

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE
AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE



РАЗПРОСТРАНЯВА СЕ БЕЗПЛАТНО

<http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/index.htm>

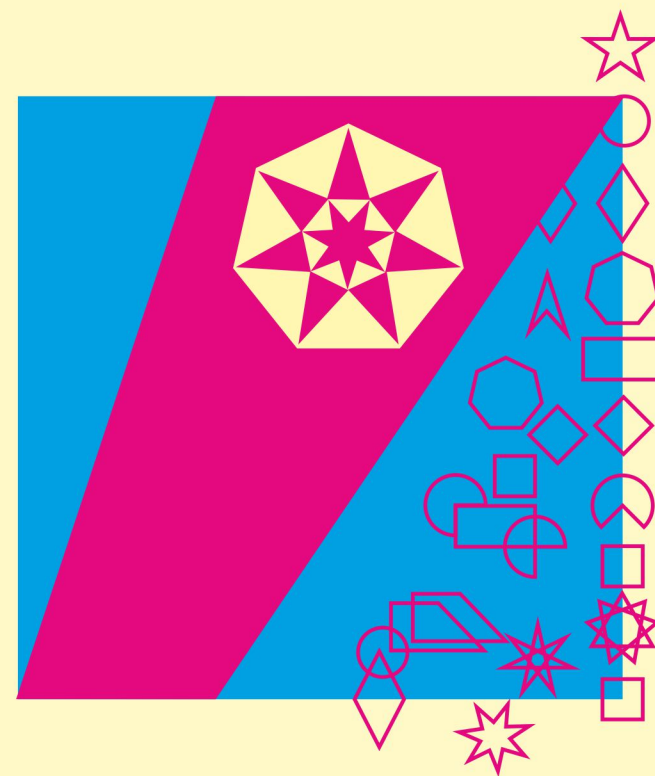


ТОНИ ЧЕХЛАРОВА



ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ

изследвания с динамични конструкции
в 5. и 6. клас



Тони Чехларова

ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ

изследвания с динамични конструкции
в 5. и 6. клас

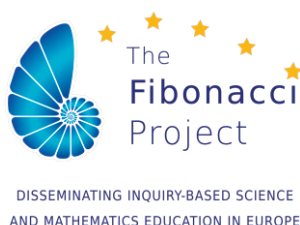


2012

Книгата е издадена с подкрепата на проект „Fibonacci – разпространение на изследователския подход в образованието по математика и природни науки в Европа“



Проектът Fibonacci е получил финансиране от Седма рамкова програма на Европейския съюз. Участник от България е Институтът по математика и информатика на БАН.



<http://www.fibonacci-project.eu/>

Координатор на проекта за България: акад. Петър Кендеров

Съдържанието на книгата не отразява непременно възгледите на Европейската комисия и не включва каквато и да е отговорност от нейна страна.

Автор и художествено оформление: Тони Чехларова

Редактор: Евгения Сендова

Всички права запазени

© 2012

Никоя част от тази книга не може да бъде възпроизвеждана, съхранявана в информационна система или предавана в някаква форма чрез електронни или механични средства, чрез фотокопиране, микрофилми или друг тип запис без писменото съгласие на автора.

ISBN

Съдържание

Предговор.....	5
1. Изследвания с геометрични фигури в 5. клас	7
1.1. Видове триъгълници.....	7
1.2. Екстремални задачи с лице и обиколка на правоъгълник	8
1.3. Успоредник	10
1.4. Трапец	12
1.5. Видове четириъгълници	14
1.6. Лице на триъгълник.	17
1.7. Равнолицеви триъгълници.....	18
1.8. Лице на успоредник	20
1.9. Успоредници	21
1.10. Лице на трапец.....	23
1.11. Лице на делтоид.....	25
1.12. Лице на четириъгълник	26
1.13. Лице на многоъгълник	27
1.14. Равнолицеви многоъгълници	28
1.15. Танграм	29
1.16. Формулата на Пик	30
1.17. Изпъкнали и вдлъбнати четириъгълници.....	32
2. Изследвания с геометрични фигури в 6. клас	34
2.1. Правилен многоъгълник.....	34
2.2. Обиколка и лице на правилен многоъгълник.....	35
2.3. Звезди.....	36
2.4. Дължина на окръжност	38
2.5. Полуокръжности	40
2.6. Лице на кръг.....	42
2.7. Декартова координатна система	44
2.8 Точки в Декартова координатна система	46
2.9 Дължини на някои отсечки в Декартова координатна система	48
2.10 Многоъгълници в Декартова координатна система	49
2.11 Ос на симетрия	50
3. Към учителя	51

Някои икони от Geogebra

икона	значение	
	преместване	Move
	точка	Point
	сечение на два обекта	Intersect Two Objects
	среда на отсечка	Midpoint
	права през две точки	Line through Two Points
	перпендикулярна права	Perpendicular Line
	успоредна права	Parallel Line
	многоъгълник	Polygon
	правилен многоъгълник	Regular Polygon
	окръжност с център през точка	Circle with Centre through Point
	окръжност с център и радиус	Circle with Centre and Radius
	ъгъл	Angle
	Разстояние, дължина, обиколка	Distance, Length, Perimeter
	лице на фигура	Area
	премества изгледа	Move Graphics View
	плъзгач	slider
	изтрива	Delete
	опреснява изгледа	Refresh Views
	вмъква картина	Insert Image
	връзка между два обекта	Relation between Two Objects

Предговор

Драги читатели,

в ръцете си държите *първата лястовичка* от серия динамични учебни среди, които ще ви помогнат да навлезете в магичния свят на математиката като истински изследователи. Да се изучават и преподават математически теми в изследователски дух не е нещо непознато за българската образователна система, но той има шанса да навлезе в нея по-осезаемо днес поради участието на България (чрез Института по математика и информатика към Българската академия на науките) в европейския проект Фибоначи (<http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/>) и със специалното съдействие на Университета в Байройт (отправен център в проекта). В резултат на този проект българският екип с координатор акад. Петър Кендеров разработва динамични сценарии на теми, подходящи за ученици от 1-12. клас. Акцентът при работа с тях е върху експерименти с динамични геометрични конструкции, при които учениците наблюдават и откриват закономерности, формулират хипотези, материализират ги с разработени от екипа динамични модели и ги обосновават с помощта на учителя. Естествено ролята на учителя вече не е „да проповядва факти“, „да демонстрира готови доказателства“, а да стимулира учениците си да действат, да генерират идеи, да влизат в кожата на професионални математици. Изследователският стил ще бъде решаващ за тях не само в изучаването на математиката, а за цялостното им израстване като знаещи и творящи млади хора, които няма да се страхуват да атакуват отворени проблеми.

Към момента на издаването на *Геометрични фигури* българският екип на Фибоначи е провел семинари в повече от 15 града с около 900 учители. Но истинският ефект от популяризиране на изследователския подход в образованието на по-широк фронт може да дойде именно от вас – хората, които бихте се запалили не само да опитате атмосферата на динамичната математика, а да се потопите в нея (в ролята на учители, ученици, а защо не и на математици-изследователи). Това би дало шанс на много повече хора да усетят истинския дух на математиката – област, която е на границата между науката и изкуството и която разкрива нов свят на красота, хармония, логика, изненади и ако щете – приключението да откриваш и научаваш нови неща цял живот...

От редактора

Дискът към книгата съдържа темите с динамични конструкции.
Необходимо е да е инсталирана Java (свободен продукт).

<http://www.java.com/en/download/manual.jsp>

Препоръчваме инсталиране на Geogebra (свободен продукт).

<http://www.geogebra.org/cms/en/installers>

Можете да работите с динамичните файлове и на адрес

<http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm>

(12.2011)

Изказвам благодарност към координатора на проект Fibonacci за България акад. Петър Кендеров, чиито идеи са реализирани в книгата, както и на Евгения Сендова за помощта в процеса на създаването ѝ.

От автора

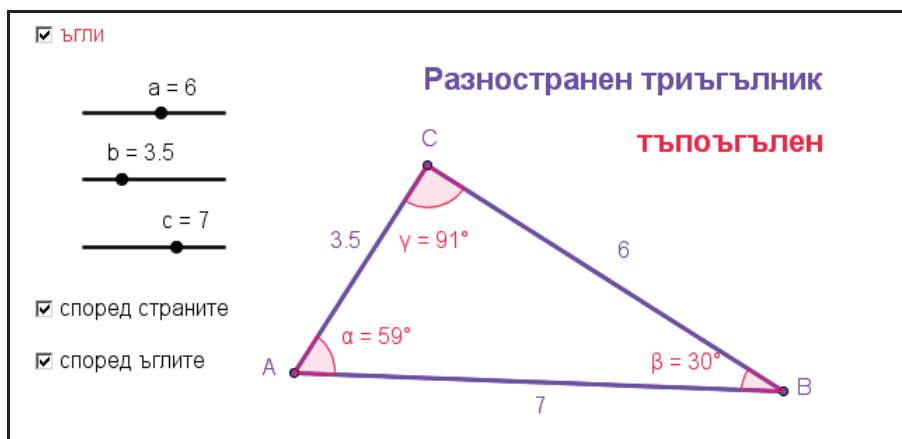
1. Изследвания с геометрични фигури в 5. клас

1.1. Видове триъгълници

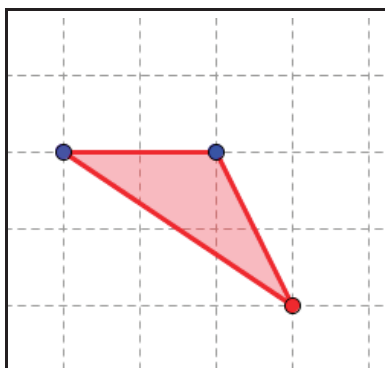
Трите ми страни
са равни.

А на мен трите ми
ъгъла са равни.

1. Какъв е видът на триъгълника според страните и според ъглите?
Използвай плъзгачите за получаване на следващ триъгълник.



2. Премести червения връх на триъгълника така, че да стане равнобедрен правоъгълен. Колко са възможностите?



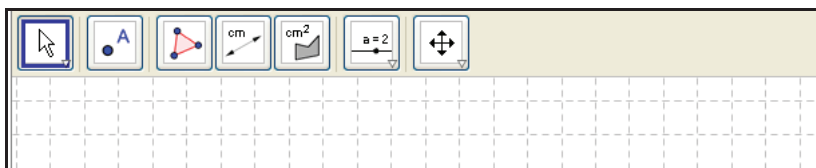
Забележи, че трябва да са изпълнени едновременно две условия.

1.2. Екстремални задачи с лице и обиколка на правоъгълник

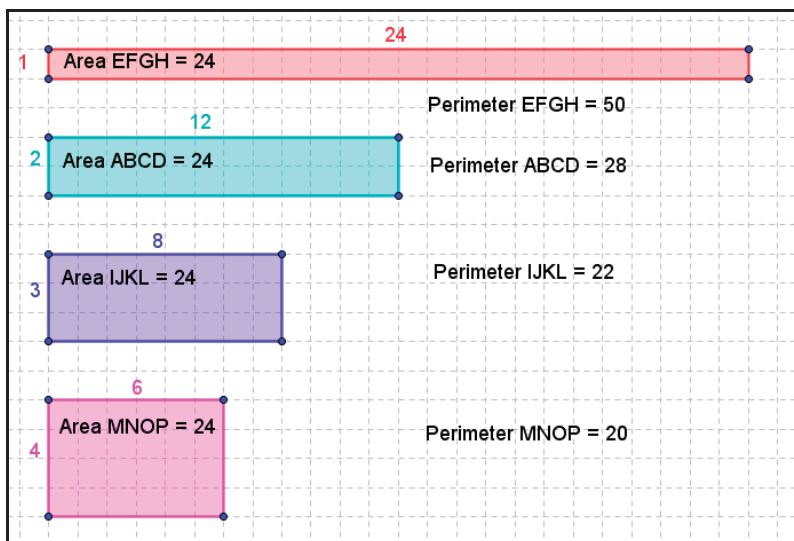
От правоъгълниците с обиколка 32 аз имам най-голямо лице!

От правоъгълниците с лице 64 аз имам най-малка обиколка!

1. Построй правоъгълниците с лице **24** кв. ед. с целочислени дължини на страните. Кой от тях има най-малка обиколка?



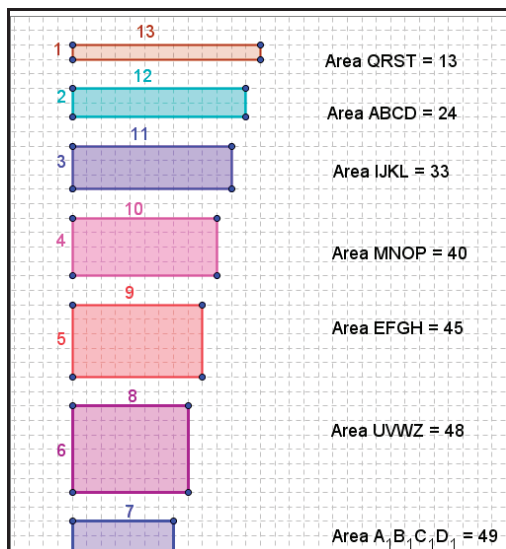
Построй правоъгълниците. Използвай бутона за дължина на отсечка  и за лице на фигура . Подреди правоъгълниците според обиколката им.



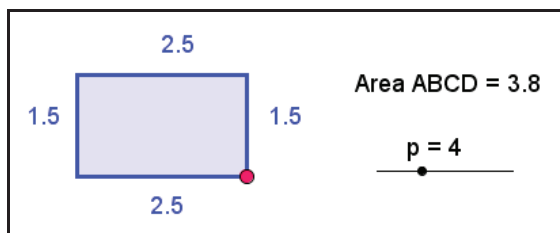
2. Кой от правоъгълниците с лице **36** кв. ед. и с целочислени дължини на страните има най-малка обиколка?

Направи предположение кой от правоъгълниците с лице **4900** кв. ед. и с целочислени дължини на страните има най-малка обиколка?

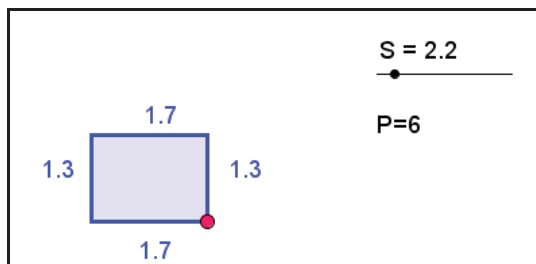
3. Построй правоъгълниците с обиколка **20** ед. с целочислени дължини на страните. Кой от тях има най-голямо лице?



Провери кой от правоъгълниците с полуобиколка **p** има най-голямо лице. За целта движи червената точка. Провери и за други стойности на **p**, като използваш плъзгача.



Провери кой от правоъгълниците с лице **S** има най-малка обиколка. За целта движи червената точка.



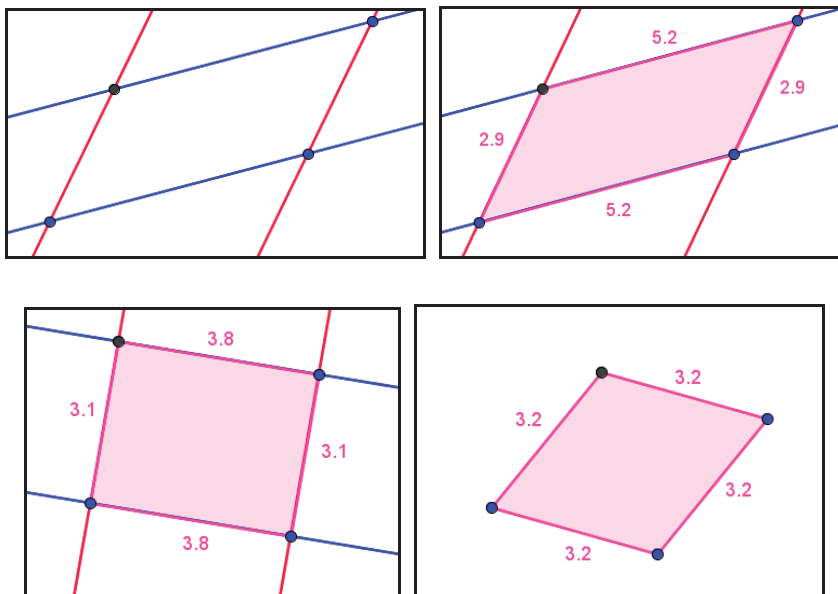
Провери и за други стойности на **S**.

1.3. Успоредник

Моите страни са
успоредни!

А моите срещуположни
- равни!

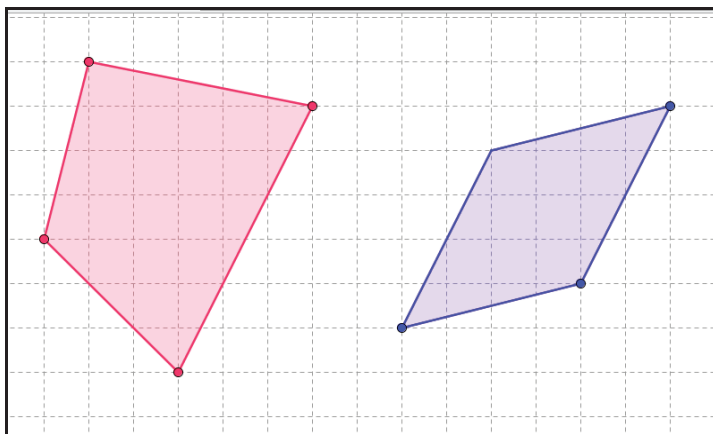
1. При пресичането на две двойки успоредни прави се получава успоредник. Движи някоя от сините точки и наблюдавай!



