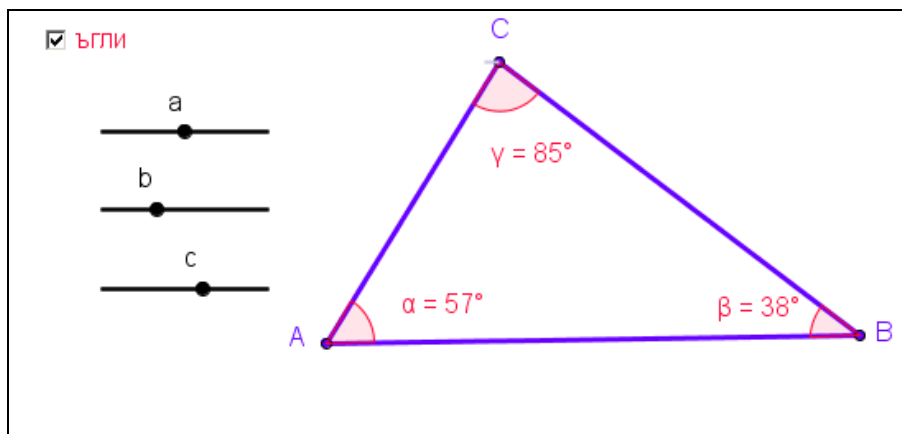
Скрий отговора и премести плъзгача и точка C за следващ пример.

21. Видове триъгълници според ъглите 2

Имам ъгъл 90° .

А аз - по-голям
от твоите ъгли.

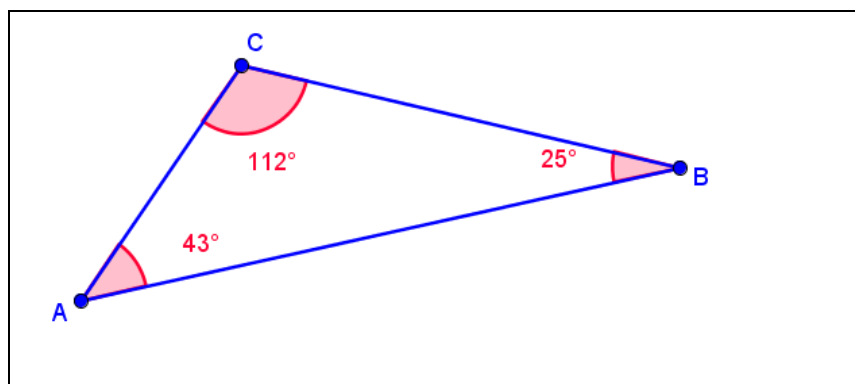
1. Какъв е видът на триъгълника според ъглите?



Използвай плъзгачите за получаване на следващ триъгълник.

2. Получи:

- остроъгълен триъгълник, два от ъглите на който са съответно 65° и 60°
- правоъгълен триъгълник с прав ъгъл при върха В
- тъпоъгълен триъгълник с тъп ъгъл при върха С.

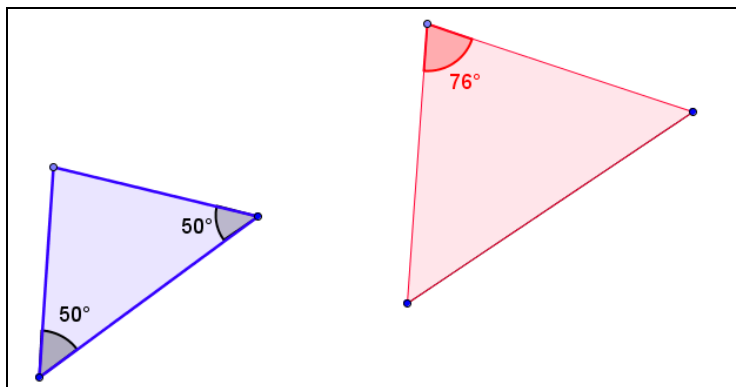


Мести върхове за получаване на следващ триъгълник.

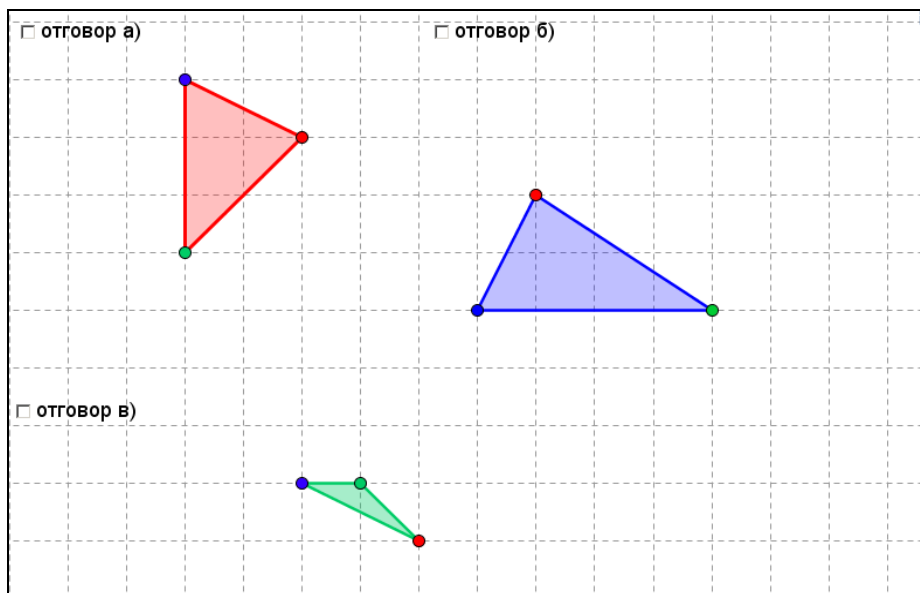
3. Определи вида на равнобедрен триъгълник според ъглите му, ако ъгълът между бедрата му е: а) 76° б) 120° в) 90° г) 30° д) 60° ?

Определи вида на равнобедрен триъгълник според ъглите му, ако един от ъглите при основата му е: а) 76° б) 30° в) 45° г) 60° ?

Прецени кой от равнобедрените триъгълници да използваш за помощ или проверка на решението.



4. Премести червения връх на триъгълника във връх на квадратната мрежа така, че да стане правоъгълен.



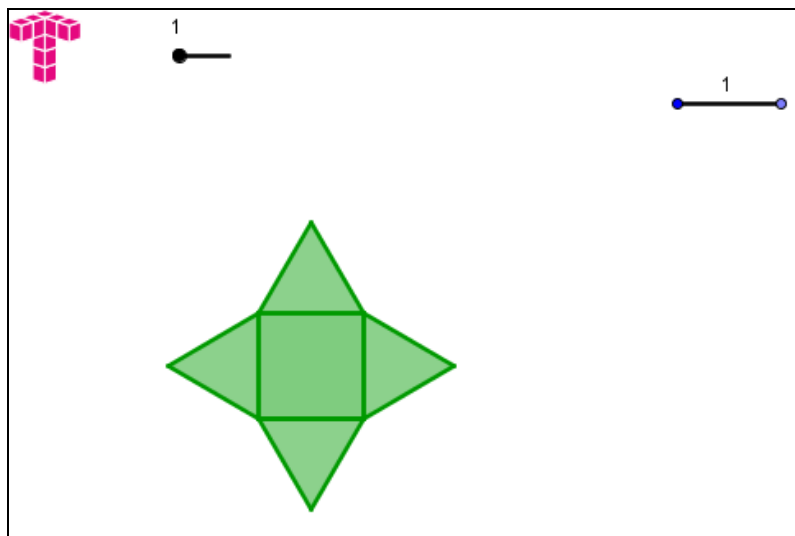
Потърси няколко възможности. Съобрази къде са разположени останалите решения.

22. Конструкции от триъгълници и правоъгълници

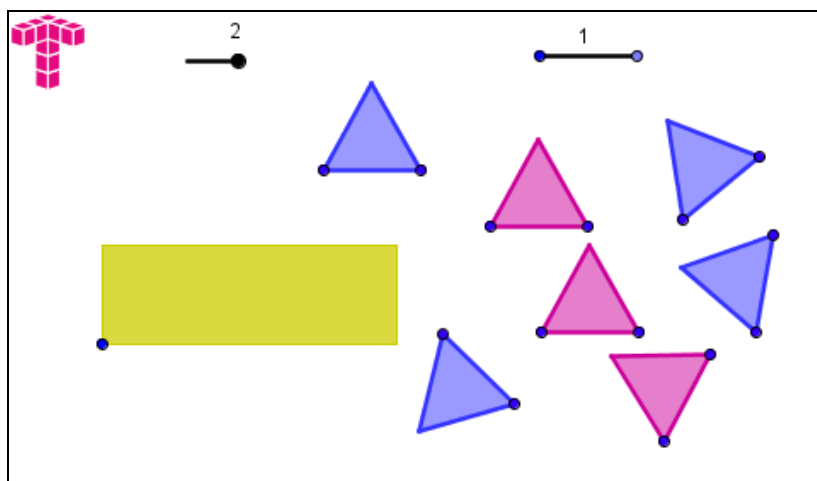
Обиколката ми е
като нейната!

Лицето ми е
като нейното!

1. Намери обиколката на фигурата.



2. Получи с фигурите конструкция и намери обиколката ѝ.

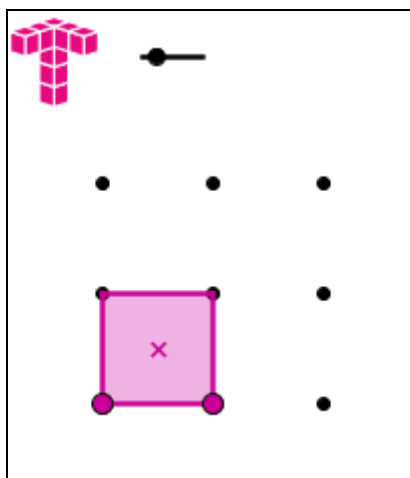


23. Квадрати в квадратна мрежа

Аз съм квадрат!

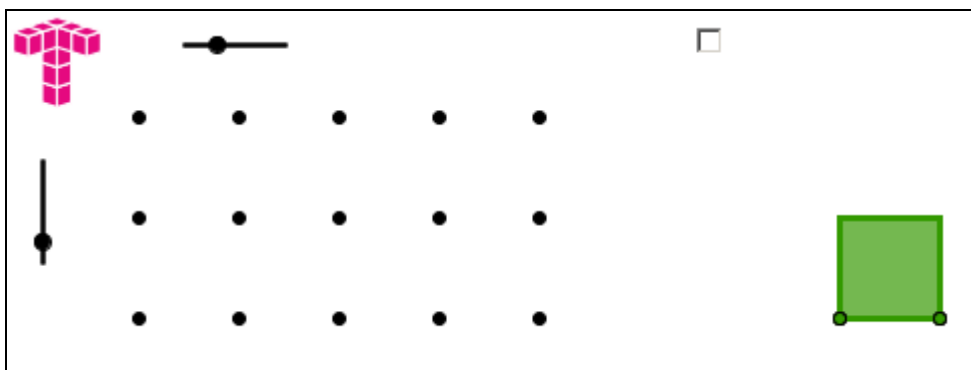
Аз също,
но съм и diamond!

1. Колко квадрата с различни дължини на страните и върхове в някои от дадените точки могат да се построят?



С плъзгача получи друг пример.

2. Колко квадрата с различни дължини на страните и върхове в някои от дадените точки могат да се построят?



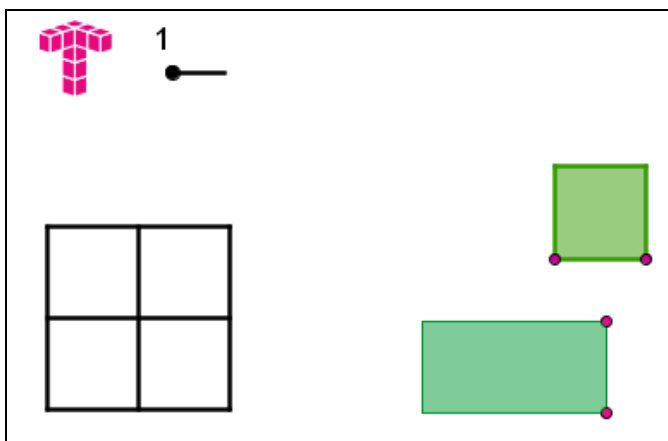
С плъзгачите получи друг пример.

Състави аналогична задача, като използваш модела.

24. Преброяване на правоъгълници

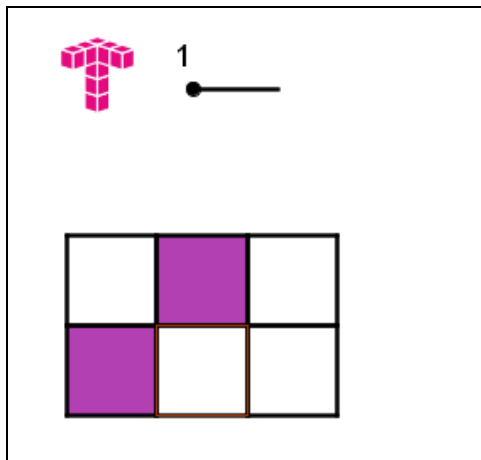
Брой ме и при
правоъгълниците.

1. Преброй: а) квадратите б) правоъгълниците.



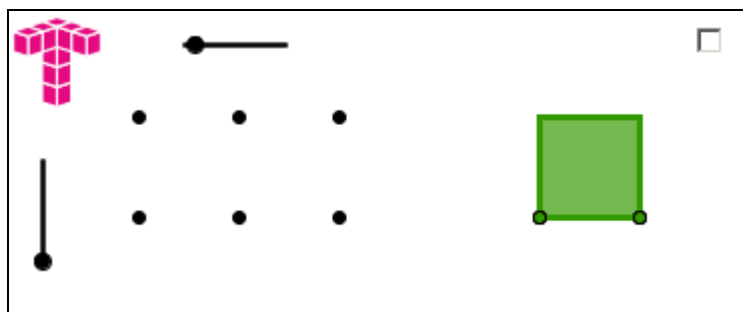
Използвай помощните правоъгълници. Мести плъзгач за следващ пример.
Състави аналогична задача.

2. Преброй правоъгълниците, които са наполовина лилави.



Мести плъзгач за следващ пример.

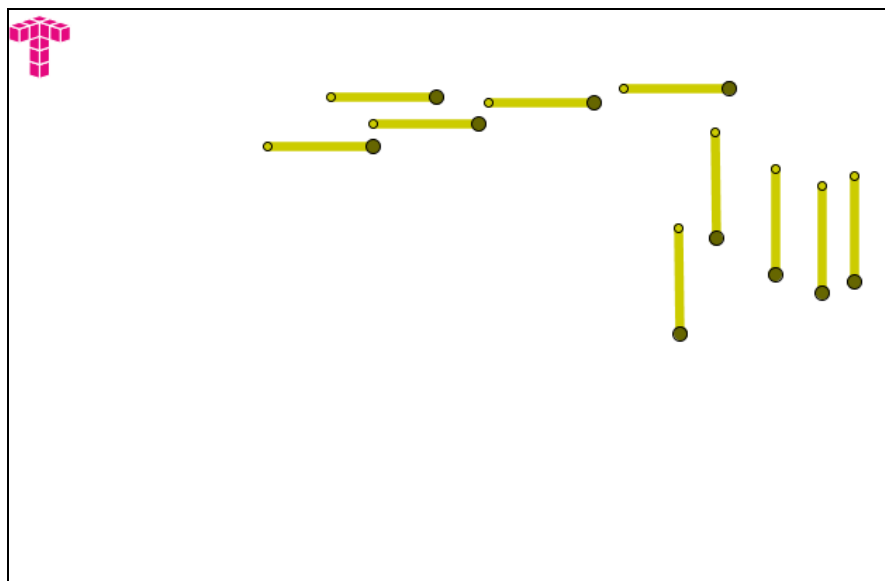
3. Преброй квадратите с върхове, някои от точките:



Използвай помощните квадрати.

4. С десет кибритени клечки построй два квадрата.

С преместване на две кибритени клечки получи три квадрата.



Състави аналогична задача.

Още такива задачи можеш да намериш в книгата

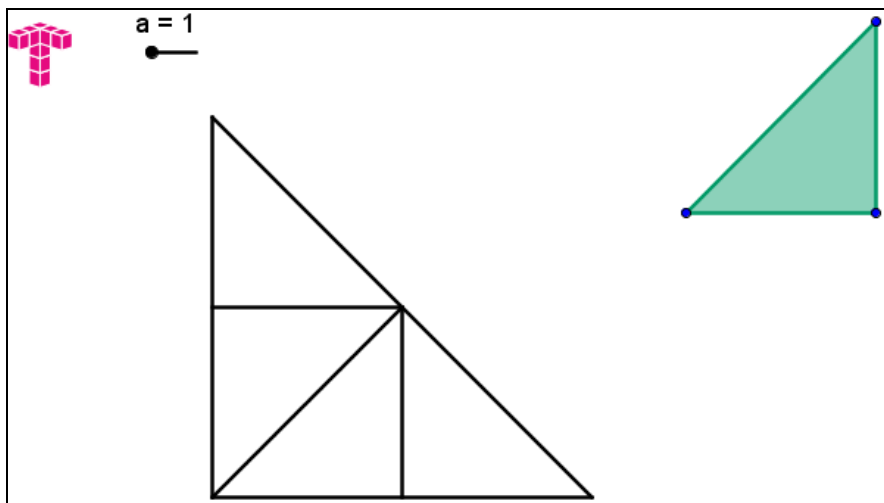
Чехларова, Т. Задачи и игри с кибритени клечки. Макрос 2000, Пловдив, 2005.
ISBN 954-561-180-4

25. Преброяване на триъгълници

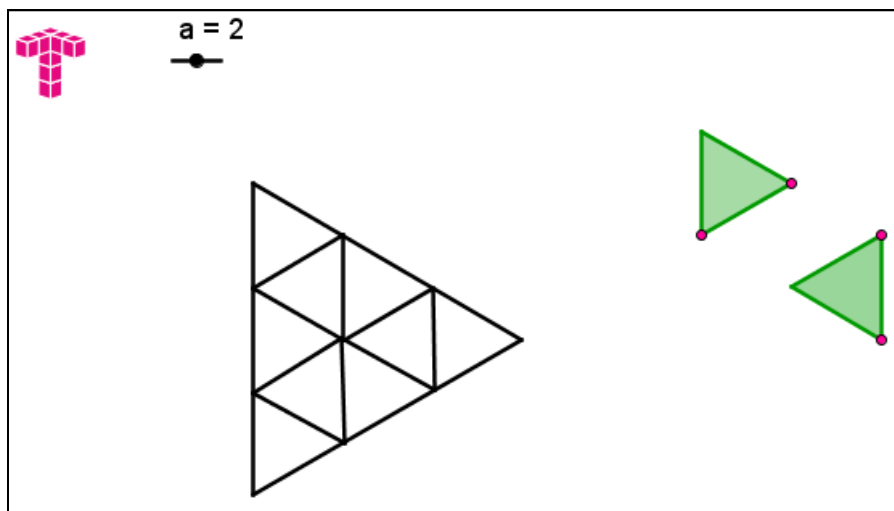
Така сме върхове точно
на четири триъгълника!