- Сравни дължините на страните на успоредника.
- Вярно ли е, че правоъгълникът е успоредник? обоснови. Покажи.
- Вярно ли е, че ромбът е успоредник? Вярно ли е, че правоъгълникът е ромб? Вярно ли е, че квадратът е ромб? обоснови. Покажи.

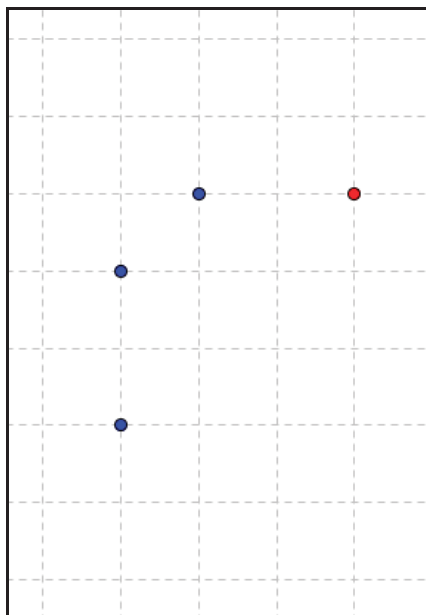
2. Намери обиколката на успоредника. Запиши формула за обиколка на успоредник. Построй пет успоредника с обиколка 16 см.

3. Премести върхове на червения четириъгълник, за да се получи успоредник.



Премести върхове на синия успоредник, за да се получи: правоъгълник; квадрат; ромб; правоъгълник, който не е квадрат.

4. Премести червената точка така, че четирите точки да са върхове на успоредник.



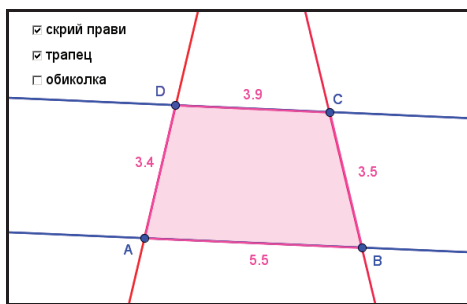
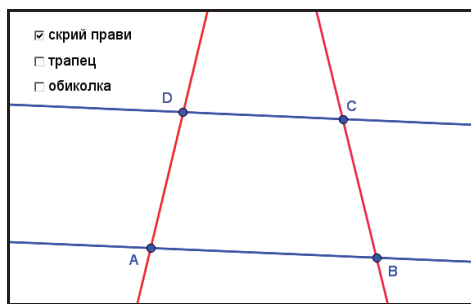
Колко са възможностите?

1.4. Трапец

Успоредните ми страни са различни. Но бедрата ми са равни!

Четирите ми страни са различни. Но пак имам два равни ъгъла.

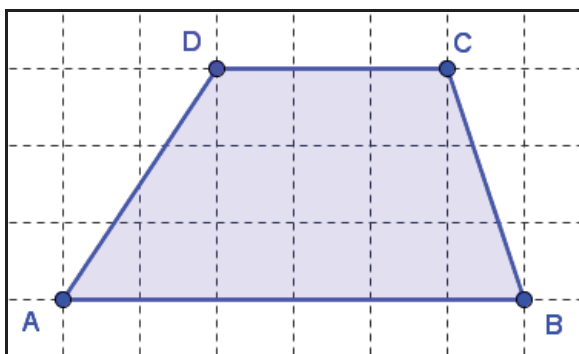
1. Сините прави са успоредни, а червените - не. Движи някоя от сините точки и наблюдавай трапеца.



- Възможно ли е основите на трапеца да са равни?
- Възможно ли е бедрата на трапеца да са равни?
- Преобразувай с преместване на върхове трапеца до равнобедрен.

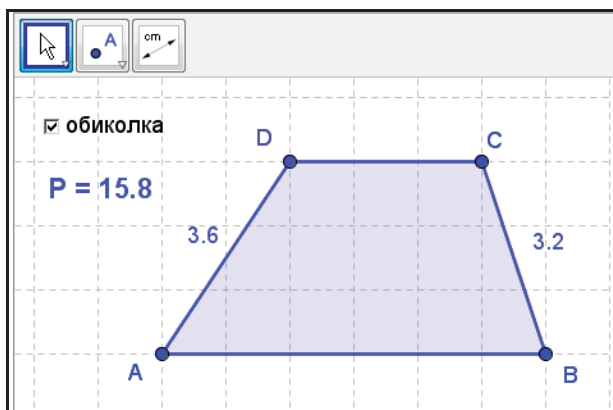
2. Намери обиколката на трапеца.

3. Премести върхове на трапеца, за да се получи:



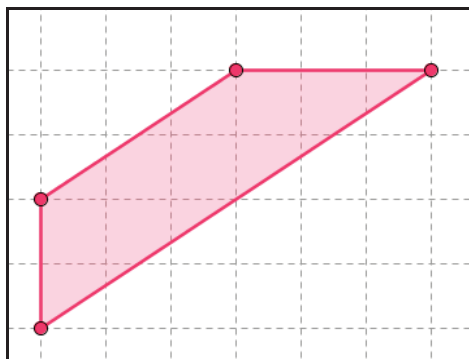
- равнобедрен трапец;
- правоъгълен трапец.

Намери обиколката на трапеца. Можеш да използваш квадратната мрежа и бутона за дължина на отсечка .



За нов пример премести върхове. Влез в режим на движение чрез .

4. Трапец ли е построенят четириъгълник?

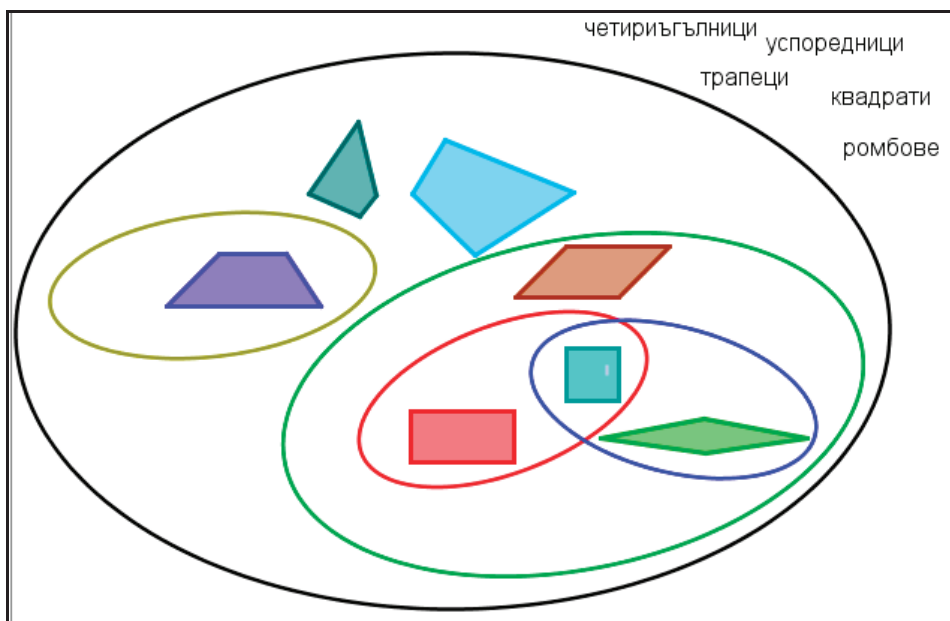


Построй трапеци, чиито основи не са върху линии от квадратната мрежа.

1.5. Видове четириъгълници

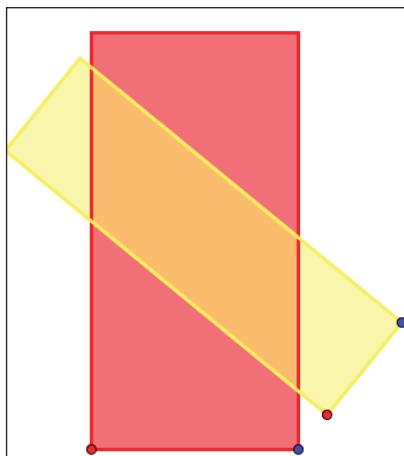
Мога да имам равни страни, но не съм квадрат.
Мога да имам прав ъгъл, но не съм правоъгълник. Имам успоредни страни, но не съм успоредник. Какъв четириъгълник съм?

Постави имената в множествата.



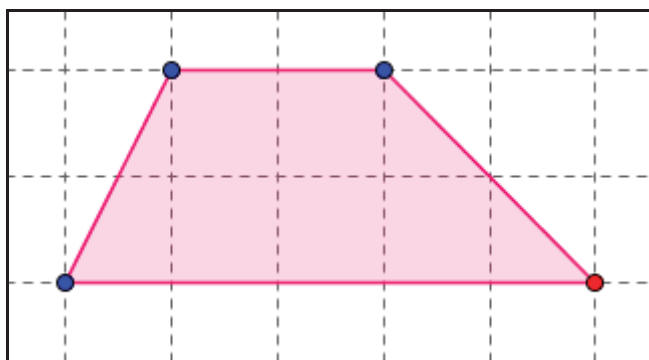
1. Със синята точка въртиш, а с червената преместваш правоъгълник. С плъзгачи променяш измерение. Така разположи двата правоъгълника, че сечението им да е:

- правоъгълник;
- успоредник;
- трапец;
- триъгълник;
- ромб;
- квадрат;
- равнобедрен триъгълник;
- правоъгълен трапец;
- равнобедрен трапец.

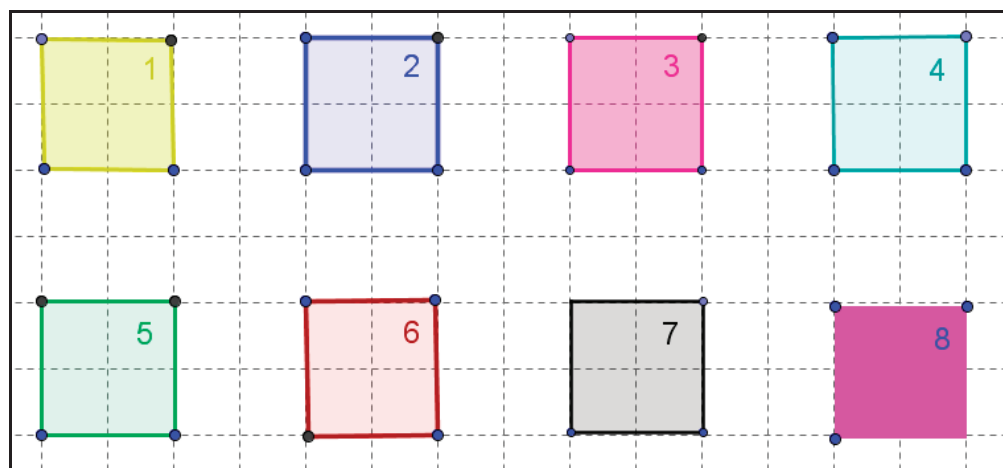


2. Премести червената точка във възел на квадратната мрежа, за да получиш:

- успоредник;
- равнобедрен трапец.



3. Кои от квадратите долу са динамични, т.е. остават квадрати при преместване на подвижните върхове.

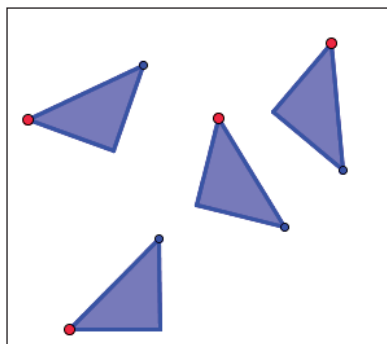


Какви динамични видове четириъгълници са останалите?

4. С четирите триъгълника образувай:

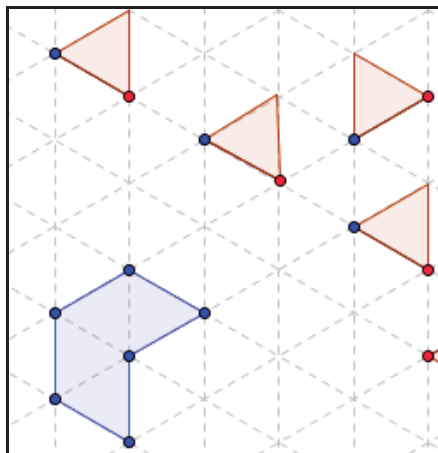
- успоредник;
- трапец;
- триъгълник;
- ромб.

С червената точка въртиш, а със синята - преместваш триъгълник.

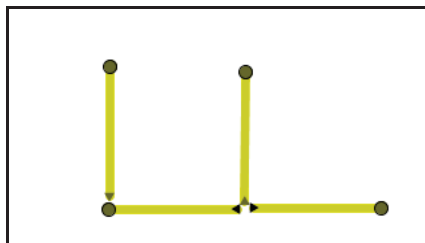


5. Колко единични триъгълничета най-малко трябва да добавиш към синята фигура, за да получиш:

- успоредник;
- трапец;
- триъгълник?



6. Премести само една кибритена клечка, за да получиш квадрат.



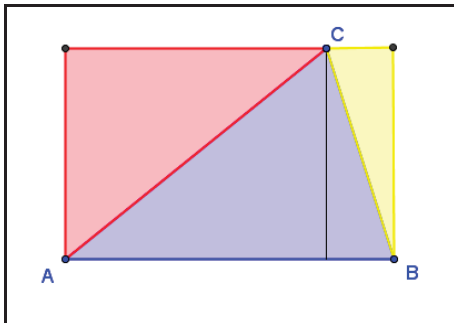
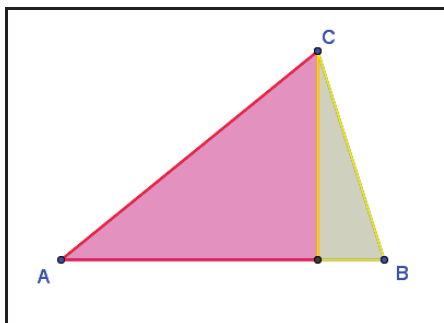
7. Изобрази с ръце всеки от изучените видове четириъгълници.

Можеш да използваш уреди.

Включи и твои приятели - заедно представете някои от изучените фигури.

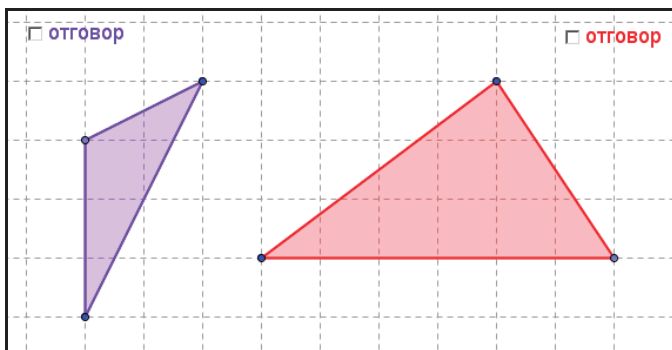
1.6. Лице на триъгълник

1. Като използваш конструкцията, открий формула за лице на триъгълник.



2. Дължината на страната на малкото квадратче е 1 см.

- Намери лицето на триъгълника.



- Построй триъгълник с лице: 14 кв. см, 8 кв. см, 10,5 кв. см, 3,5 кв. см.
- Построй шест различни триъгълника с основа 5 см и лице 10 кв. см.

3. Попълни таблиците.

a	7	7	7	7	7
h_a	1	2	4	8	16
S					

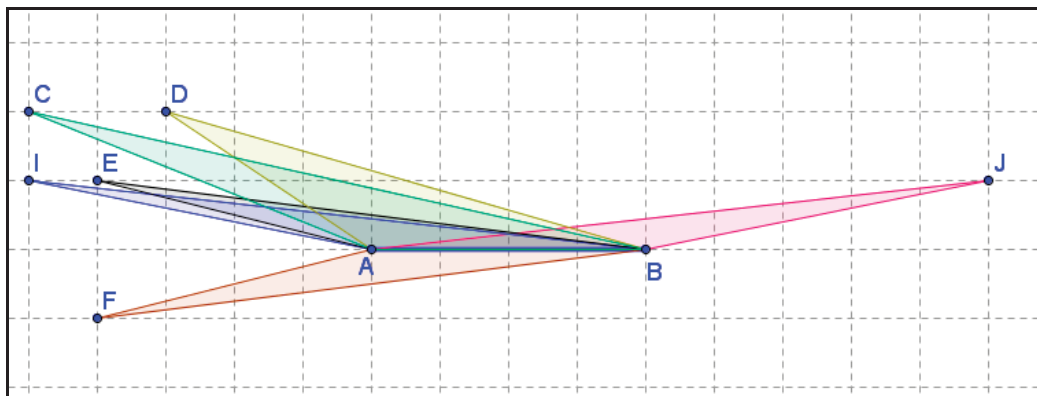
a	1	2	4	8	16
h_a	6	6	6	6	6
S					

Формулирай хипотези.

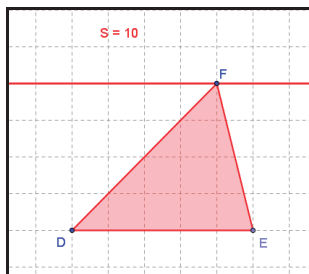
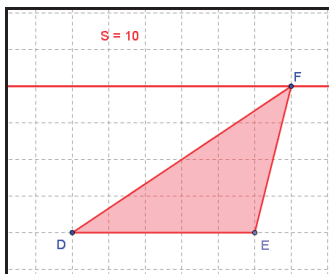
1.7. Равнолицеви триъгълници

И без да се меря, знам, че имам лице като твоето.