И то еднакви!

1. Преброй триъгълниците.



2. Преброй триъгълниците.



Можеш да преместваш и променяш помощните триъгълници.
Използвай плъзгача за следващ пример.

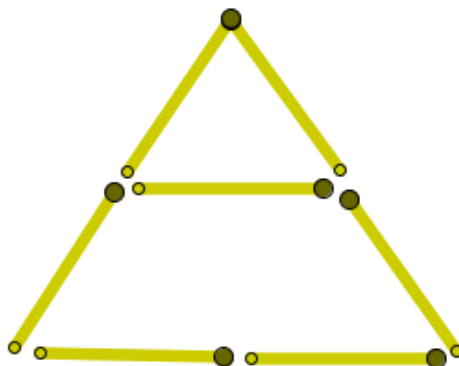
3. Колко са триъгълниците с върхове - някои от точките?



Можеш да преместваш и променяш помощните триъгълници.

Състави аналогична задача.

2. Премести две кибритени клечки така, че да се получат три триъгълника.



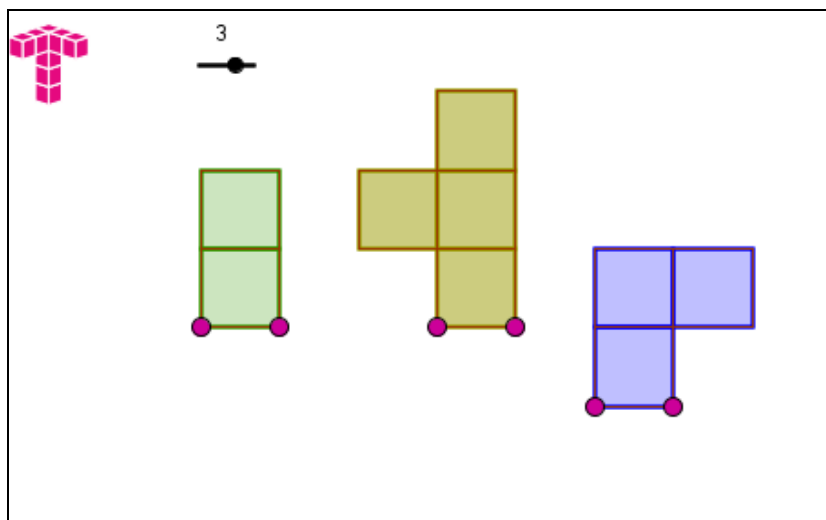
Потърси всички възможности.

26. Допълване до фигура

Да се сглобим
в квадрат!

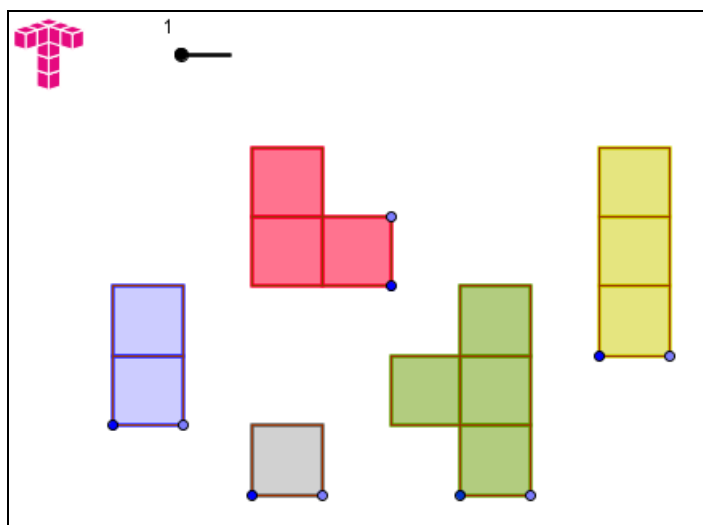
Аз не трябва да
участвам!

1. Възможно ли е да се построи квадрат с фигурите?



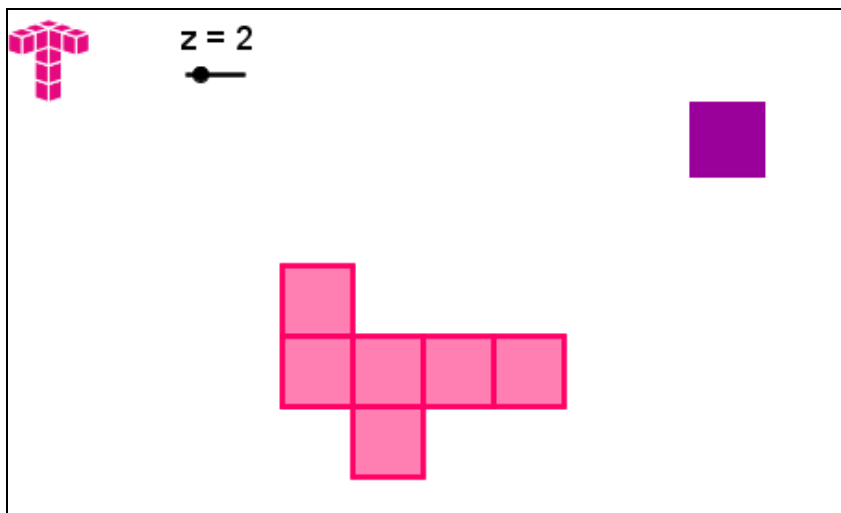
С точките можеш да преместваш и завърташ фигурите.

2. С четири от фигурите е построен квадрат. Коя фигура не е използвана?

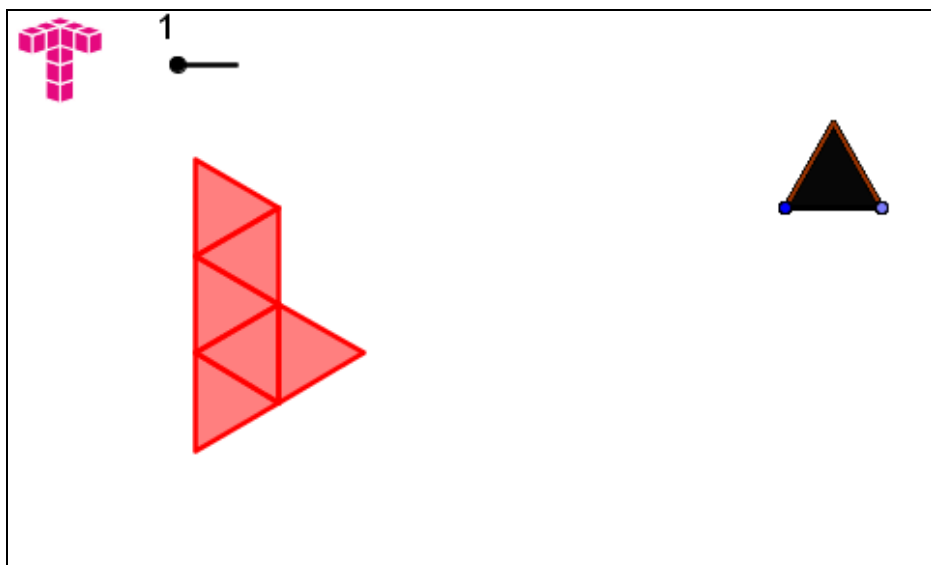


Мести плъзгача за следващ пример.

3. Какъв е минималният брой единични квадратчета, които трябва да се добавят, за да се допълни фигурата до: а) правоъгълник б) квадрат?



4. Какъв е минималният брой единични триъгълничета, които трябва да се добавят, за да се допълни фигурата до триъгълник?

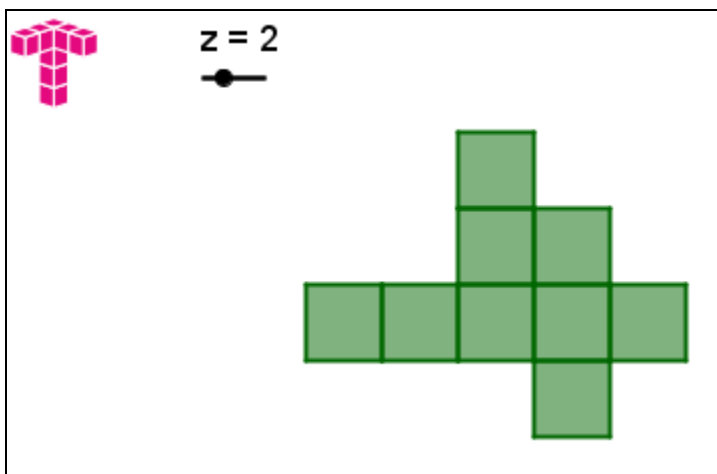


С точките можеш да преместваш и завърташ помощните триъгълничета.

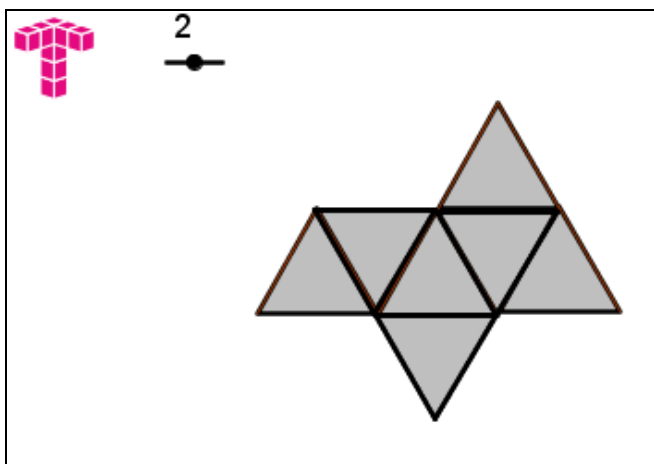
27. Действия с фигури

И с преместване, и с добавяне,
и с отстраняване на квадратче
ставам правоъгълник!

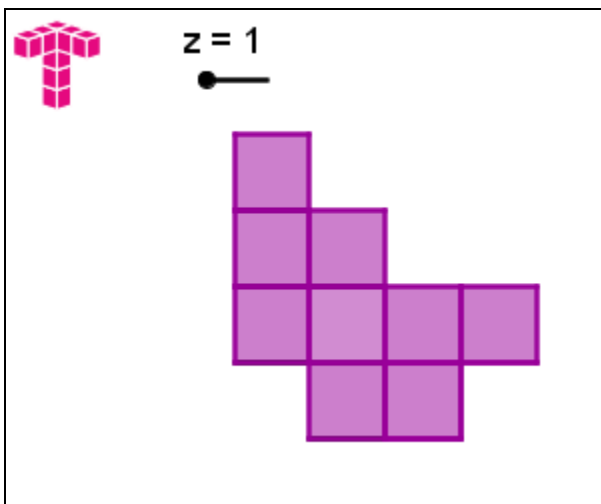
1. Какъв е минималният брой единични квадратчета, които трябва да се отстранят, за да се получи: а) правоъгълник б) квадрат?



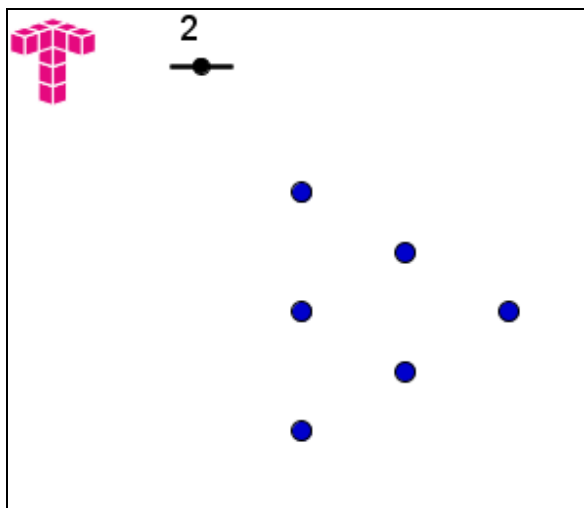
2. Какъв е минималният брой единични триъгълничета, които трябва да се отстранят, за да се получи триъгълник?



3. Какъв е минималният брой единични квадратчета, които трябва да се преместят, за да се получи правоъгълник?



4. Какъв е минималният брой точки, които трябва да се отстранят от фигурата, за да не е възможно три от останалите точки да са върхове на равностраничен триъгълник?

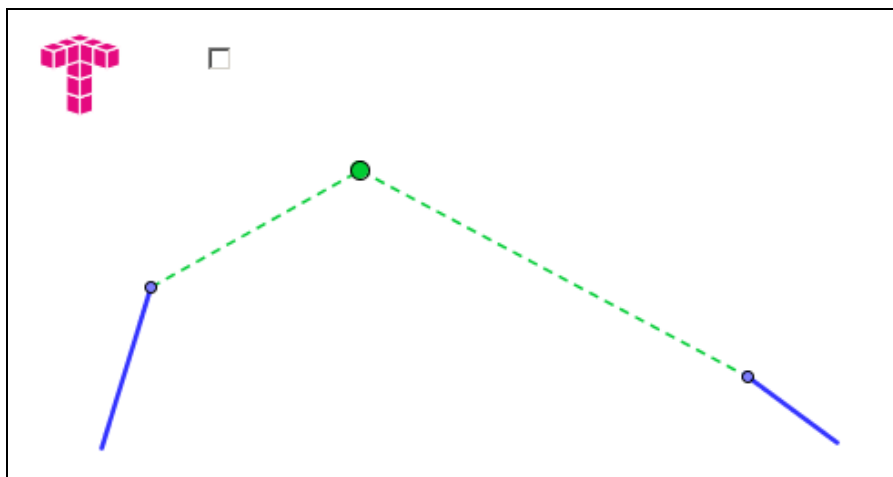


28. Провери и развий окомера си

Аз използвам
линийка.

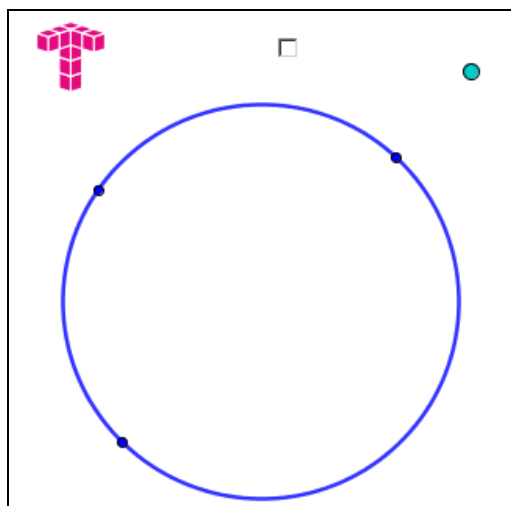
А аз – очите си.

1. Премести зелената точка там, където ще се пресекат двете прави, част от които е показана в синьо.



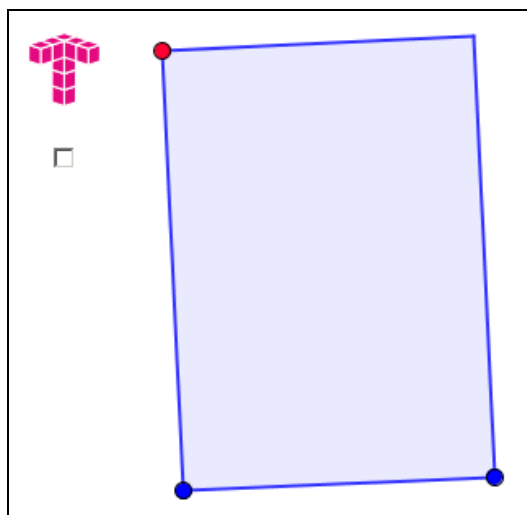
Скрий отговора и премести краища на отсечки за следващ пример.

2. Отбележи центъра на окръжността със зелената точка.



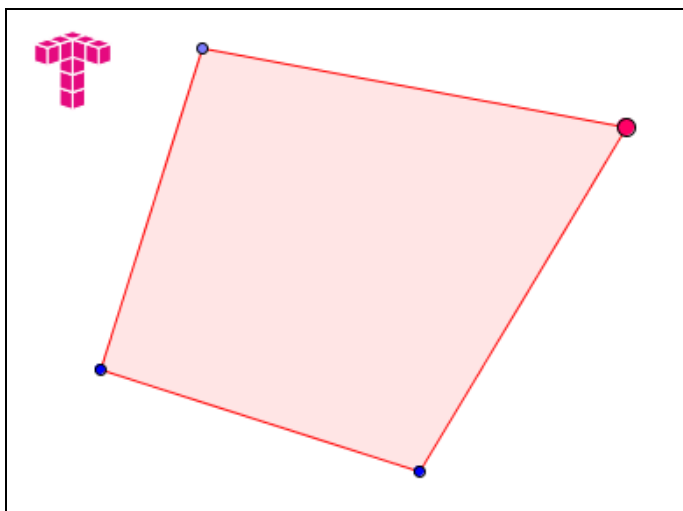
Скрий отговора. За следващ пример премествай синя точка от окръжността.

3. Премествай червения връх на правоъгълника така, че да се получи квадрат.



Скрий отговора. За следващ пример премести върховете на правоъгълника.

4. Премести червената точка така, че да се получи правоъгълник.



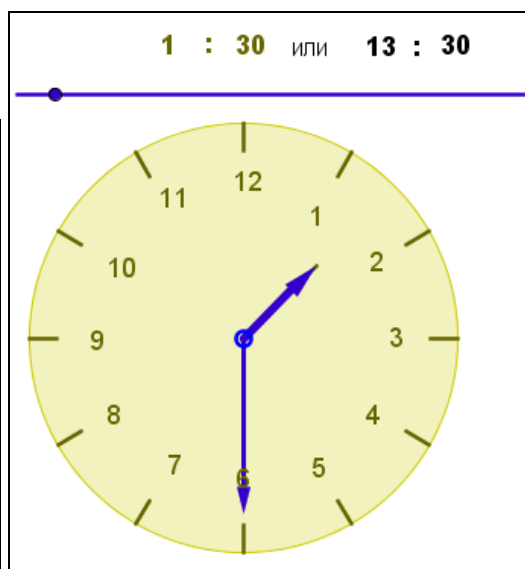
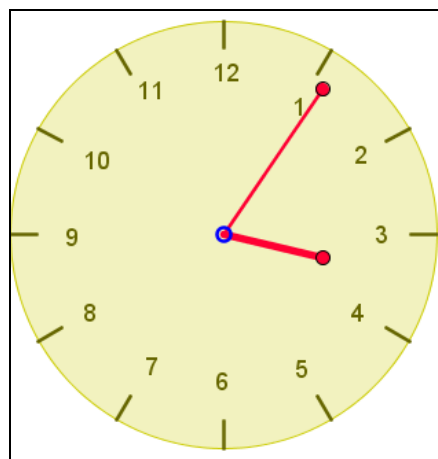
Скрий отговора. За следващ пример премести сини върхове на правоъгълника.