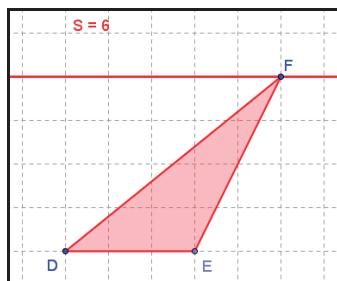
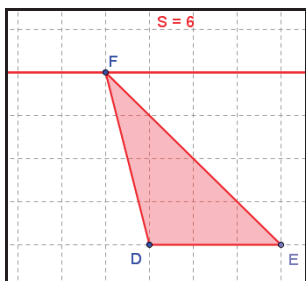
- 1.** Премести точките C, D, E, F, J, I , така, че лицето на всеки от триъгълниците с връх една от тези точки и страна AB да е равно на 6. Как са разположени точките C, D, E, F, J, I ? Направи хипотеза.



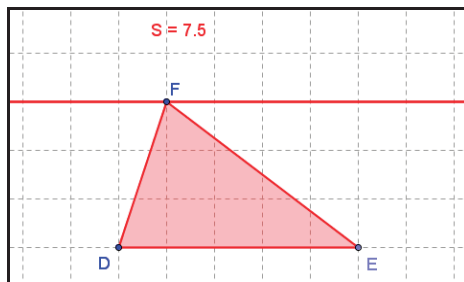
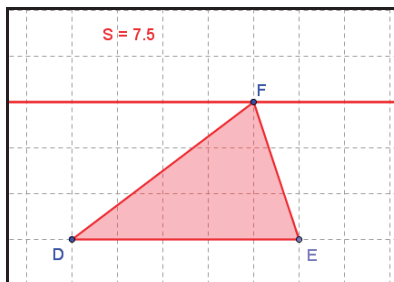
- 2.** Наблюдавай лицето на триъгълника при движение на връх върху права, успоредна на страна.



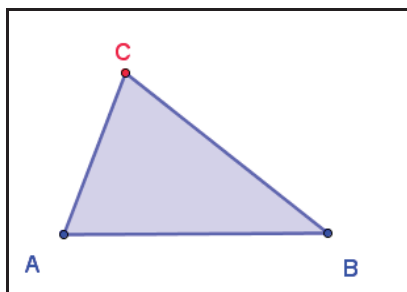
Промени основата,



също и правата, успоредна на основата. Направи хипотеза.

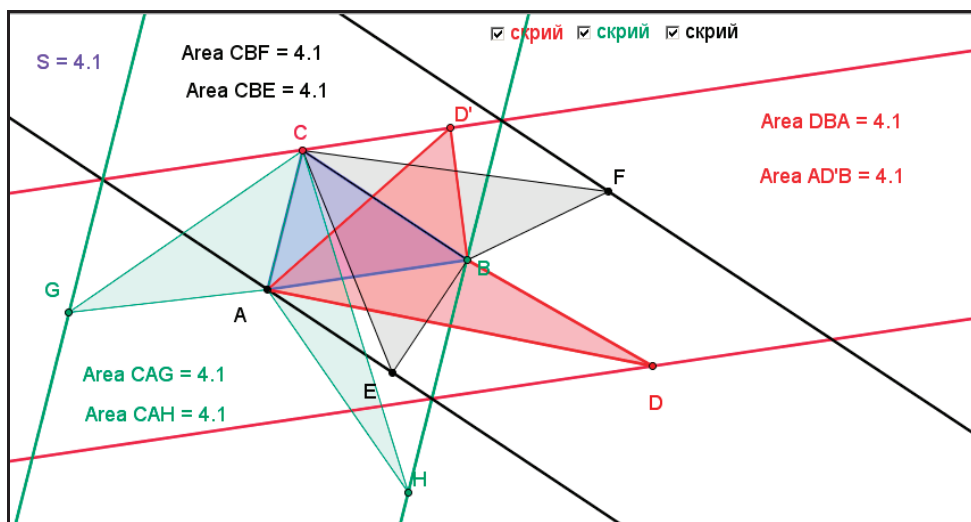


3. Къде можеш да построиш точка D така, че лицата на триъгълниците ABC и ABD да са равни?



Премести някои от точките A, B или C за следващ пример.

4. Защо са равни лицата на построените триъгълници?



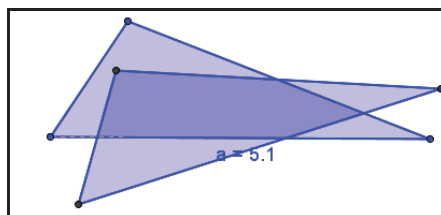
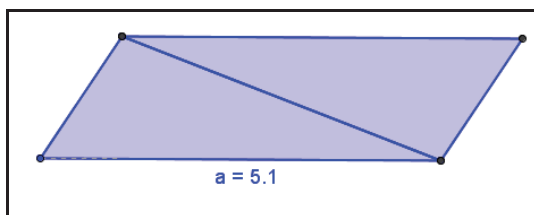
За удобство можеш да скриваш триъгълници.

1.8. Лице на успоредник

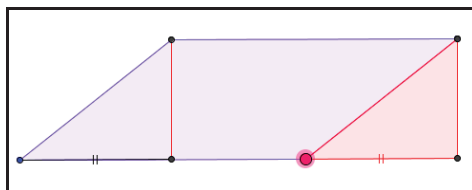
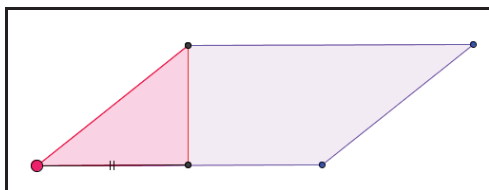
Щели да ме делят на
два триъгълника.

А мен - да ме
преобразуват в
правоъгълник.

1. Използвай конструкциите и открий формула за лице на успоредник.

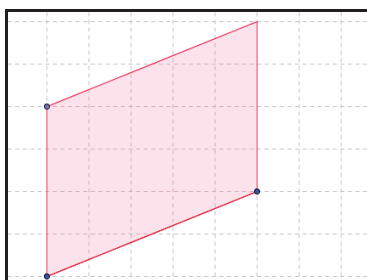


Успоредникът се преобразува в два еднакви триъгълника. На колко са равни неговата страна и височината към нея?



Успоредникът се преобразува в правоъгълник. На колко са равни измеренията на правоъгълника?

2. Дължината на малкото квадратче е 1 см.



- Намери лицето на успоредника.
- Построй успоредник с лице 12 кв. см, 16 кв. см, 4 кв. см, 6 кв. см.
- Построй пет успоредника с лице 8 кв. см.

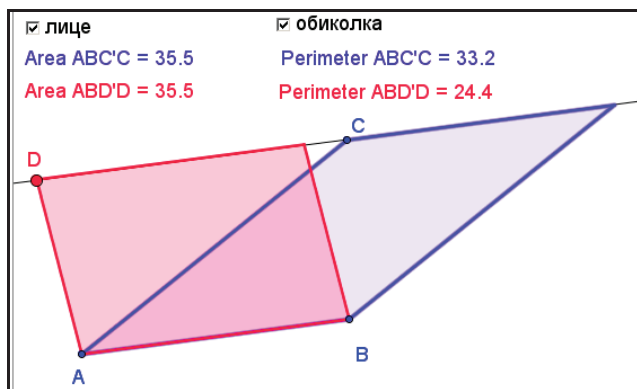
1.9. Успоредници

Имаме една и съща основа и сме еднакво високи.

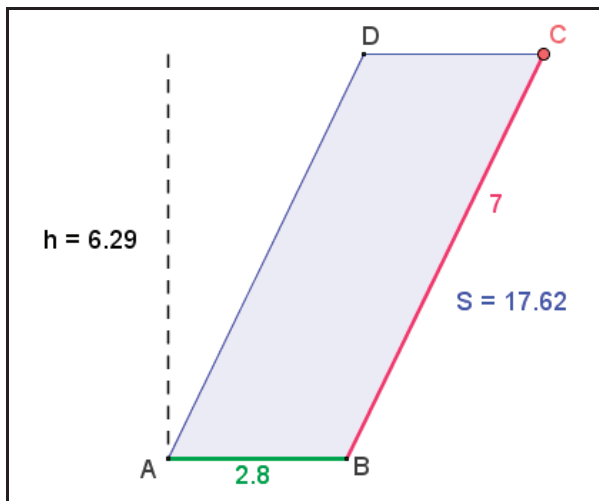
Лицата ни са равни.

Но моята обиколка е най-малка.

1. Наблюдавай лицата на червените успоредници, които се получават при движение на D върху черната права. Тя е успоредна на AB. Направи предположение. Кой от тези успоредници има най-малка обиколка?

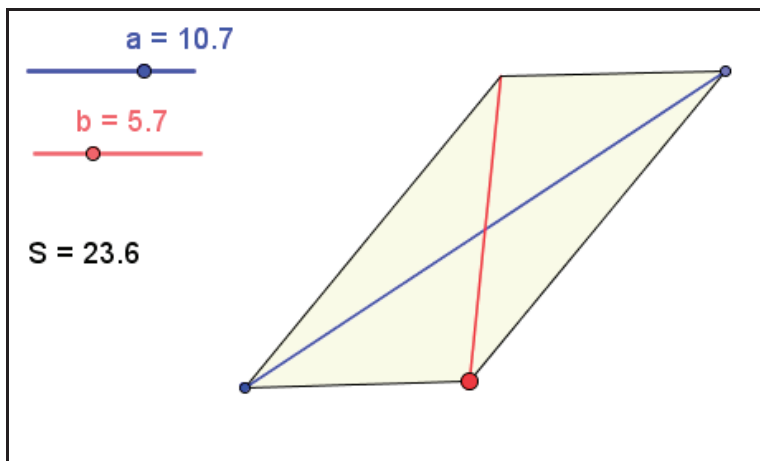


2. Кой от успоредниците с измерения a и b има най-голямо лице?



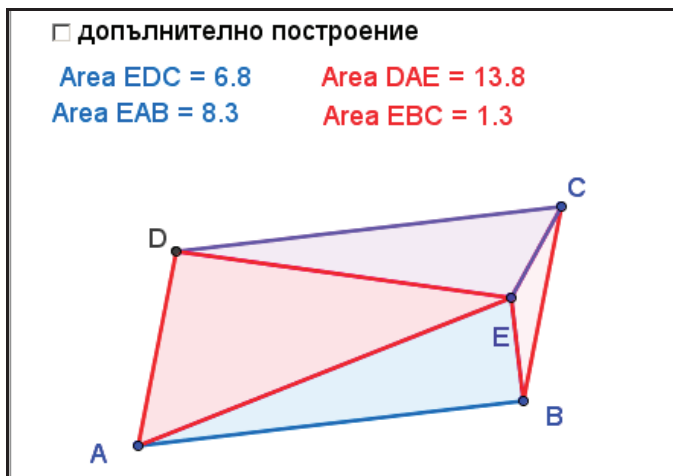
Направи предположение и провери опитно, като движиш точка C.

3. Кой от успоредниците с диагонали a и b има най-голямо лице?



Направи предположение и провери опитно. Обоснови.

4. Точката E е вътрешна за успоредник $ABCD$. Сравни сбора на лицата на червените триъгълници и на сините триъгълници.

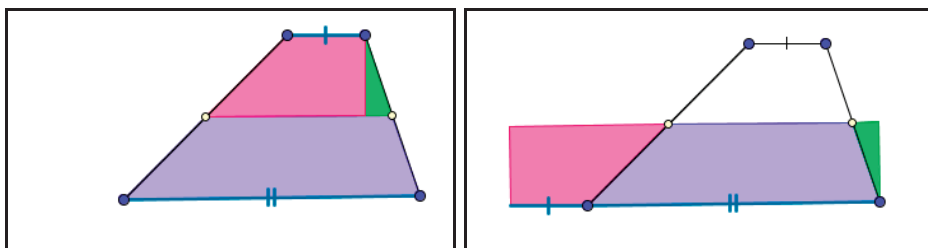


Направи предположение. Обоснови.

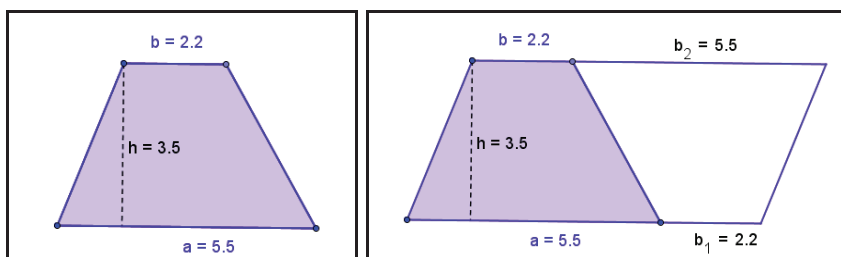
1.10. Лице на трапец

А можеше само да се
построи единият ми
диагонал!

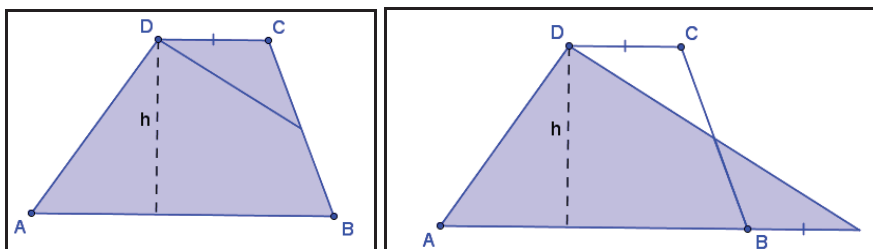
1. Открий формула за лице на трапец. Използвай трите идеи за преобразуване на трапец до фигури, на които можеш да намираш лицето.



Трапецът се преобразува в правоъгълник. На колко са равни измеренията на правоъгълника?

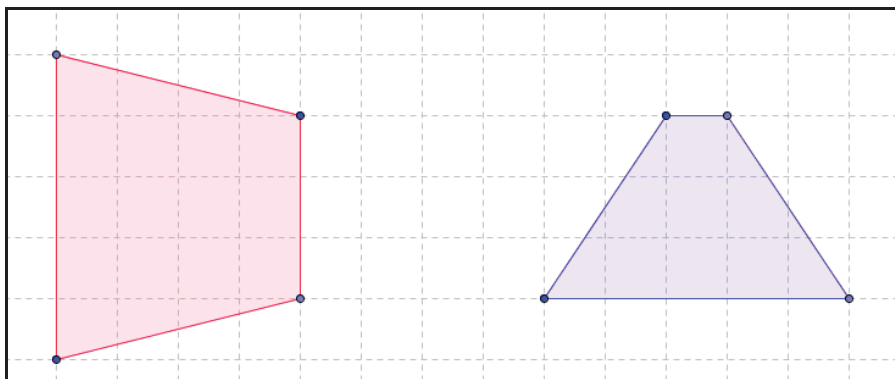


Трапецът се преобразува в успоредник. На колко са равни неговата страна и височината към нея?



Трапецът се преобразува в триъгълник. На колко са равни неговата страна и височината към нея?

2. Намери лицето на трапеца (дължината на страната на малкото квадратче е 1 см).

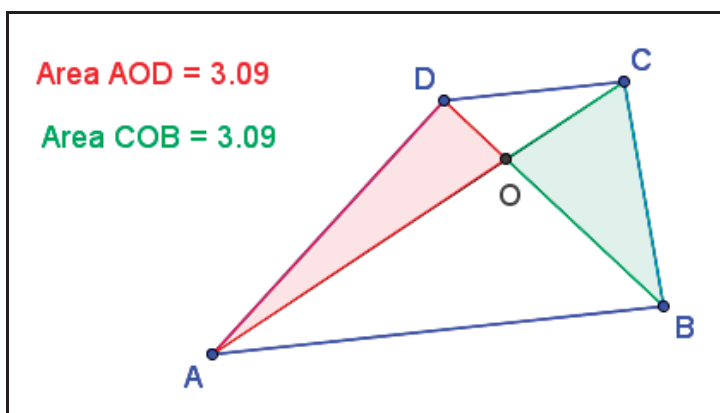


3. Попълни таблицата и формулирай хипотеза.

	Трапец				
a	7	7	7	7	7
b	3	3	3	3	3
h	1	2	4	8	16
S					

4. Построй шест равнолицеви трапеца с равни основи. Направи хипотеза кой от трапеците с равни основи и лица има най-малка обиколка?

5. Точка O е пресечната точка на диагоналите AC и BD на трапец с основи AB и CD. Сравни лицата на триъгълниците AOD и BOC.



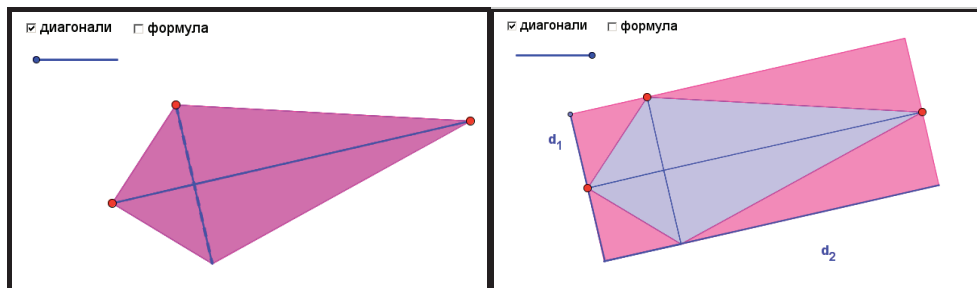
Направи хипотеза. Обоснови.