29. Ъгли и часовници

За 5 минути се завъртам на 30° .

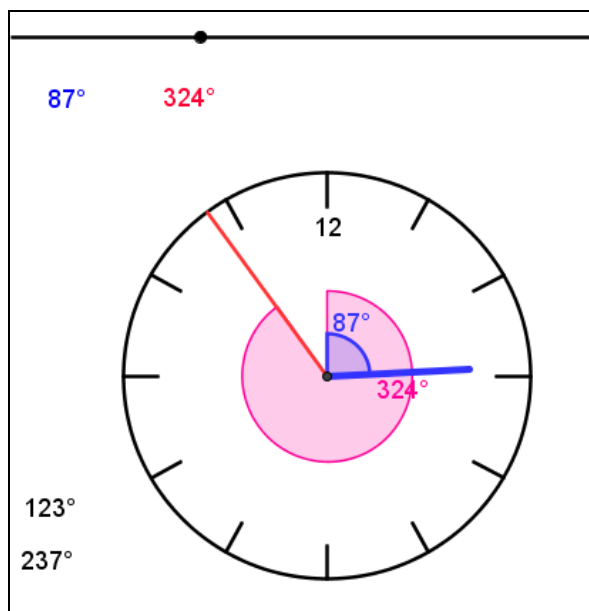
А аз за 10 минути – на 5° .

1. На колко градуса ще се завърти минутната стрелка за:
а) 15 минути б) 30 минути в) 5 минути г) 20 минути?
2. На колко градуса ще се завърти часовата стрелка за:
а) 3 часа б) 1 час в) 5 часа г) 30 мин?
3. За колко минути минутната стрелка се завърта на:
а) 60° б) 150° в) 90° г) 6° ?
4. За колко часа часовата стрелка ще се завърти на:
а) 30° б) 120° в) 180° г) 15° ?



5. Минутната стрелка за 17 мин се завърта на ъгъл, който е:
А) прав Б) остър В) тъп.

6. Минутната стрелка за 14 мин се завърта на ъгъл, който е:
 А) прав Б) остър В) тъп
7. Минутната стрелка за 15 мин се завърта на ъгъл, който е:
 А) прав Б) остър В) тъп
8. Часовата стрелка за 4 часа се завърта на ъгъл, който е:
 А) прав Б) остър В) тъп
9. Часовата стрелка за 3 часа се завърта на ъгъл, който е:
 А) прав Б) остър В) тъп
10. Ъгълът между минутната и часовата стрелка в 2 ч 15 мин е:
 А) прав Б) остър В) тъп
11. Ъгълът между минутната и часовата стрелка в 9 ч 40 мин е:
 А) прав Б) остър В) тъп
12. Ъгълът между минутната и часовата стрелка в 15 ч е:
 А) прав Б) остър В) тъп.



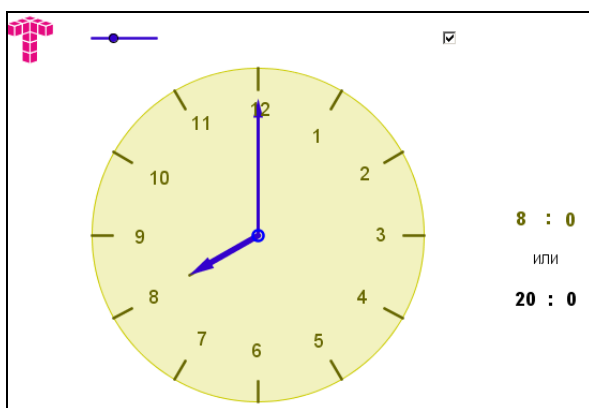
За учителя

Всяка тема започва с комикс, който учениците ще довършат с картинка в края на занятието.

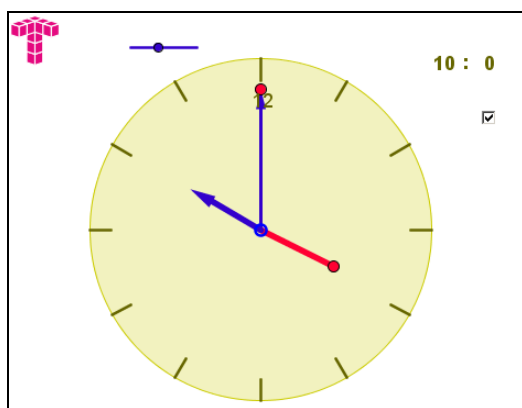
Напомняме, че навсякъде в динамичните файлове малкото квадратче е със страна 1.

----- 1 -----

Тук учениците работят с виртуални часовници. Първи и втори модел са със записани числа на циферблата, а на трети и четвърти модел е записано само числото 12. Първа и трета задача са за разпознаване на точен час, а втора и четвърта – за сверяване на часовник по даден точен час.

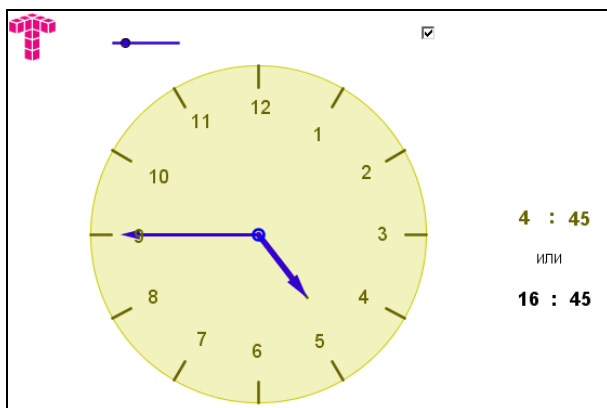


За някои ученици този виртуален часовник може да е първа среща с *Geogebra*. При нужда се изяснява работата с плъзгача и с отметката за показване на решението. Подходящо е използване на аплетите както за самопроверка, така и за организиране на колективна работа или състезание.

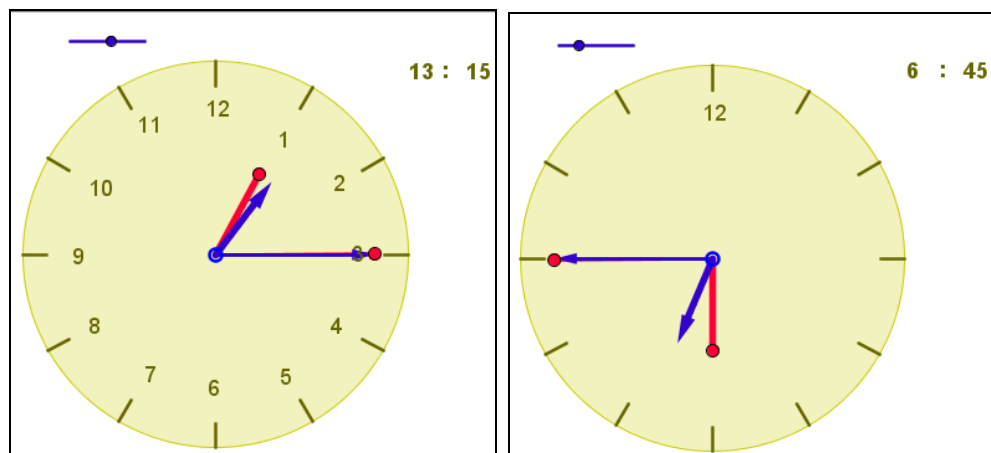


2

Тук аплетите са аналогични на аплетите в тема 1, но се работи с точност 15 минути.



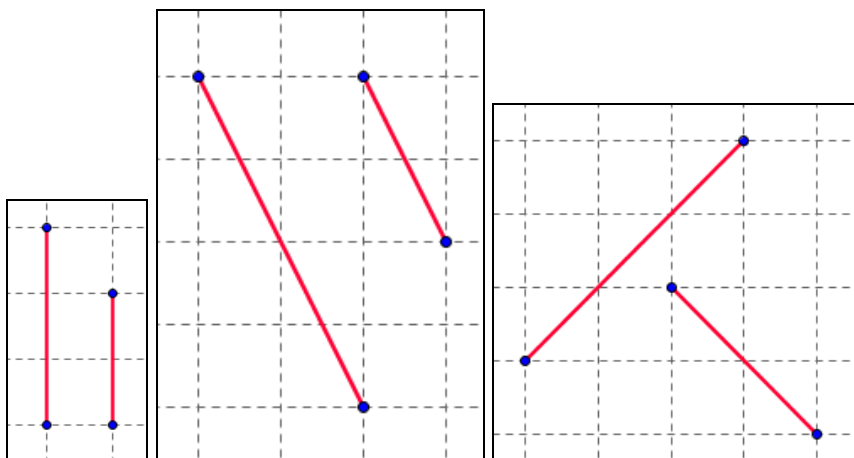
Особеност е, че при преместване на минутната стрелка се осъществява преместване и на часовата стрелка, което трябва да се отчита при задачи 2 и 4. Типична грешка е показаната долу:



6

За обосновка за равенство (неравенство) на някои от предложените отсечки в квадратна мрежа може да се използват единичната мярка или диагонали в еднакви правоъгълници.