1.11. Лице на делтоид

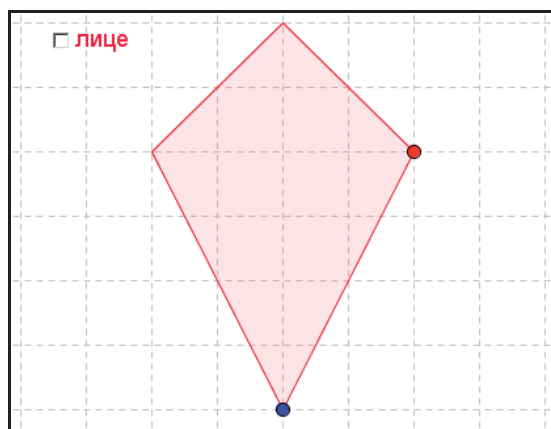
Твоите диагонали са с дължини като моите.

Но на мен малкият диагонал разполовява големия.

1. Използвай конструкцията, за да откриеш формула за лице на делтоид.



2. Намери лицето на делтоида, ако дължината на страната на малкото квадратче е 1 см.



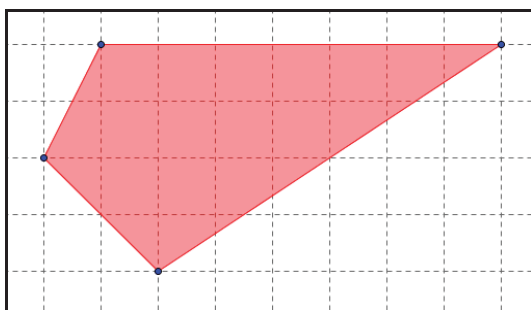
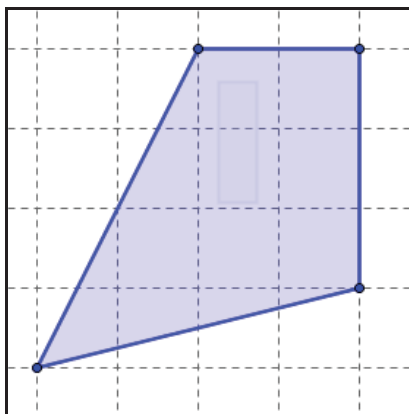
3. Построй няколко различни равнолицеви делтоида.

1.12. Лице на четириъгълник

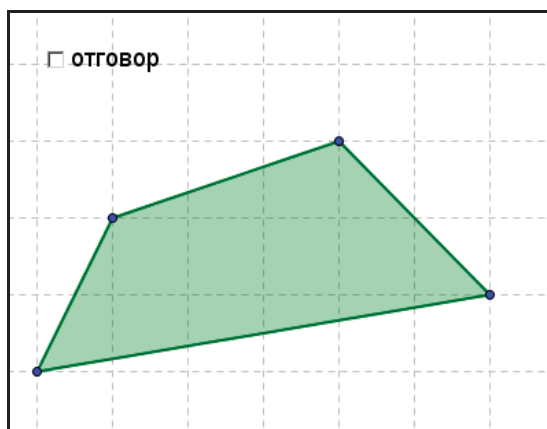
Разязаха ме на триъгълници!

А мен ме опаковаха
в правоъгълник!

1. Намери лицето на четириъгълника. За следващ пример използвай плъзгача.



Опиши стъпките за намиране на лице на произволен четириъгълник.



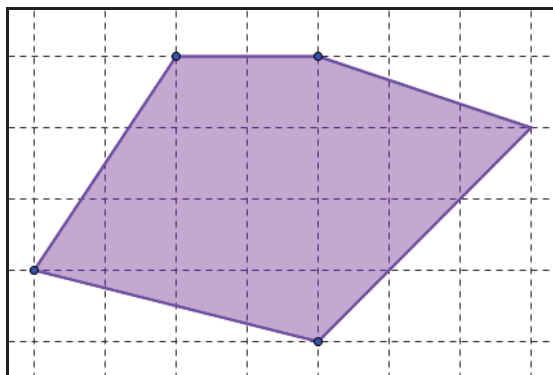
Премести точки за нов пример.

1.13. Лице на многоъгълник

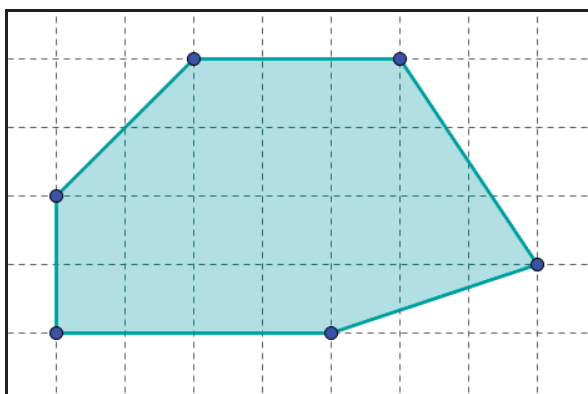
Имаме избор!

Колко е лесно, когато
удобният начин е един!

1. Намери лицето на многоъгълника.



Опиши стъпките за намиране на лице на произволен многоъгълник.



Премести точки за нов пример.

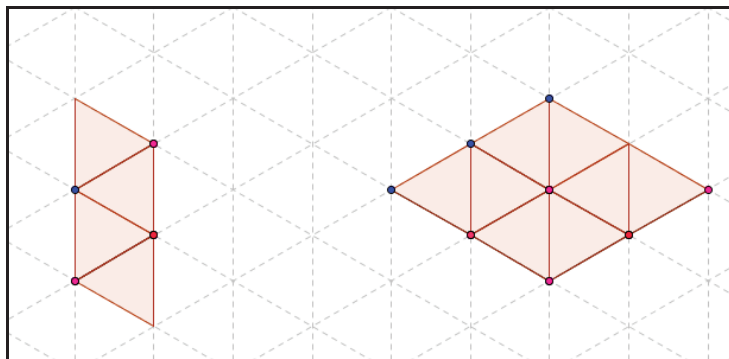
1.14. Равнолицеви многоъгълници

Формите ни са
различни!

Но лицата ни са
равни!

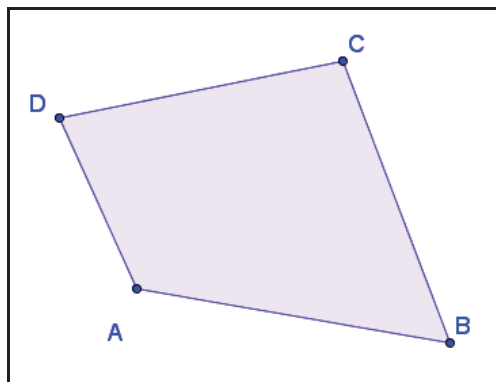
1. С преместване на единично триъгълниче преобразувай:

- успоредника в триъгълник;
- ромба в трапец.



Сравни лицата.

2. Построй триъгълник, равнолицев на четириъгълника.



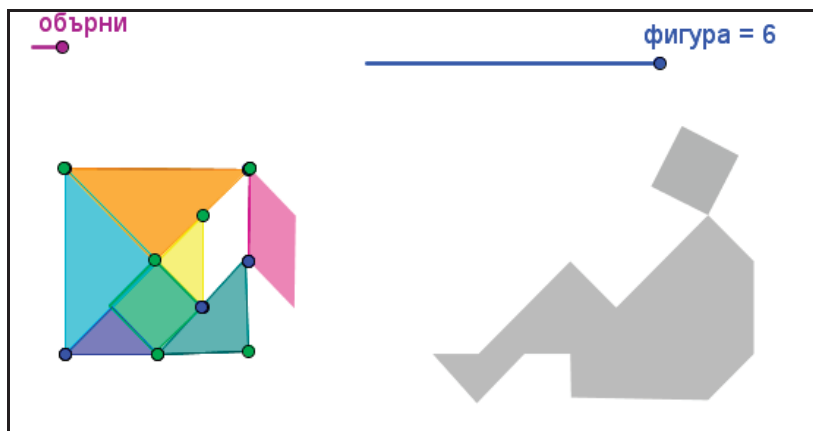
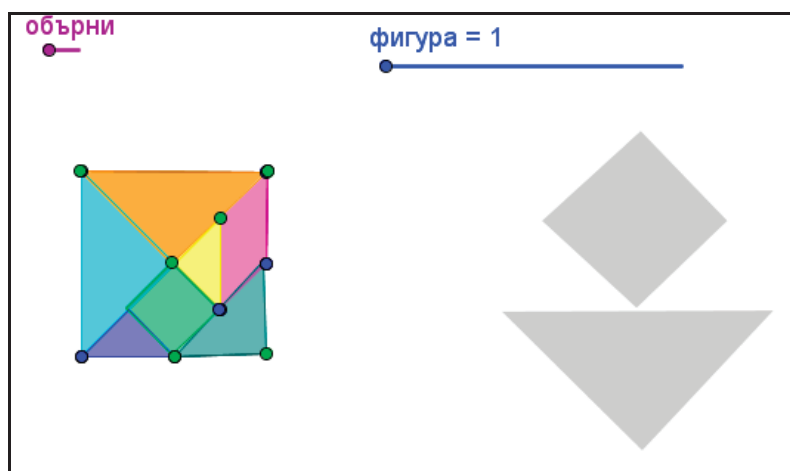
3. Построй триъгълник, равнолицев на петоъгълника.

1.15. Танграм

При теб липсва
една плочка!

Нали ти си
идеална!

Танграм е китайска игра, която се състои от седем части, наречени "танове". С тях могат да се образуват много фигури. Провери въображението си с танграм!



Състави свои фигури с тановете.

1.16. Формулата на Пик

Лицето ми е равно на 5.
Възлите по контура ми са 12.

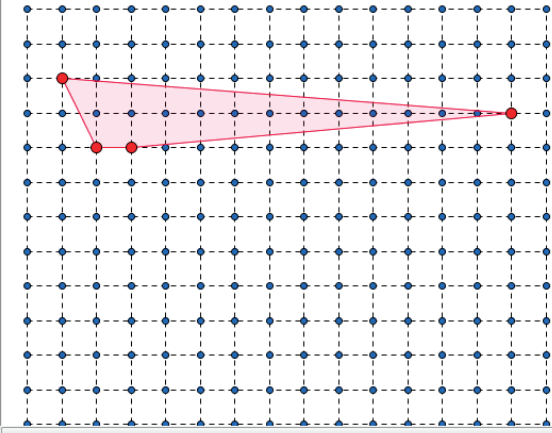
Лицето ми е минимално.

През 1899 г. австрийският математик Пик намира формула за лицето на многоъгълник с върхове във възлите на квадратна мрежа. Опитай се да преоткриеш тази формула.

1. Има връзката между броя на възлите **k** по контура, броя на възлите **v** вътре в многоъгълника и лицето му **S**.

Като използваш квадратната мрежа, попълни таблицата.

☐ помощ 
☐ формула

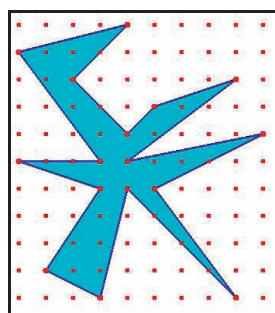
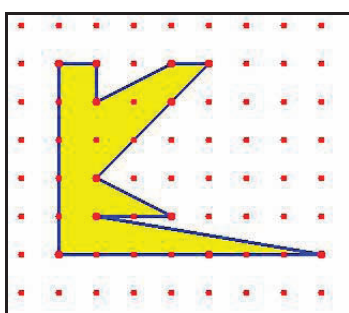
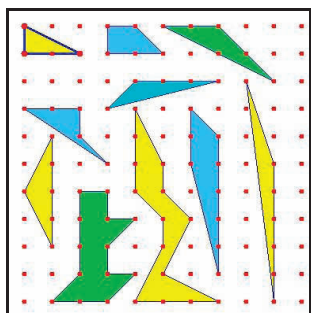


	A	B	C
1	k	v	лице
2	4	12	
3	4	11	
4	4	10	
5	4	9	
6	4	8	
7	5	7	
8	5	6	
9	5	5	
10	5	4	
11	5	3	
12	8	2	
13	7	2	
14	6	2	
15	5	2	

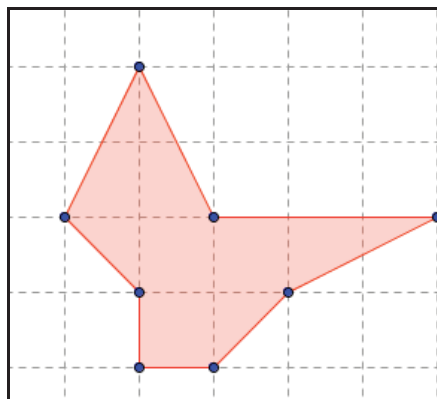
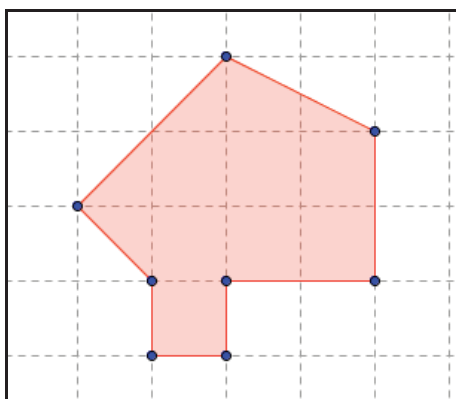
Готово

Наблюдавай данните и открий формулата.

2. Намери лицето на всяка от фигурите.



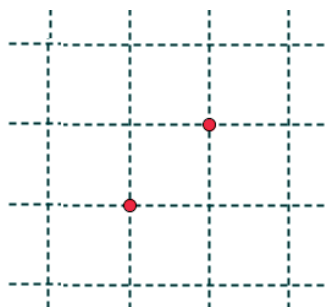
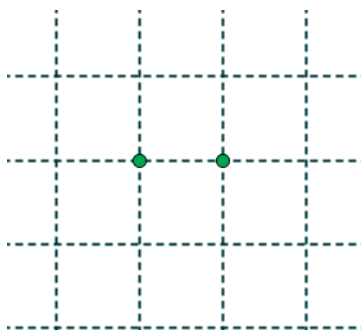
Потренирай!



Премествай точки за нови примери.

3. В квадратната мрежа малкото квадратче е с дължина на страната 1 см.

- Построй триъгълници с лице 0,5 кв. см.
- Дадени са два върха на триъгълник с лице 0,5 кв. см. Построй третия връх.



Опиши всички възможности.

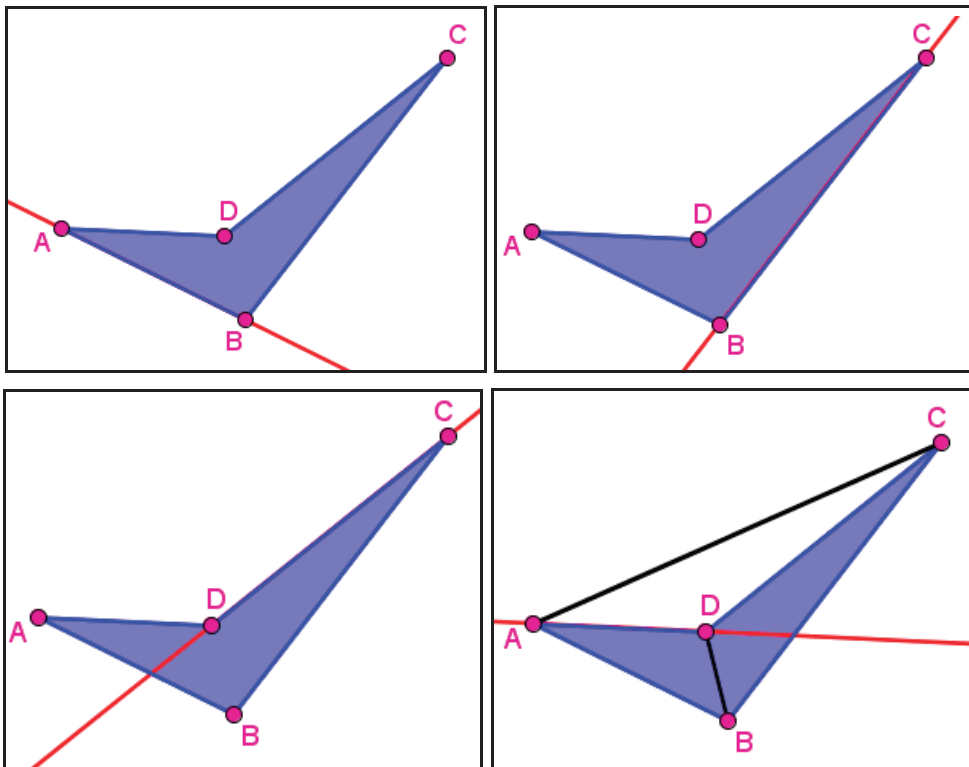
1.17. Изпъкнали и вдлъбнати многоъгълници

Да си премерим
страните.

Я си виж първо
диагонала!

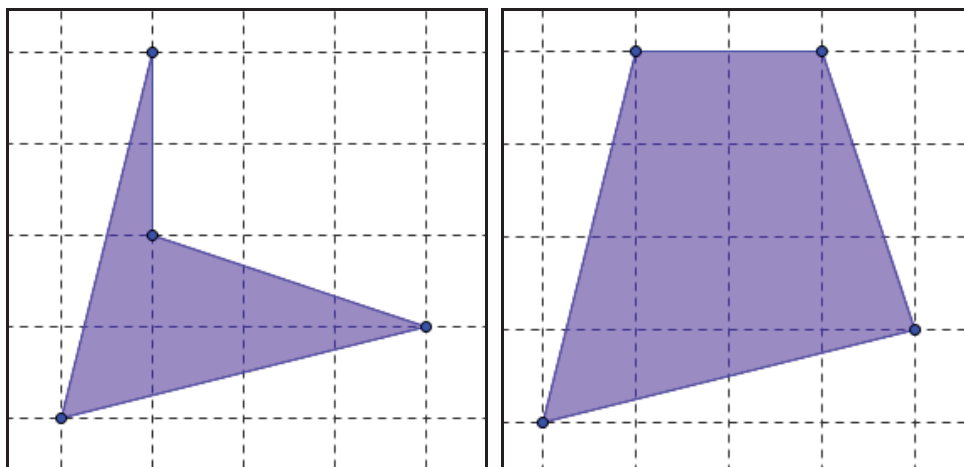
1. Как са разположени диагоналите на четириъгълника?

- Как е разположен четириъгълникът спрямо правите, минаващи през всяка от страните му.

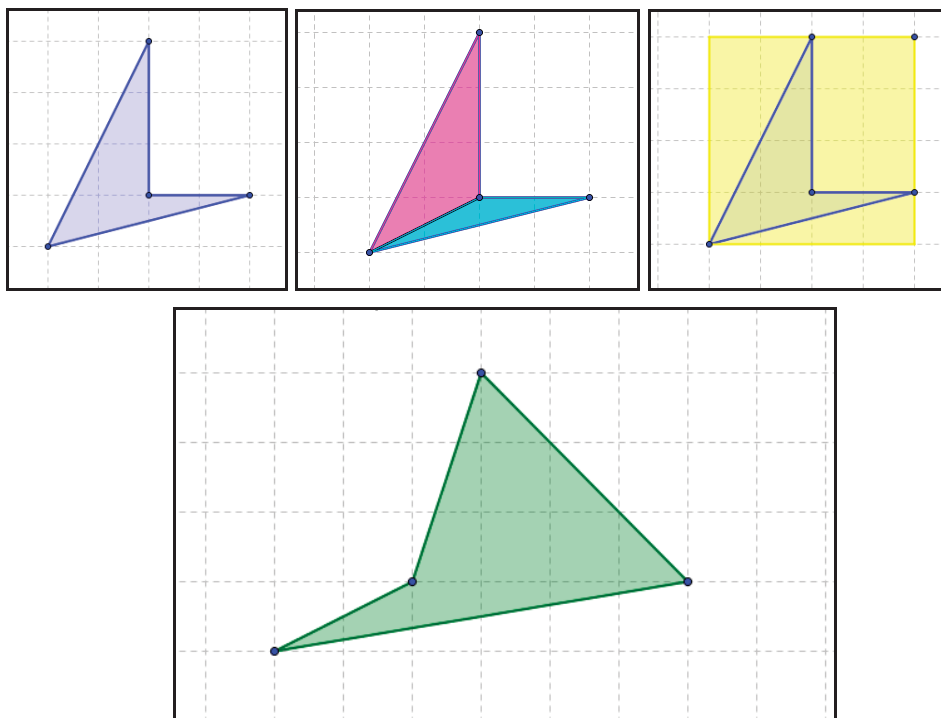


- С преместване на върховете получи още няколко такива четириъгълника и провери и за тях.

- Сравни четириъгълниците.



2. Намери лицето на четириъгълника.



Премествай точки за следващ пример.

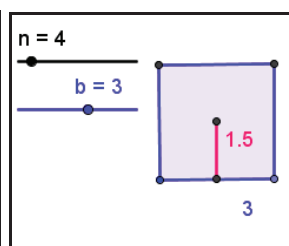
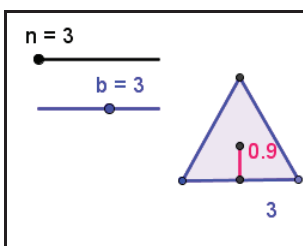
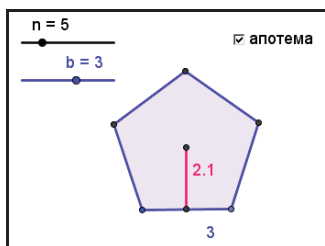
2. Изследвания с геометрични фигури в 6. клас

2.1. Правилен многоъгълник

Аз съм правилен четириъгълник!

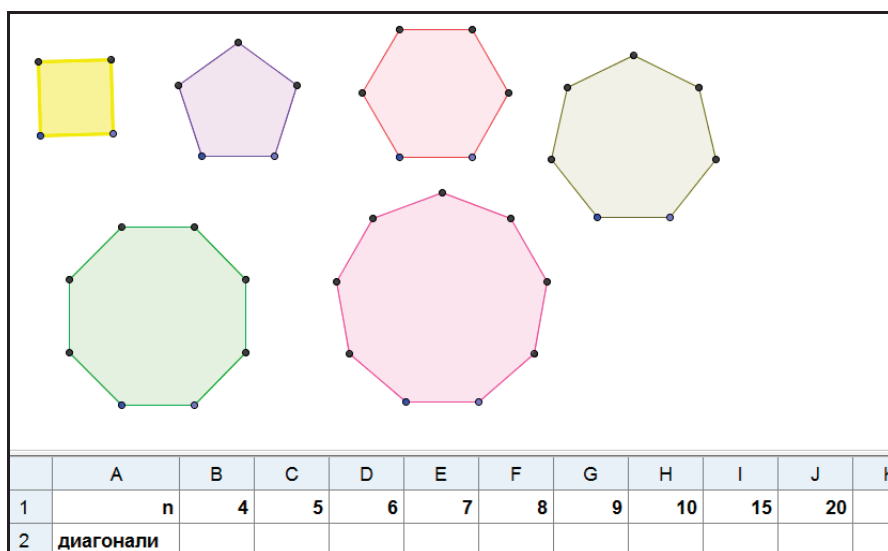
А аз съм само квадрат.

1. Движи плъзгачите и наблюдавай фигурите. Какво е общото между тях?



- Какво е другото име на правилния триъгълник?
- А на правилния четириъгълник?
- Защо ромбът не е правилен четириъгълник?

2. Колко са диагоналите на правилен n -ъгълник за:
 $n = 3$; $n = 4$; $n = 5$; $n = 6$; $n = 7$; $n = 8$; $n = 9$?



Открий закономерност и направи предположение за броя на диагоналите на правилен 20-ъгълник.

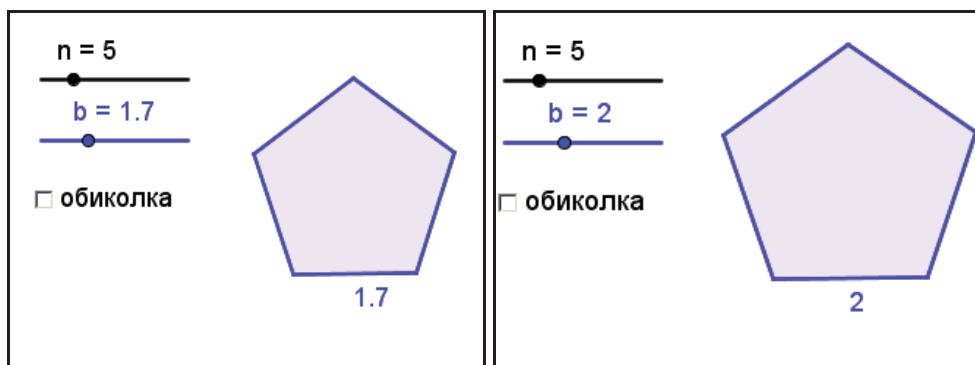
2.2. Обиколка и лице на правилен многоъгълник

Обиколката ми е пет пъти по-голяма от страната ми.

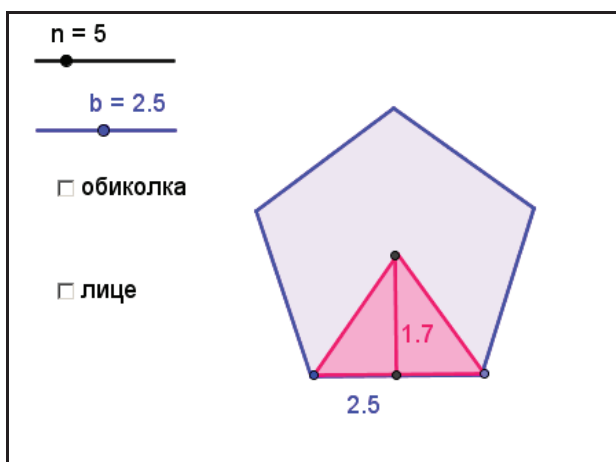
И на мен, но от всяка от страните ми.

И на мен, но само аз имам и равни ъгли.

1. Намери обиколката на правилния многоъгълник. Открий формула за обиколка на правилен n -ъгълник по дадена дължина на страната b .



2. Намери лицето на правилния многоъгълник. Открий формула за лице на правилен n -ъгълник по дадена дължина на страната b и апотема a .



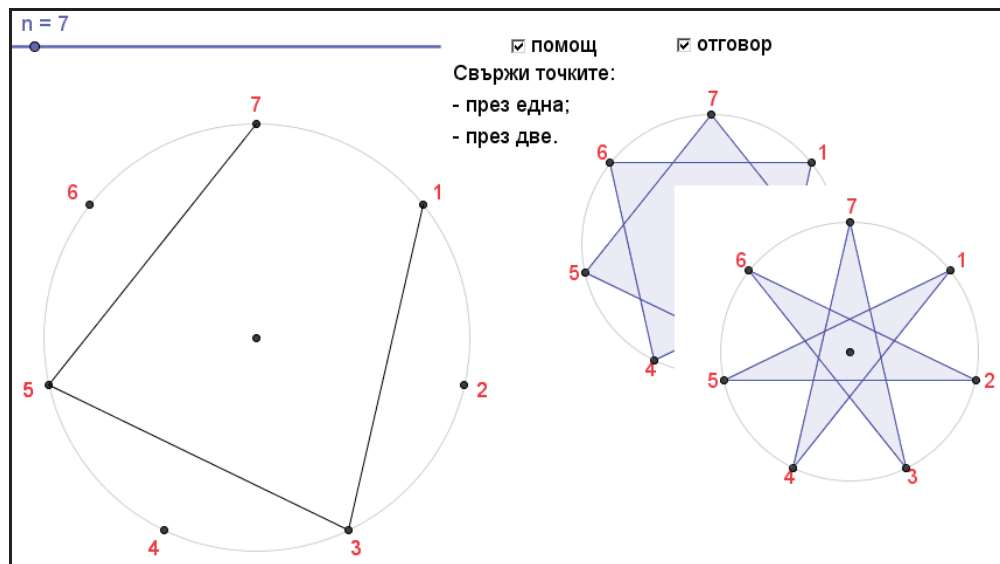
2.3. Звезди

Аз съм седмолъчка!

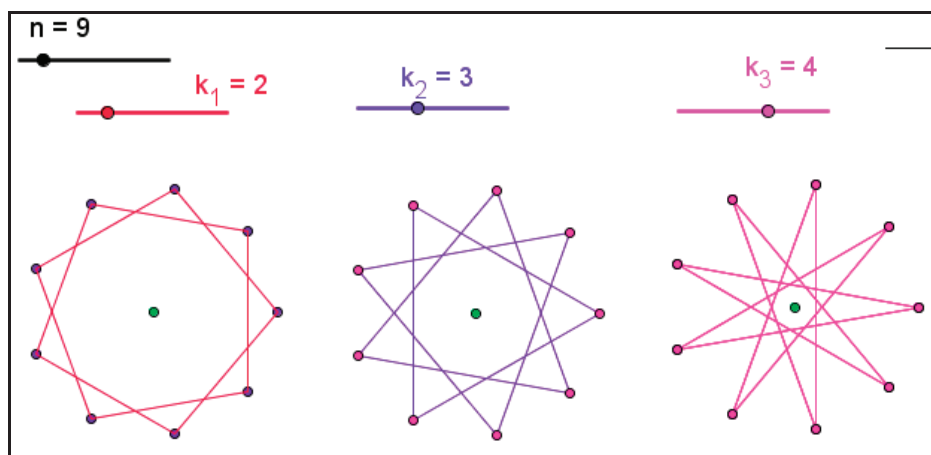
И аз, но съм по-хубава!

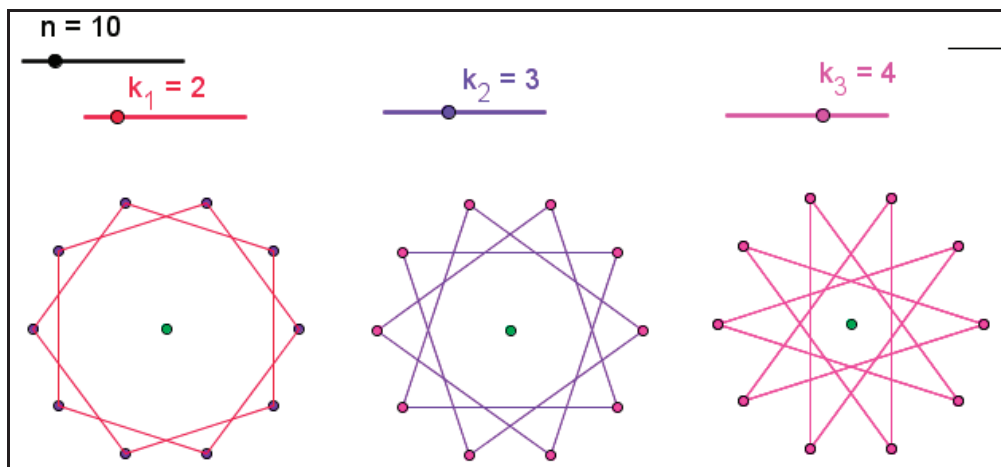
Има различни начини за получаване на звезди, тук ще откриеш един от тях. Ще използваш върховете на правилен многоъгълник.

1. Построй звезда. Открой общо правило.



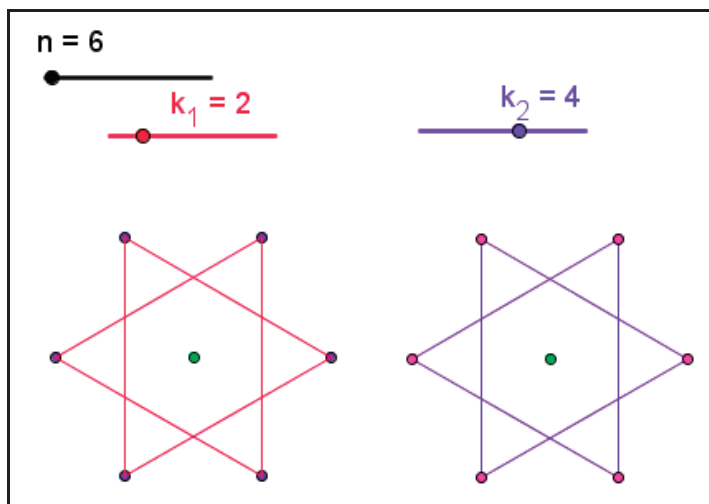
2. Опитай се да откриеш кога звезда се получава с непрекъсната линия и кога - от няколко фигури.





Един начин за записване на звезди е $(n; k)$, където n и k са използваните горе. Звезда $(5; 2)$ се нарича *пентаграм*. Как е другото име на звезда $(4; 1)$? А на $(3; 1)$? На $(6; 1)$?

3. Сравни звезди $(6; 2)$ и $(6; 4)$.



- Построй две звезди с различен запис, но еднакви по форма.
- Направи предположение за още няколко такива двойки звезди. Обоснови.

2.4. Дължина на окръжност

Можеш ли да ме измериш с линейката?

Още в древността са разбрали, че трябва друг трик.

1. Измери дължината на окръжността чрез търкаляне.

Попълни таблицата и формулирай хипотеза.

C - дължина на окръжност
d - диаметър на окръжност

$\frac{C}{d}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{C}{d}$										

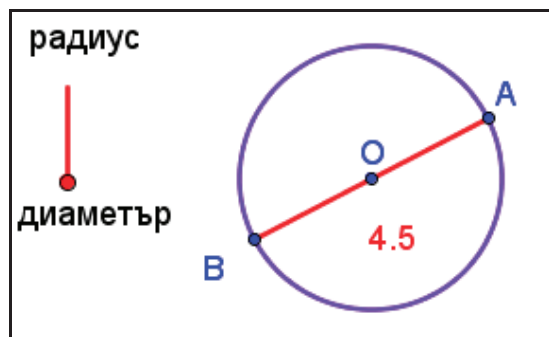
Дължината $C = 28.26$

$\frac{C}{d} = 3.14$

☒ провери

С точка М можеш да движиш окръжността.
Попълни таблицата.
Направи хипотеза.

2. Намери дължината на окръжността.

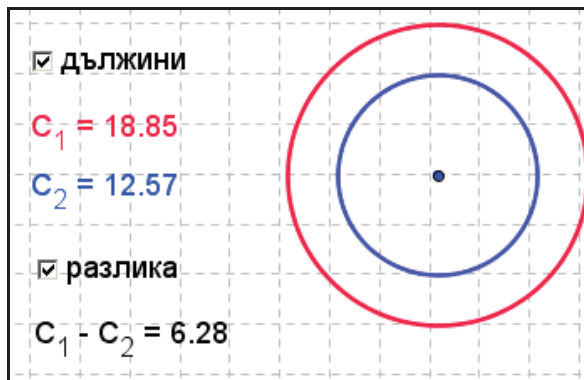


Потренирай.

3. Намери разликата на дължините на окръжности с радиуси:

а) 3 и 2; б) 4 и 3; в) 5 и 4; г) a и $a-1$.