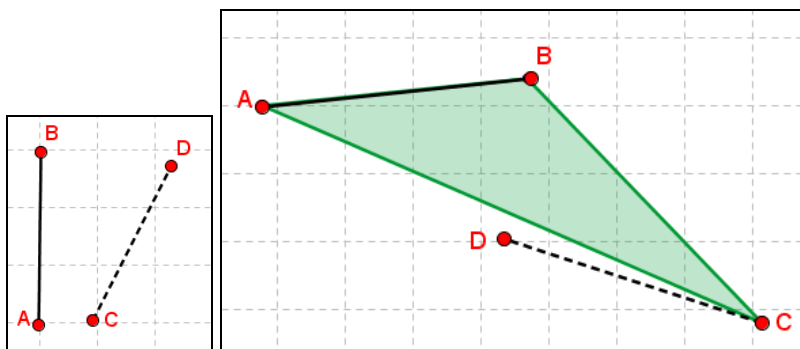
С преместване на краища на отсечките в първия пример учениците могат да съставят нови примери:



Питагоровата теорема се изучава много по-късно в българското училище, но за любознателните е полезно да знаят универсално средство за сравняване на отсечки в квадратна мрежа, макар и дадено наготово. Без това знание те могат да сравнят отсечки в квадратна мрежа само в някои случаи.

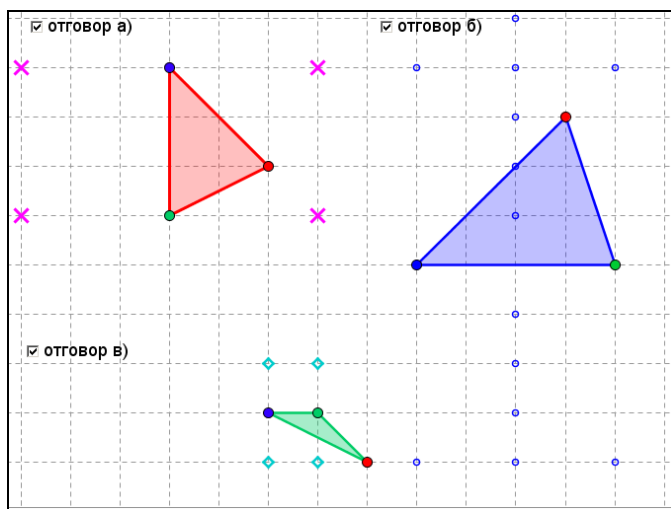
————— 7 —————

Като инструменти при решаване на задача 1 са предоставени две отсечки с равни дължини. Едната отсечка се поставя върху страна на разглеждания триъгълник, а с другата отсечка се проверява дали някоя от другите му две страни има същата дължина.



Подходящо е учениците да разполагат с модели на триъгълници, направени от различен материал и според него да намират начини за

определяне на вида според страните при ограничени условия, например без разграфена линейка. Така, ако триъгълникът е от хартия, може да се провери с прегъване... При решаване на задача 4 трябва да се търсят всички решения. Тук ще обърнем внимание, че отсечките са специално избрани. Могат да се отделят двата случая, в които отсечката е върху линия на координатната система: дължината е четно (нечетно) число. Естествено е някои от учениците да продължат с отсечки, които не лежат на линия от координатната система и открият конкретни решения.



----- 8 -----

Първите две задачи могат да се използват за самопроверка.

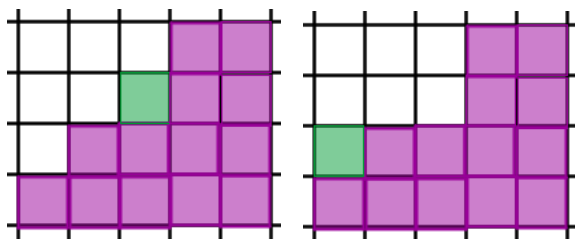
За построяване на триъгълник с обиколка 12 см учениците трябва да преценят, че могат да използват аплета от задача 1. Тук трябва да открият и опишат всички възможности. Могат да се насочат към оформяне на описанието в таблица (или да подредят по специален начин резултатът), което ще им помогне да открият зависимости. Чак в 7. клас учениците ще изучават неравенствата между страни в триъгълник и съответно условията три отсечки да могат да бъдат страни на триъгълник, но със задачи като тази се натрупват конкретни примери за триъгълници и се установява, че не всеки три числа могат да са дължини на страни на един триъгълник. Може да се сравни с решението на задачата *да се представи числото 12 като сбор на три естествени числа* (по сегашната програма - *цели числа* или *само числа*). Описанието и подредбата на получени резултати е елемент от изследователския процес и уменията за това е подходящо да се формират още в началното училище.

----- 9 -----

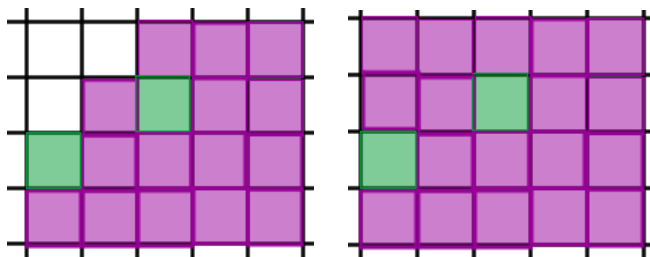
Подходящото подреждане на резултати е в основата на откриване и формулиране на закономерности, свързани с обиколка на правоъгълник. След задача 2 е подходящо да се постави въпрос за броя на данните, необходими за решаване, както и да се върнат към задача 1 и потърсят минимални данни, достатъчни за решаване на задачата.

----- 10 -----

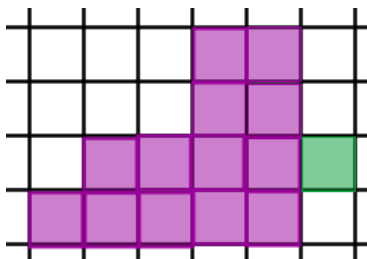
Решаването на Задача 3 изисква повече време. Това са двете възможности за добавяне на едно квадратче така, че да не се промени обиколката:



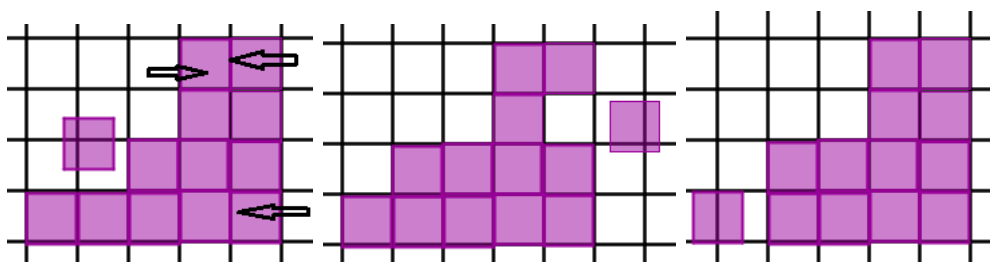
За намиране на максималния брой учениците постепенно се досещат, че се осъществява допълване до правоъгълник.



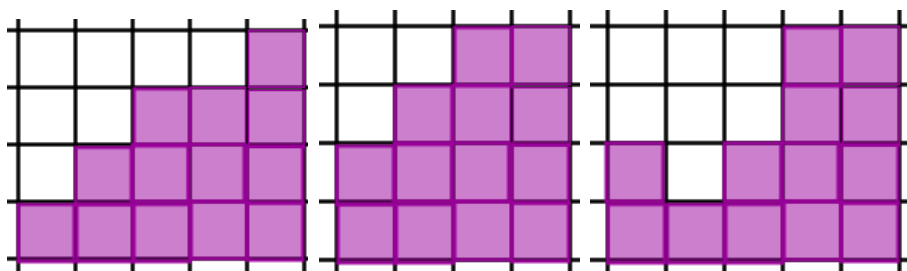
Ето някои възможности за увеличаване обиколката чрез добавяне на единично квадратче.



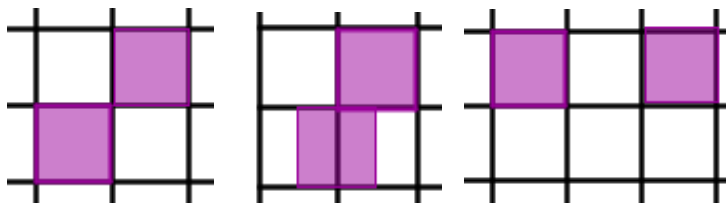
С отстраняване може да се запази, увеличи или намали обиколката:



Показан е по един пример за преместване със: запазване, намаляване, и увеличаване на обиколката:



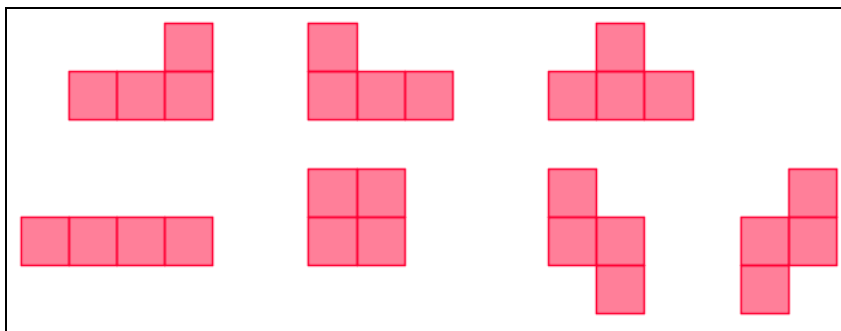
В подходящ момент е важно да се обърне внимание на „аксиоматиката“, т.е. какви действия с квадратчета са разрешени и кое е *конструкция*. Може да се изясни, че при получаване на конструкция всяко квадратче след първото има обща страна с някое от построените вече квадратчета и специално да се покажат неразрешени случаи:



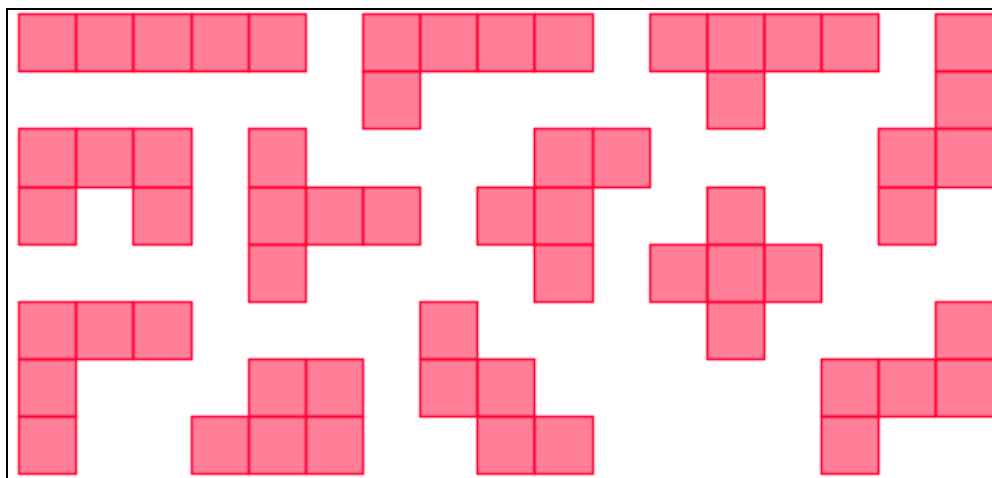
Промяната на тези условия води до други решения, т.к. всъщност задачата се променя. Това са условия, които ще се използват и в следващата тема при построяване на полиомина.

----- 11 -----

Задача 1 е предложена с цел осигуряване на разбирането на понятието лице. Важно е учениците да осмислят, че лицето е число и това число отговаря на броя на единичните квадратчета, с които се покрива разглежданата площ. В задача 2 се построяват последователно четиримината (тетрамина)



и пентамината (долу са изобразени без огледалните им образи).

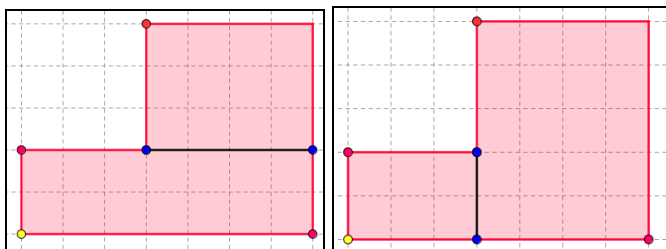


Тази задача може да бъде прелюдия към многообразните провокации с полиомина. Препоръчваме и използване на манипулативи – полиомина.

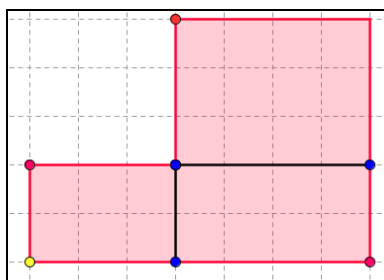
----- 12 -----

Работи се по аналогия на темата за обиколка на правоъгълник и това трябва да бъде казано явно или потвърдено от учителя. След решаване на задача 6 трябва да се направи връзка между разместителното свойство на действие умножение и равнолицевостта (и еднаквостта) на съответните правоъгълници. При решаване на задача 7 учениците сами трябва да изберат подходящ динамичен модел от предишните задачи. Подходящо е да се свърже решението с представянето на числото 12 като произведение на два множителя, което е пропедевтика на обобщенията на тази задача, които ще изследват в следващите класове.

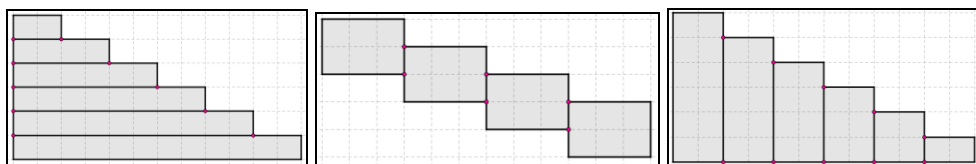
Тук се стига и използва идеята за разделяне на фигура и намиране на лицето ѝ като сбор на лицата на получените фигури. Разделянето може да се реализира по няколко начина.



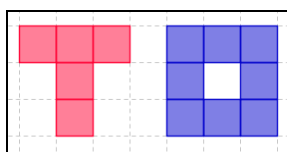
Някои ученици използват разделянето на три правоъгълника, показано долу. Полезно е да се направи анализ и насочване към рационалност при решаване на такива задачи.



Могат да се използват и специфични идеи за рационалност, например в задача 3 четвъртата фигура да се раздели на четири еднакви правоъгълника, а петата фигура да се моделира със сбора $2+4+6+8+10+12$.

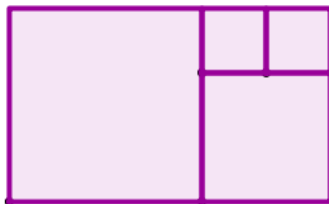


Подходящо е учениците сами да съставят задачи, като се даде идея да се конструират букви, думи, числа и търси колко кв. ед. цветен материал ще е необходим за изработването им.



----- 14 -----

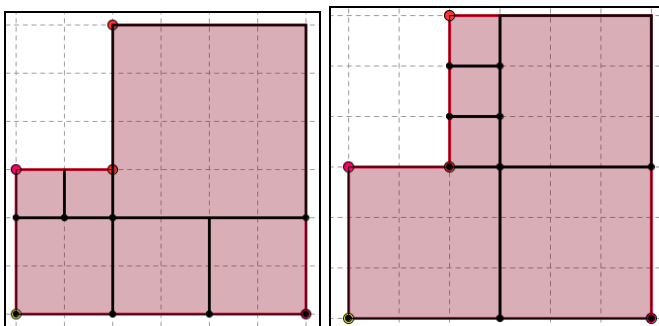
Като помощ в задача 1 са дадени правоъгълниците, които могат да се получат с дадените.



Трябва да се търсят различни възможности:

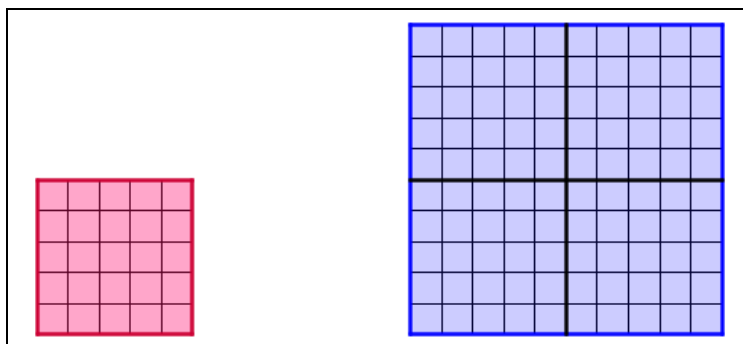


И в задача 2 могат да се намерят различни решения, например:



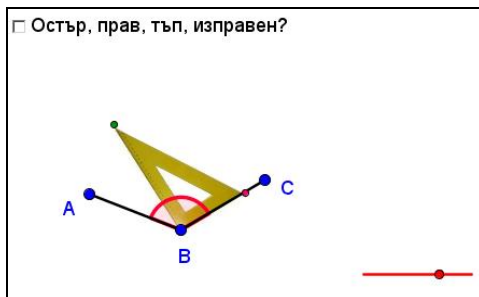
----- 15 -----

Експериментално учениците трябва да стигнат до хипотезата, че при удвояване страната на квадрат лицето се увеличава четири пъти. С отметката се показват и двете отсечки, с които се онагледява този факт.



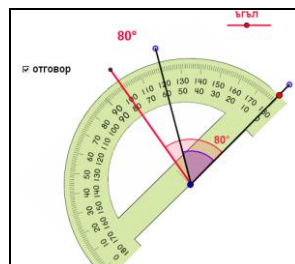
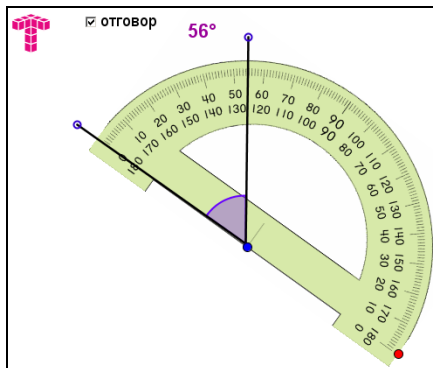
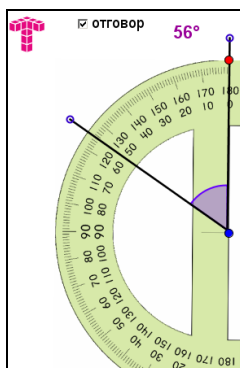
----- 16 -----

Тук се използва правият ъгъл на инструмента „триъгълник“ за установяване на вида на ъгъла.