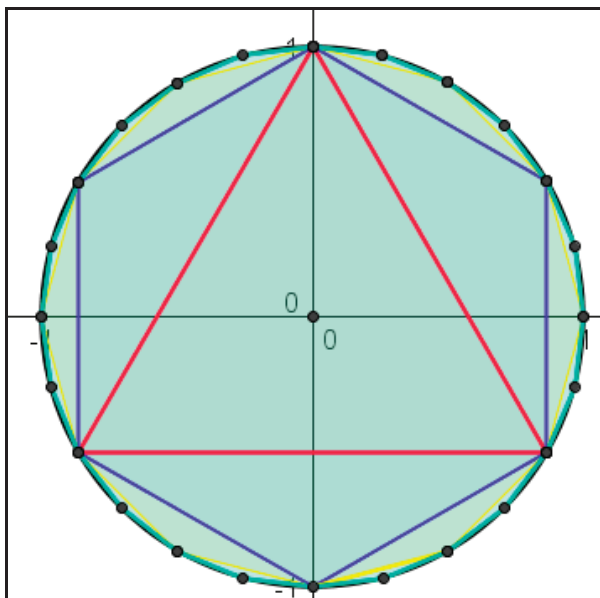
- Направи предположение за разликата на дължините на окръжности, ако разликата на радиусите им е k . Обоснови.



- Може ли мишка да мине под въже, равномерно отдалечено около екватора и с дължина, с 1 м по-голяма от дължината на екватора?

4. Какво е отношението на дължините на две окръжности, ако отношението на радиусите им е k ?

Наблюдавай друг начин за намиране на дължина на окръжност.

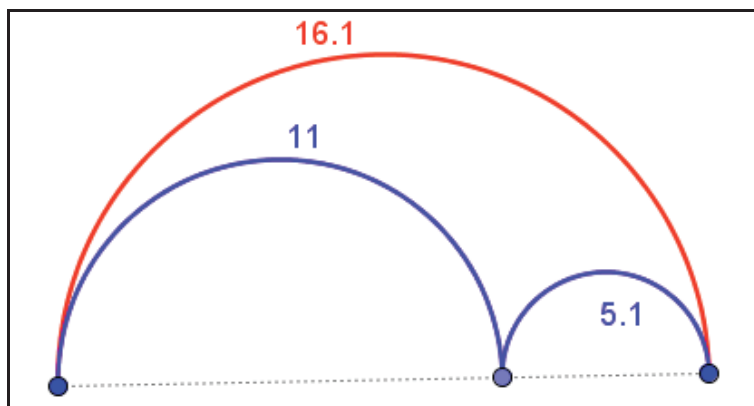


2.5. Полуокръжности

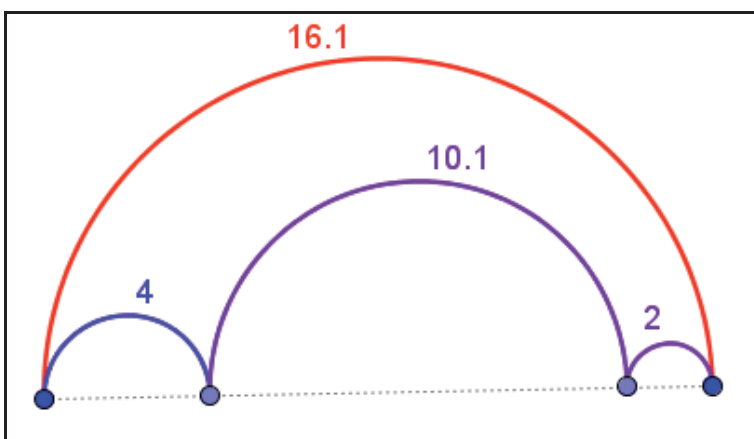
Двете можем да
се сглобим в
окръжност.

И сме еднакви.

1. Сравни дължината на червената полуокръжност и сбора на дължините на сините полуокръжности. Направи хипотеза. Докажи.

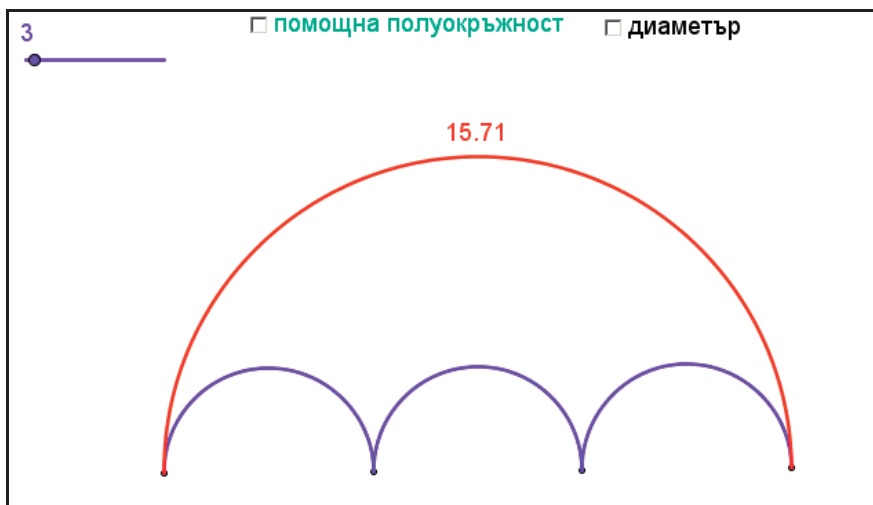


2. Сравни дължината на червената полуокръжност и сбора на дължините на сините полуокръжности.

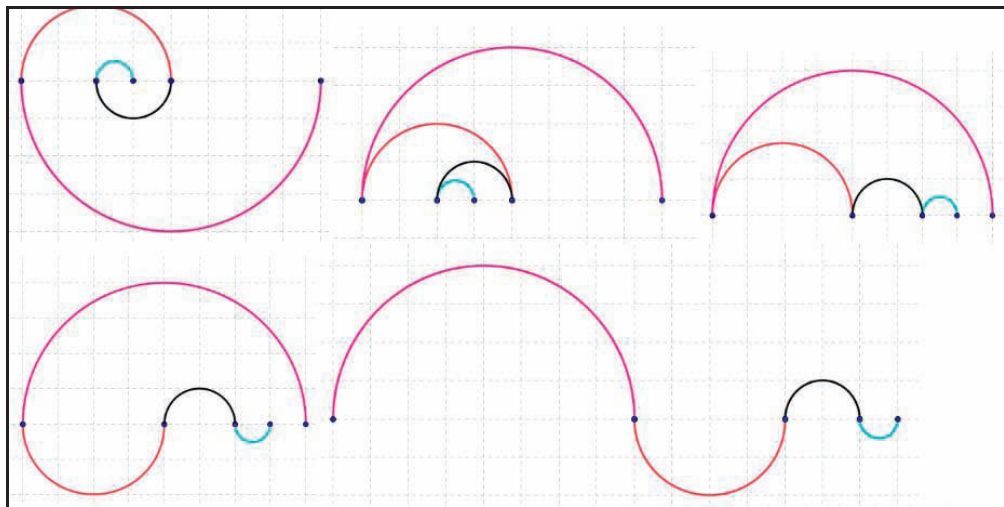


Направи хипотеза. Докажи.

3. Сините полуокръжности са с равни диаметри. Сравни дължината на червената полуокръжност и сбора на дължините на сините полуокръжности. Направи хипотеза. Докажи.



4. Сравни дължините на кривите.



Като използваш динамичния модел, състави задача с дължини на полуокръжности.

2.6. Лице на кръг

Ще ме впишат!

А мен ще
ме опишат!

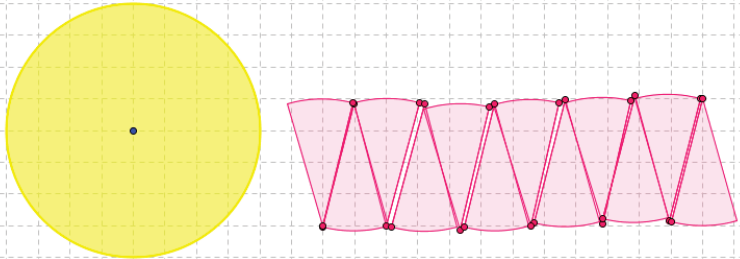
1. Открий формула за лице на кръг.

За да преместиш сектор, използвай точките за завъртане и за преместване.

$r = 4$

Кръгът е разрязан на 12 еднакви сектора.
Те са подредени до фигура, наподобяваща успоредник.
Прецени на колко е равна приблизително неговата страна и височина към нея?

☐ !



2. Намери лицето на кръга.



$r = 3$

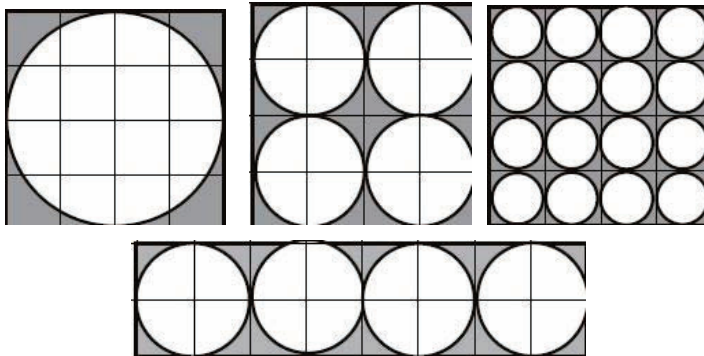
$d = 5$

☐ отговор

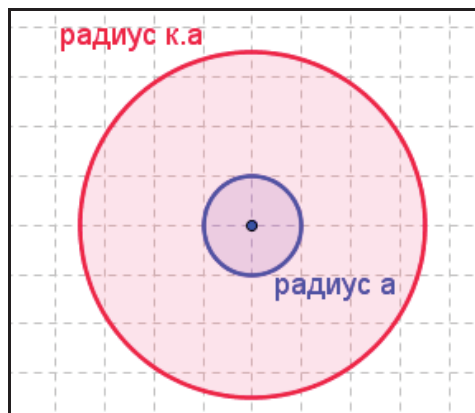
☐ отговор

Потренирай.

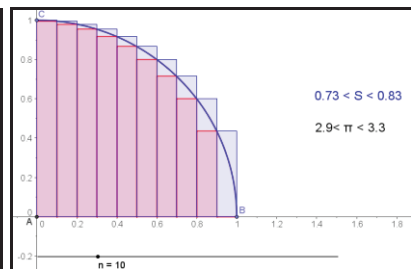
3. Сравни лицата на затъмнените части на четирите правоъгълника.



4. Намери отношението на лицата на два кръга с радиуси:
а) 2 ед. и 1 ед.; б) 4 ед. и 2 ед.; в) 6 ед. и 3 ед.; г) 2. а ед. и а ед.



Виж още два метода за достигане до лице на кръг.

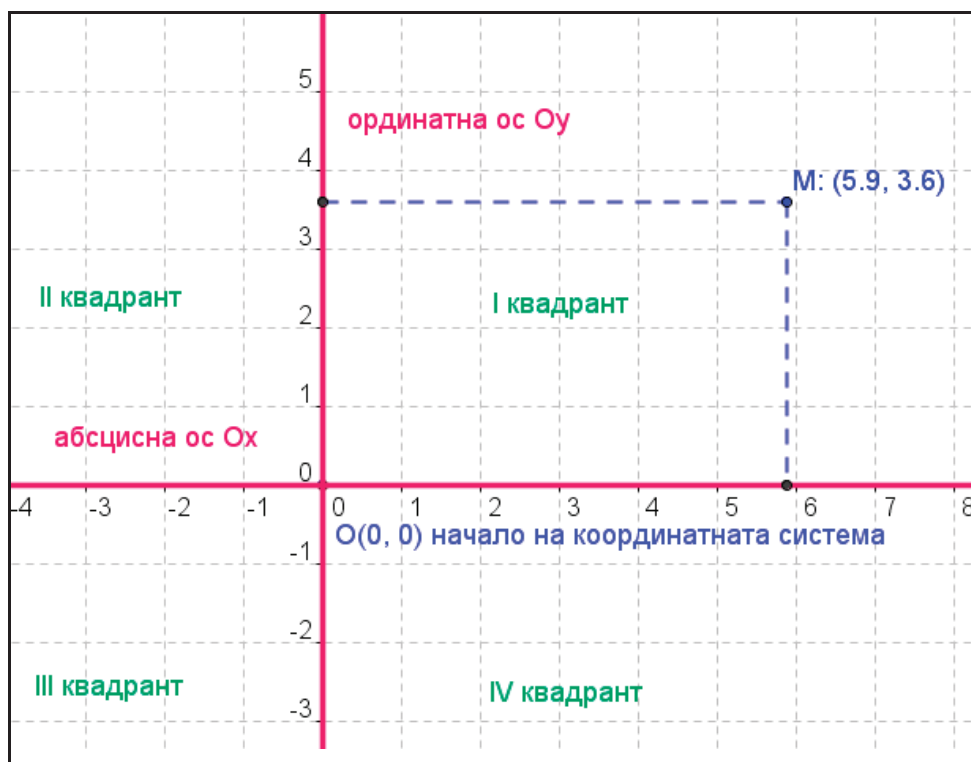


2.7. Декартова координатна система

Аз съм
началото!

Аз съм
от първи квадрант!

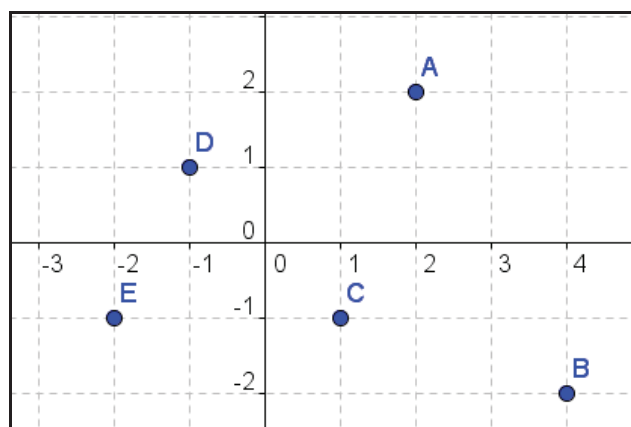
1. В кои квадранти абсцисата на точката е положително число?
В кои квадранти ординатата на точката е отрицателно число?



Можеш да преместваш точката М или да използваш координатните оси.

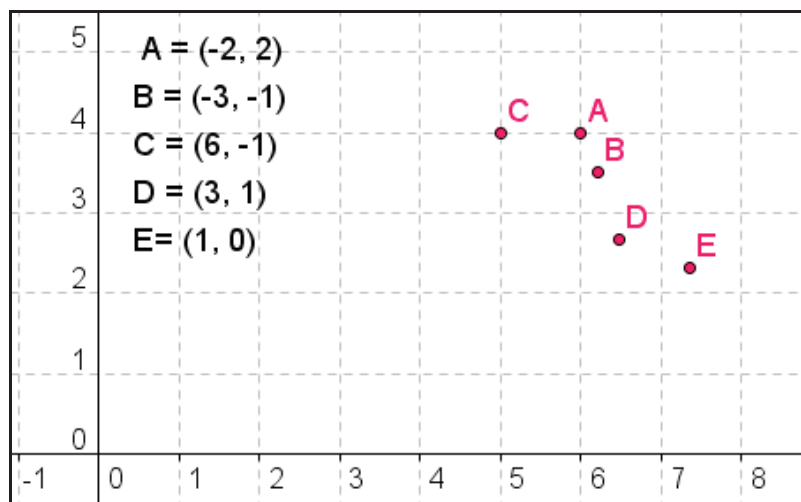
Потренирай!

2. Запиши в тетрадката си координатите на точките.



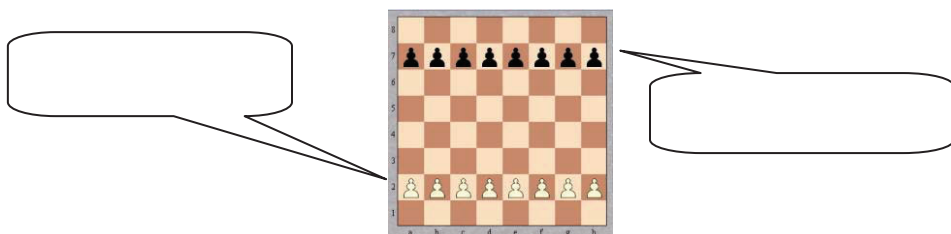
Скрий отговора и премести точки за следващ пример.

3. Премести червените точки на съответното място.

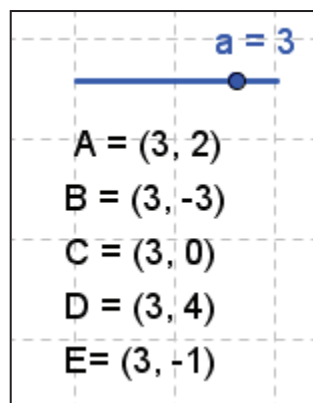
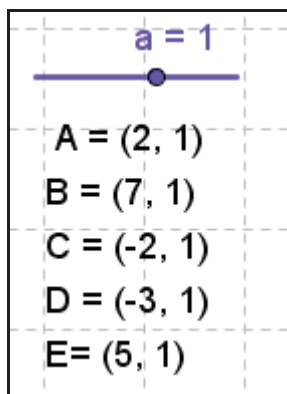


Премести точки за следващ пример.

2.8. Точки в Декартова координатна система

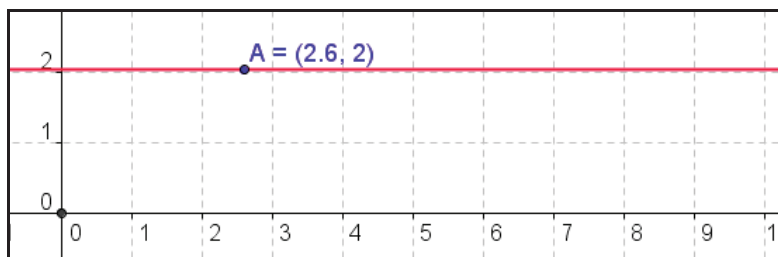


1. Построй точките. Формулирай хипотеза. Използвай плъзгача за друг пример.



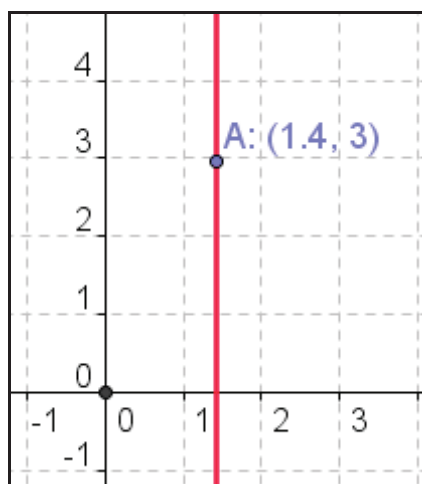
2. Построй точките. Формулирай хипотеза.

3. Червената права е успоредна на абсцисната ос. Избери няколко точки върху червената права. Сравни ординатите на точките. Направи хипотеза.



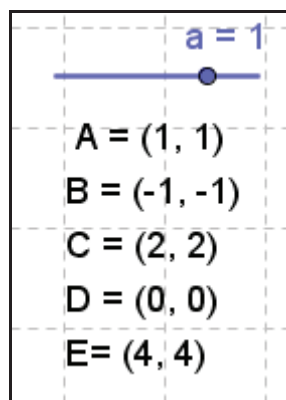
Премествай червената права и проверявай хипотезата си.

4. Червената права е успоредна на ординатната ос. Избери няколко точки върху червената права. Сравни абсцисите на точките. Направи хипотеза.



Премествай червената права и проверявай хипотезата си.

5. Построй точките. Премести плъзгача за следващ пример. Формулирай хипотеза.



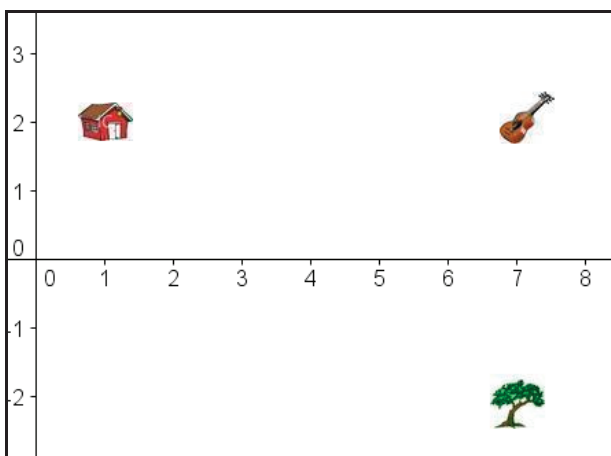
6. Построй точките $A(1, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 0)$, $D(-2, 2)$, $E(2, -2)$. Формулирай хипотеза.

2.9. Дължини на някои отсечки в Декартова координатна система

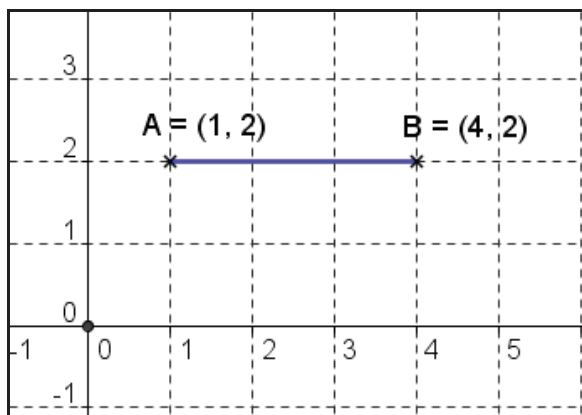
Началото ми е $(2; 2)$ и съм успоредна на абсцисната ос.

Имаме общо начало и равни дължини.
И съм успоредна на ординатната ос.

1. Певецът е в къщи, а трябва да мине да вземе китарата, за да свири на забавата край дървото. Какво разстояние най-малко ще измине, ако на 1 единица от координатната система отговарят 200 м?



2. Намери дължината на отсечката.



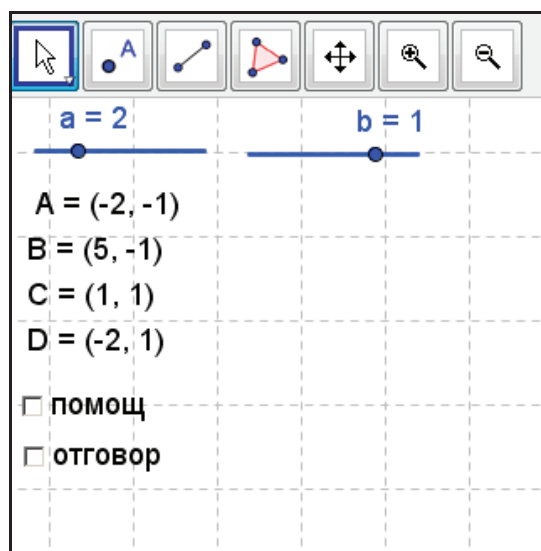
Дължината на страната на малкото квадратче е 1 см.

2.10. Многоъгълници в Декартова координатна система

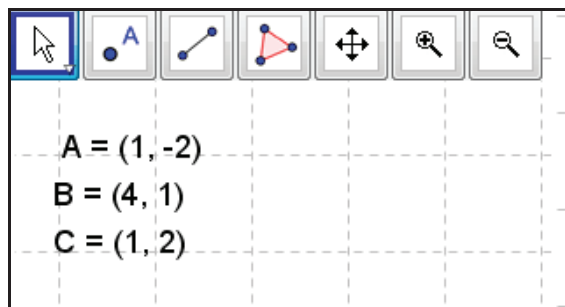
Върхове ми са
(2; 2) , (3; 3) и (3; 2).

А моите са
(1; 1) , (1; -1), (-1; -1) и (-1; 1).

1. Намери лицето на триъгълника ABC.
2. Намери лицето на четириъгълника ABCD. За нов пример използвай плъзгачите.



3. Премести върха B на триъгълника ABC така, че лицето да се увеличи с 1 кв. ед.

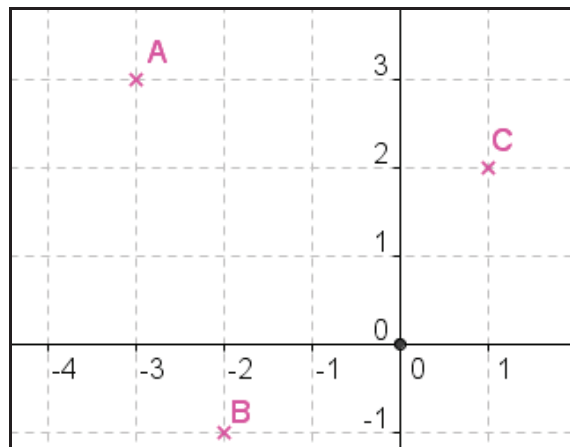


2.11 Ос на симетрия

1. Построй симетричната на всяка от точките спрямо абсцисната ос.

Абсцисите
ни са равни.

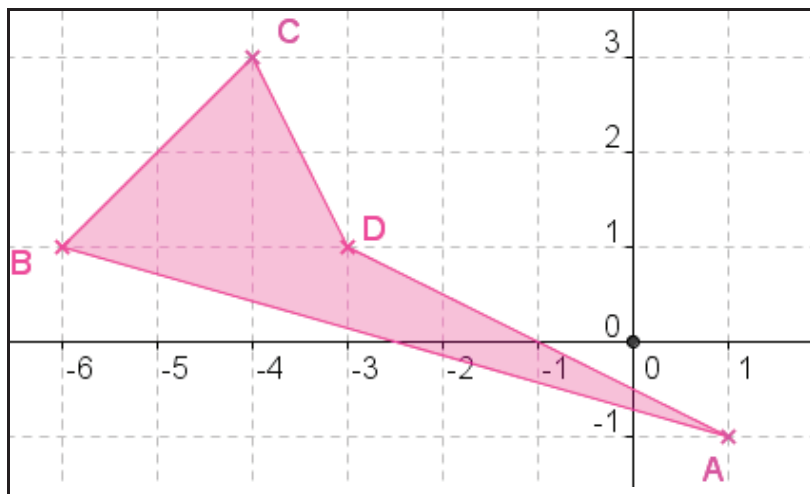
И сме
симетрични
спрямо Ox .



Сравни координатите на точка и образа ѝ при осева симетрия, когато ос е абсцисна или ординатна ос.

2. Построй симетричната на всяка от точките спрямо ординатната ос.

3. Построй симетричната на фигура ABCD спрямо абсцисната ос.



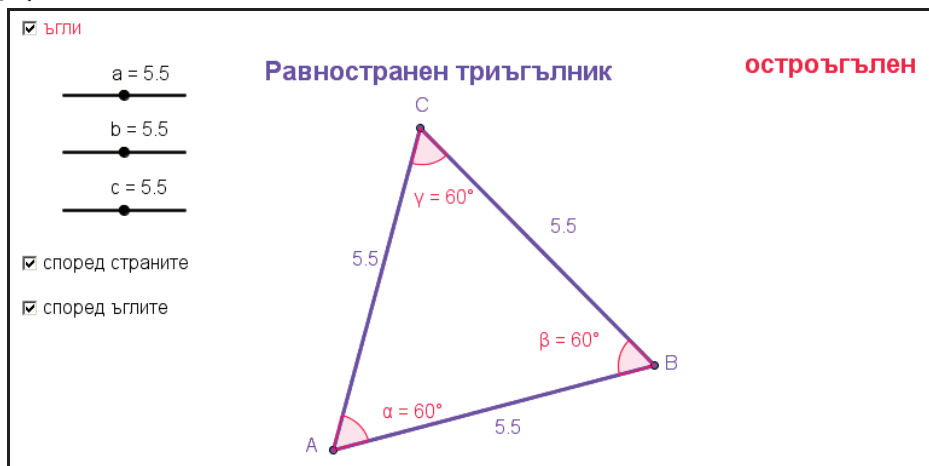
Сравни лицата на фигура и образа ѝ при осева симетрия.

3. Към учителя

В края на работата по всяка от темите учениците допълват комиксите с фигури.

1.1

Насочваме учениците да наблюдават различни видове триъгълници с помощта на динамичната конструкция. Нека например получат няколко равнострани триъгълника (чрез подходящи стойности на плъзгачите) и наблюдават ъглите. Очакваме да установят експериментално, че равностраният триъгълник е остроъгълен, при това ъглите му са равни на 60° .



1.2

Подходящо е да реализираме работата по темата в преговора по геометрия. Насърчаваме учениците сами да формулират на хипотези въз основа на няколко конкретни резултата – кой от правоъгълниците с равни обиколки има най-голямо лице и кой от правоъгълниците с равни лица има най-малка обиколка.

Поставяме акценти върху:

- значимостта на подредбата на резултатите за откриване на закономерности;
- разместителното свойство на действията събиране и умножение на естествени числа, с което проверките се съкращават наполовина;
- разсъжденията, които гарантират пълнота в получените експериментално резултати;
- преживените стъпки на изследователския процес.

Първите примери са с естествени числа, които преобладаващо са така подбрани, че отговорът да е квадрат. Непосредствено преди геометричния материал учениците са изучавали десетични дроби. Ето защо сме подготвили два аплета, с чиято помощ могат да проверят хипотезата си и за нови стойности на измеренията (дробни числа). **Тук (а и в много случаи по-нататък) трябва да обърнем внимание на учениците, че работим с приблизителни стойности.**

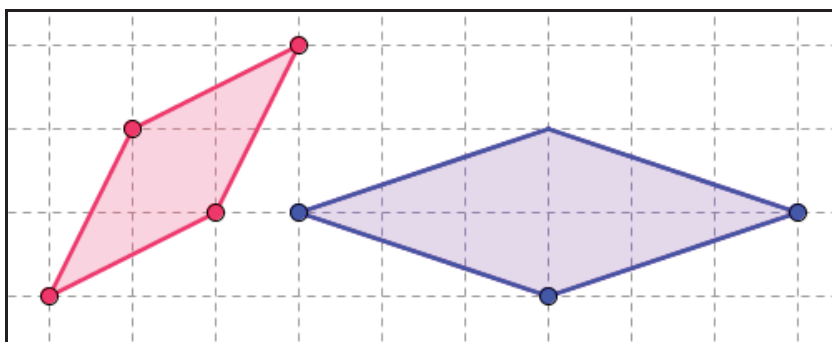
Макар GeoGebra да е софтуер, преведен и на български език, някои термини не са преведени. Например след използване на бутоните за лице или обиколка на фигура се появяват съобщения от вида

Area EFGH = 36
Perimeter EFGH = 40

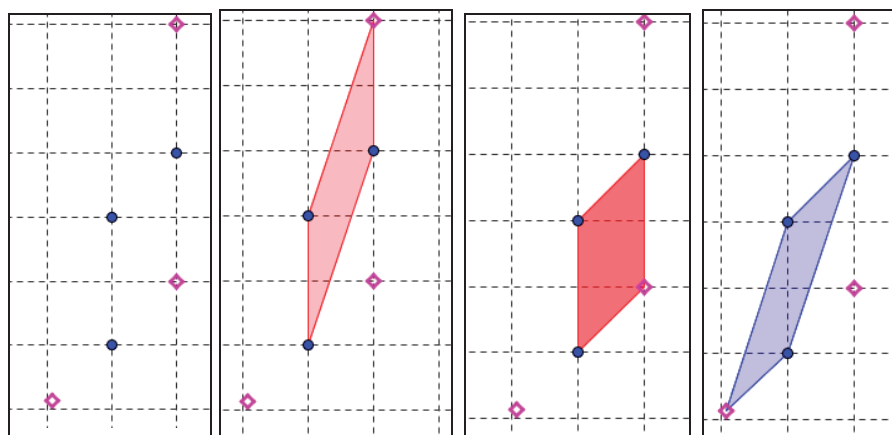
Като имаме предвид, че учениците от 2. клас изучават чужд език, добре е да въведем някои математически термини (за които не е реализиран превод).на английски език.

1.3

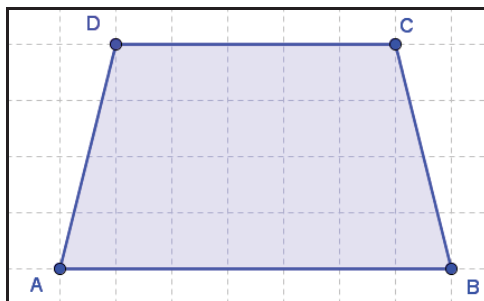
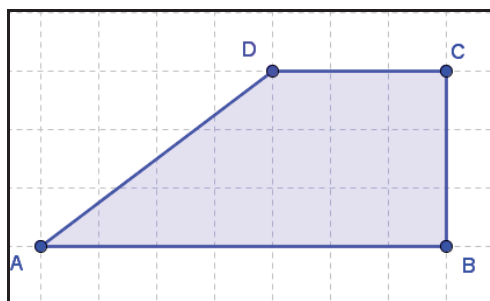
Както е известно, до 6. клас **квадратната мрежа е основен инструмент за построяване** на изучаваните фигури. В **задача 3** учениците вероятно ще се затруднят да построят ромб, който не е квадрат. (Причината е, че не познават всички свойства на ромба, които могат да им помогнат.) Можем да ги насочим към построяване на страните като диагонали в еднакви правоъгълници.



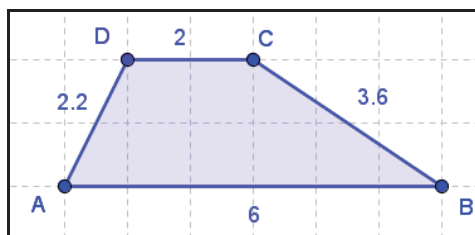
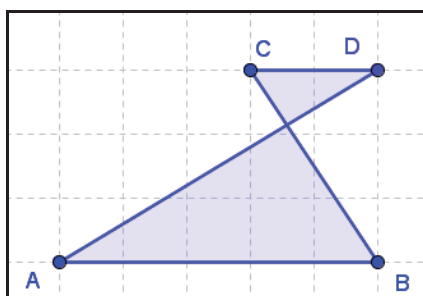
В **задача 4**. най-голямото предизвикателство е да се открият и трите решения (точките във виолетово). Обикновено учениците достигат само до едно от тях. Подходящо е да се построят и успоредниците.



1.4

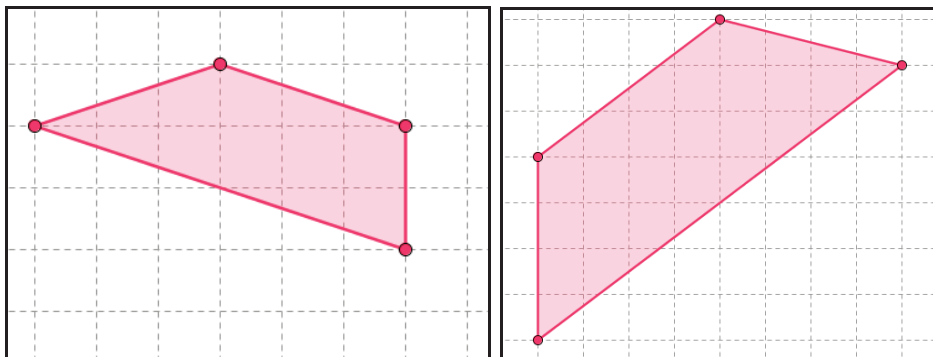


Тук векторите AB и DC биха могли да станат разнопосочни, затова е поставено условие да се местят точки до получаване на трапец.