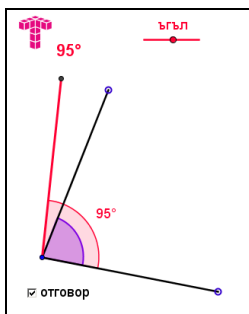
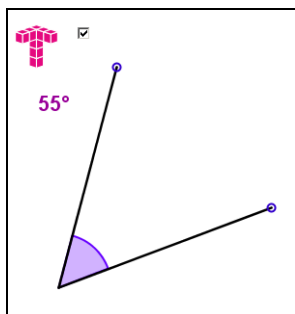
----- 18 -----

Предоставен е виртуален транспортир за упражнение за измерване на ъгъл и построяване на ъгъл по дадена градусна мярка.

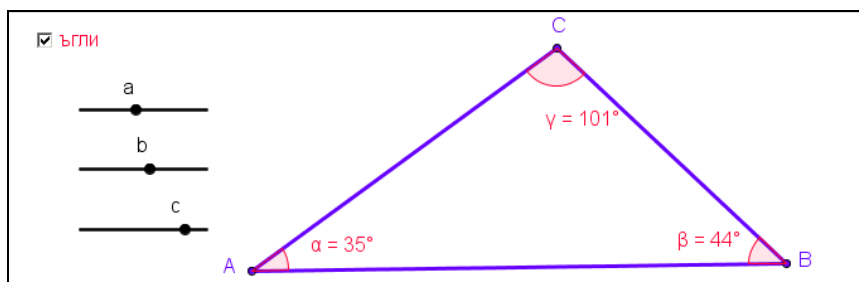


----- 19 -----

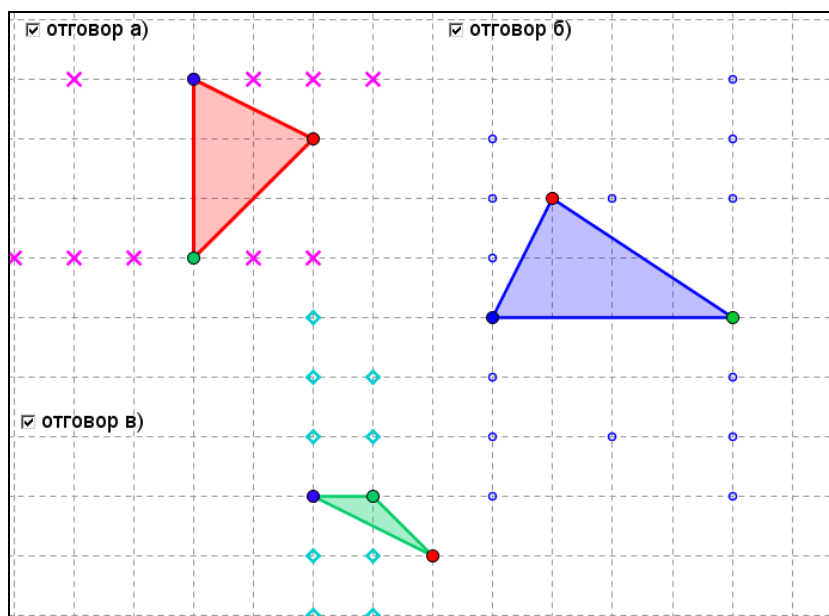
Аплетите могат да се ползват за самопроверка и за организиране на състезание.



Използват се знанията, че градусната мярка на правия ъгъл е 90° , острият ъгъл е по-малък от правия, а тъпият - по-голям от правия. Тъй като се работи с естествени числа, т.е. зададен е режим с точност до цялата част, сборът на ъглите е с точност 1. И ако ъгълът между бедрата е нечетно число (т.е. другите два ъгъла не са цели числа), сборът няма да е 180° .

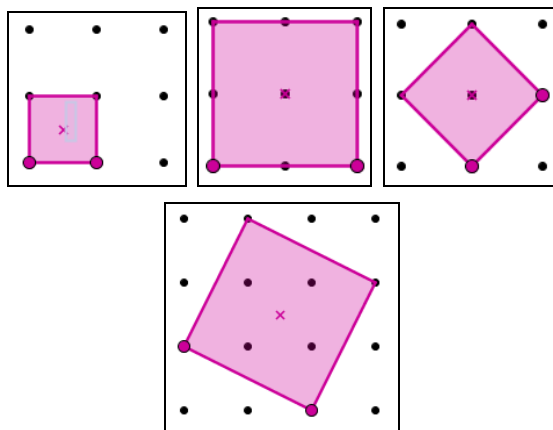


В задача 4 отсечките отново са специално подбрани и могат да се направят обобщения като в задача 4 от тема 7. Ще обърнем внимание, че ако отсечката е хипотенуза в питагоров триъгълник, има повече възможности.



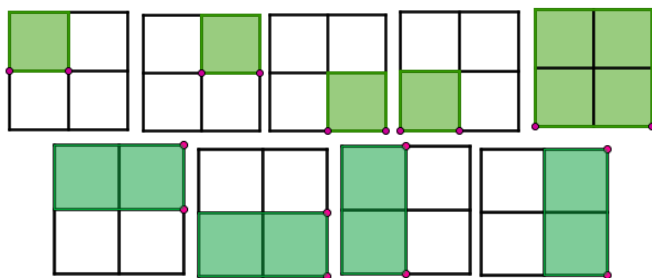
Може да се постави изискване за екстремалност, както и обратната задача - ако е известна обиколката на фигурата, да се намери дължината на страната на равностранния триъгълник.

Ще напомним, че по учебна програма учениците едва след 7 клас ще извършват доказателства, тук се очаква да се развива интуицията и въображението, като някои знания се дават наготово. Оперирането в квадратна мрежа до 7. клас е системно застъпено при изуване на геометрични фигури, но обикновено се използват стандартни положения. Софтуерът позволява де се прави проверка за дължини на страни и градусни мерки на ъгли, но се работи с приближение. **Може да се прави хипотеза, като резултатът може да служи за обосновка само когато играе ролята на контрапример.**

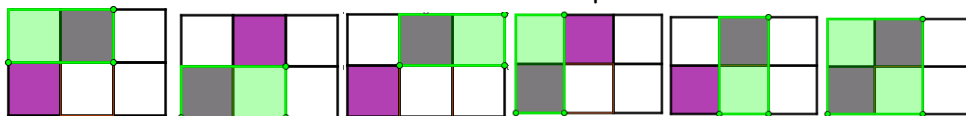


В задача 1 са предложени класически и основни примери. Малко са учениците, които самостоятелно успяват да се справят, но след първия пример рязко скача успеваемостта. Точно това прави задачата полезна както за идентифициране на талантиливи, така и за развитие на всички ученици.

Описанието на решението на 16) може да се направи по различни начини: четири квадрата 1×1 , един квадрат 2×2 , два правоъгълника 2×1 и два правоъгълника 1×2 .



Може да се номерират единичните квадратчета и тогава правоъгълниците горе са 1, 2, 4, 3, 1234, 12,34,13,24. Този начин е подходящ за описване и на решенията на задача 2 с оцветените части на правоъгълник:

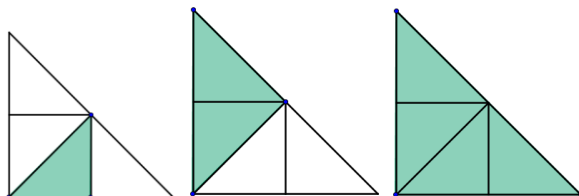


Някои ученици използват букви вместо числа, а има единични случаи, при които се използва описание, близко до описанието в шаха.

Още за задачи като тези можете да намерите в: Чехларова, Т. Преброяване на правоъгълници. сп. Начално образование, бр.4, 2009, с.31-36, ISSN 0204-4951

----- 25 -----

Задачите са аналогични на тези с квадрати. Триъгълниците в първия пример на задача 1 са $4+2+1=7$.



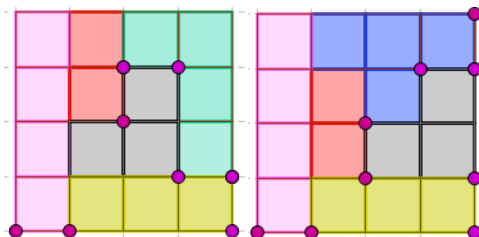
Още за тях можете да прочетете в:

Чехларова, Т. Задачи с фигури в триъгълна мрежа. сп. Начално образование, бр.1, 2010, с.34-41, ISSN 0204-4951

Чехларова, Т. Действия с фигури в триъгълна мрежа В: Научни трудове на ПУ "П. Хилендарски". т.45, кн.2, Методика на обучението, 2008, с.17-22, ISSN 0861-279X

----- 26 -----

При решаване на задачи 1 и 2 може да се използва сборът на единичните квадратчета, който трябва да е квадратно число. Понякога има две възможности, например броят на всички единични квадратчета в пример 4 на задача 2 е 20, следователно не се използва фигура от 4 квадратчета. Има две такива фигури, и в двата случая може да се построи квадрат:



Бележки

Тони Чехларова

МАТЕМАТИЧЕСКИ ИЗСЛЕДВАНИЯ
С ДИНАМИЧНИ КОНСТРУКЦИИ
В НАЧАЛНОТО УЧИЛИЩЕ

Редактор

Йорданка Горчева

Българска, първо издание

2013

Формат 70/100/16

ISBN 978-954-561-309-8