Учениците лесно могат да съобразят какви са дължините на отсечките върху линии от квадратната мрежа. За останалите е необходимо да използват бутона за дължина на отсечка. Оново обръщаме внимание, че някои от дължините се дават с посочената точност (тук – до десетите).

Добре е да насочим вниманието на учениците към успоредност на отсечки в квадратна мрежа и към сравняване на трапец и успоредник.



1.5.

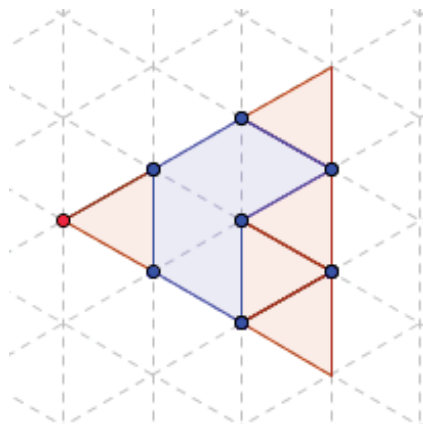
За актуализиране сме предложили схема на Вен-Ойлер, в която са отразени видово-родовите връзки на изучените фигури. Учениците трябва да поставят всяко име в съответното множество от обекти.

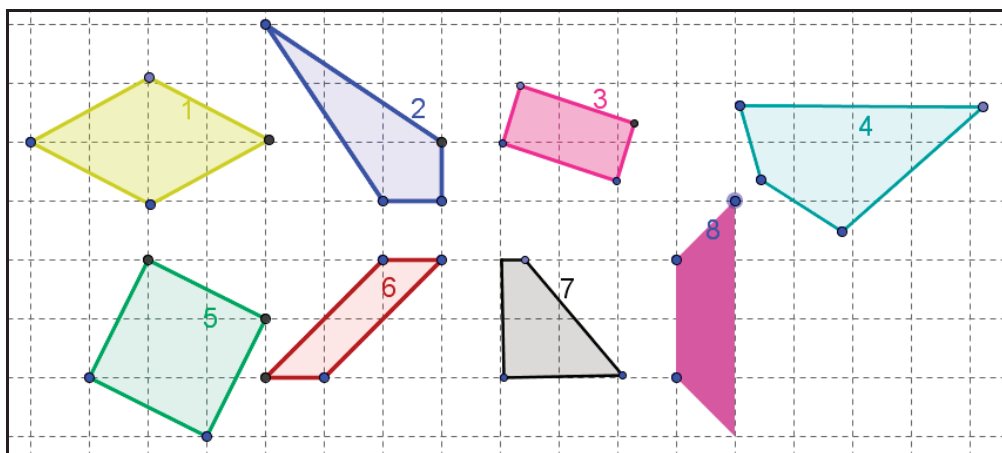
Задачите са върху различно получаване и представяне на видовете четириъгълници. Включили сме класически задачи от занимателната математика.

В **задача 1.** учениците трябва да получат различни видове четириъгълници като сечение на два динамични правоъгълника (червен и жълт). Те са изобразени с намалена плътност и сечението им е в оранжев цвят.

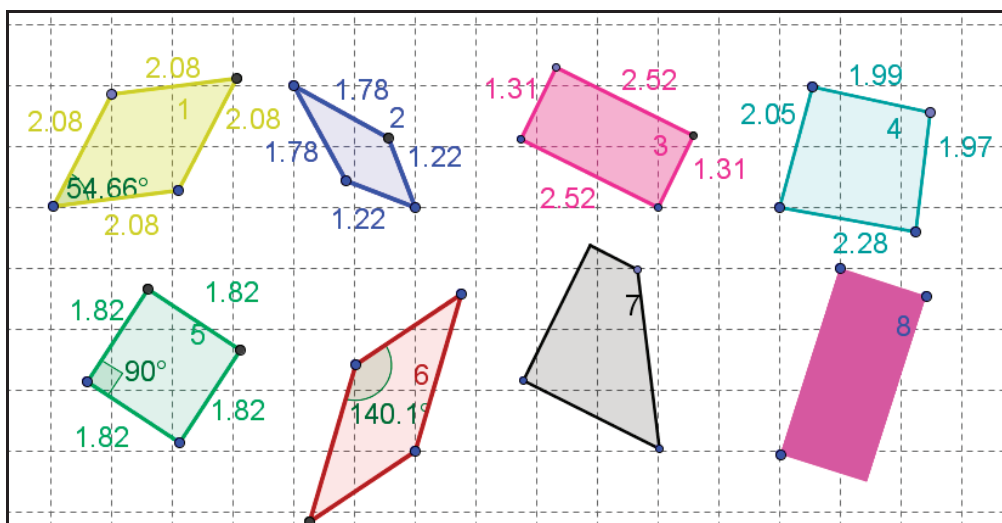
В част от задачите е поставен акцент върху действия с елементи на фигури (върхове, страни) и преобразуване до посочен вид чрез добавяне, отстраняване, преместване. При **задачи 4. и 5.** сме осигурили динамични модули. Завъртаме и преместваме модулите с помощта на върховете им. Използваме и квадратна, и триъгълна решетки.

В **задача 3** специфичен е осмият динамичен четириъгълник, който може да стане равнобедрен трапец или правоъгълник.

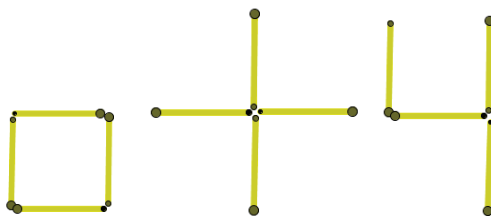




Удобно е да се изведат дължини на някои от страните, както и ъгли. При необходимост учителят уточнява, че се разглеждат четириъгълници, т.е. не се допуска съвпадане на върхове, което би довело до получаване на триъгълник.

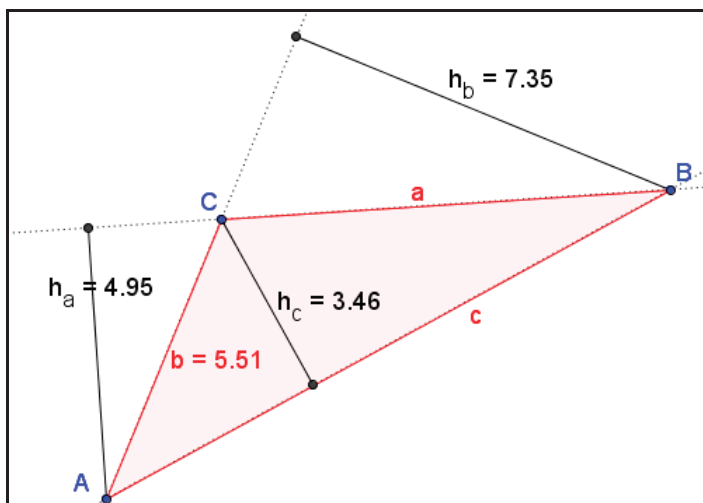


Предлагаме три решения на **задача 6** (последното разбира се е квадрат на числото 2).



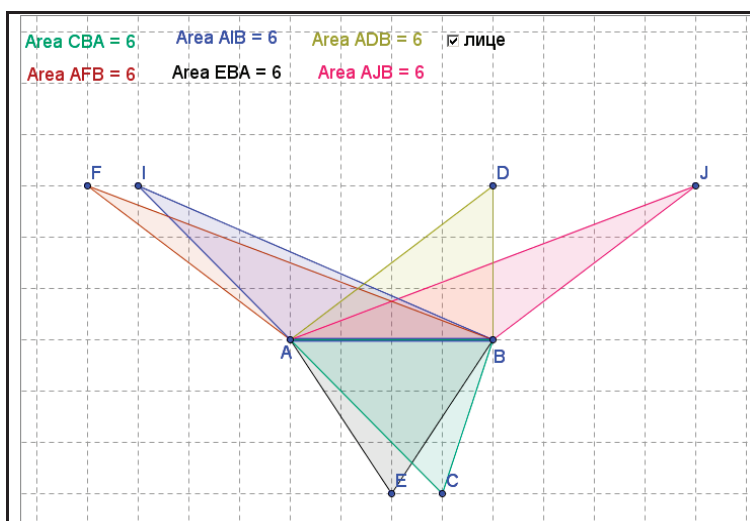
1.6.

Учениците могат да работят с последния аплет по различни начини: да показват дължините на някои отсечки, да съставят задачи, да проверяват решения... Ето конструкция, в която трябва да съобразят кои стойности са необходими, за да намерят лицето на триъгълника.



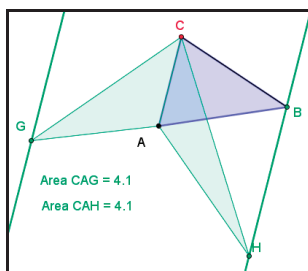
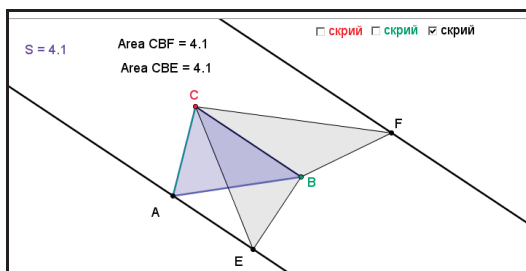
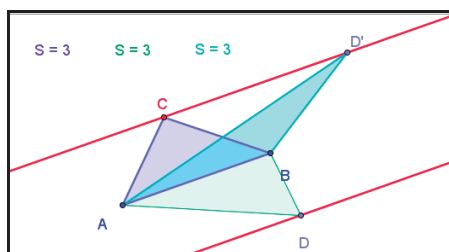
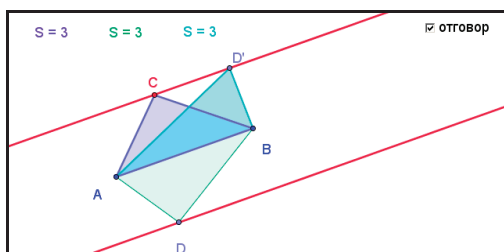
1.7.

В **задача 1** обикновено учениците използват точки само от едната полуравнина, определена от правата АВ. При формулиране на хипотезата най-често „виждат“ разположението на третите върхове върху отсечка. Учителят може да движи една от точките така, че учениците да усетят безкрайността на търсеното място. Подходящо е всеки да запише своята хипотеза, а после да се редактират колективно някои от формулировките (при необходимост).



В **задача 2** очакваме учениците да формулират като хипотеза обратното твърдение на твърдението от задача 1.

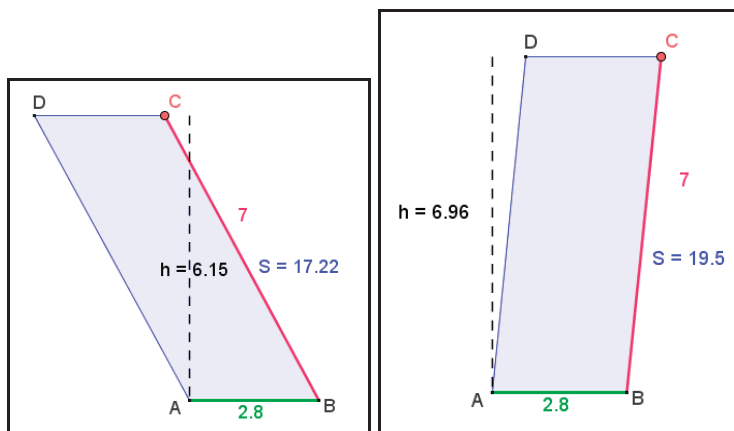
В изследователския процес е важно да се прецени кои елементи трябва да бъдат пренебрегвани на един или друг етап. Чертежът в **задача 4**. е доста претрупан, защото смятаме, че учениците трябва да се научат да се ориентират в чертеж, съдържащ дори елементи, които нямат отношение към конкретен проблем. Динамиката на конструкцията обаче позволява някои елементи да бъдат временно скрити. Препоръчваме в процеса на разсъждение учениците да преценяват кои триъгълници да скрийт за удобство.



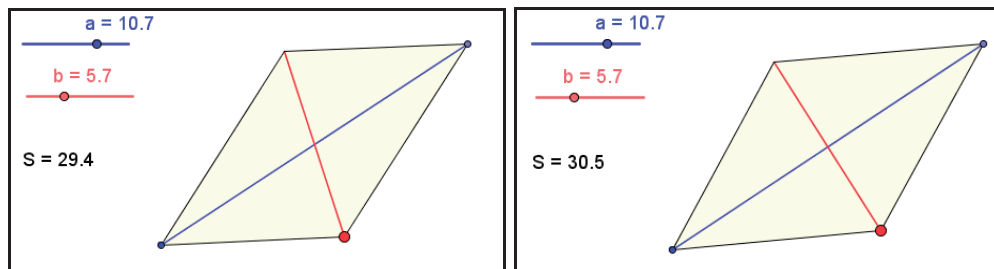
1.9.

Като движат точка D в аплета на **задача 1**, учениците установяват, че в този конкретен случай търсеният успоредник е правоъгълник. Могат да променят синия успоредник с помощта на някои от точките A, B или C и отново да изследват конструкцията. Очакваме да стигнат до хипотезата, че от успоредниците с равни основи и височини най-малка обиколка има правоъгълникът.

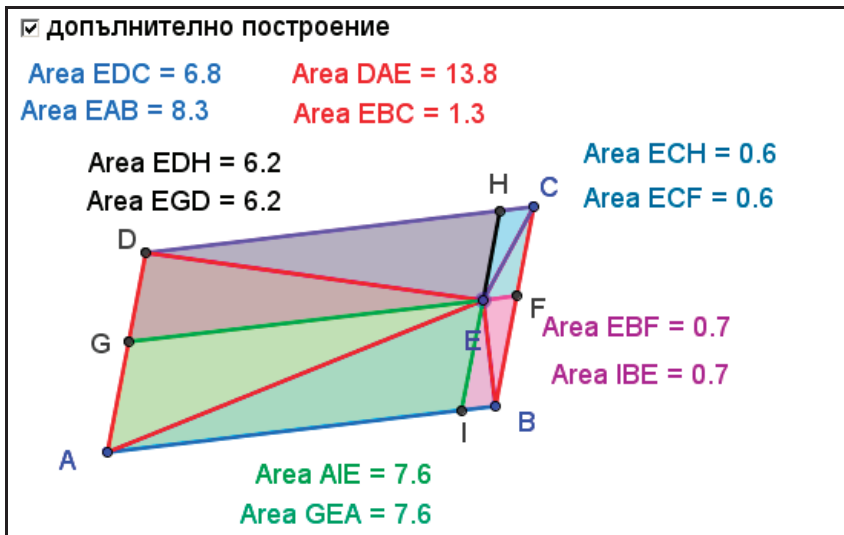
В аплета на **задача 2**, при фиксирани стойности на a и b, учениците движат точка C, за да получават различни успоредници с тези измерения. Наблюдават изменението на лицето и установяват за кой от успоредниците то е най-голямо. Променят стойностите на a и/или b и повтарят проучването. Така, очакваме въз основа на няколко примера да направят хипотеза, че търсеният успоредник е правоъгълникът със страни a и b.



Аналогично провеждат изследването и в **задача 3**. Тук трябва да открият, че отговорът е ромб.



Очакваме първо да забележат, че диагоналите на търсения успоредник са перпендикулярни.

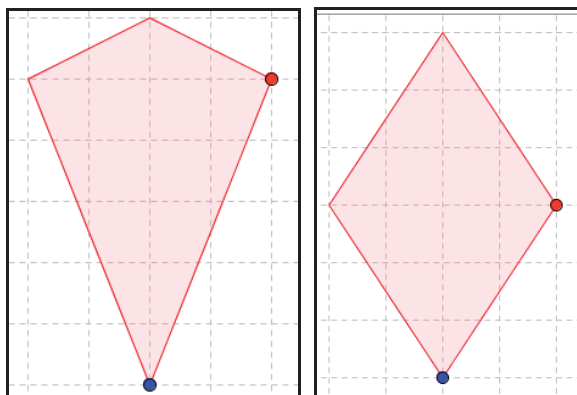


За да открият закономерност между посочените сборове в **задача 4**, учениците правят проверка за няколко различни положения на точката Е. Допълнителното построение ще ги улесни да обосноват получената експериментално хипотеза.

За герои на недовършената карикатура учениците може да посочат и триъгълници.

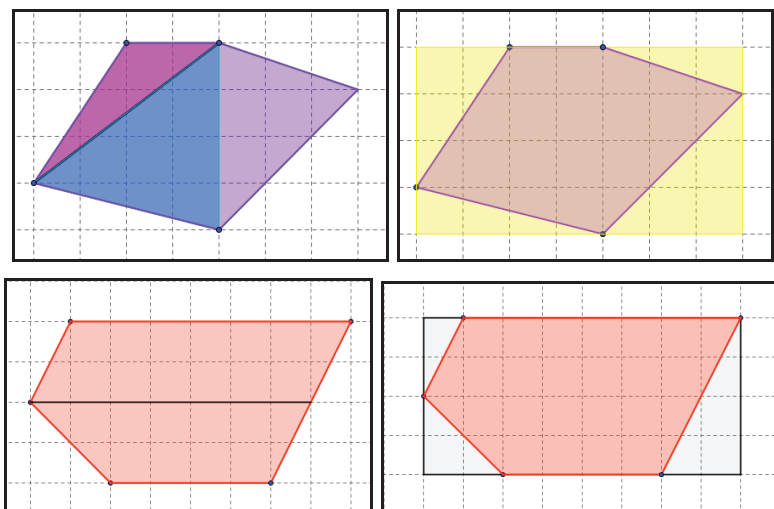
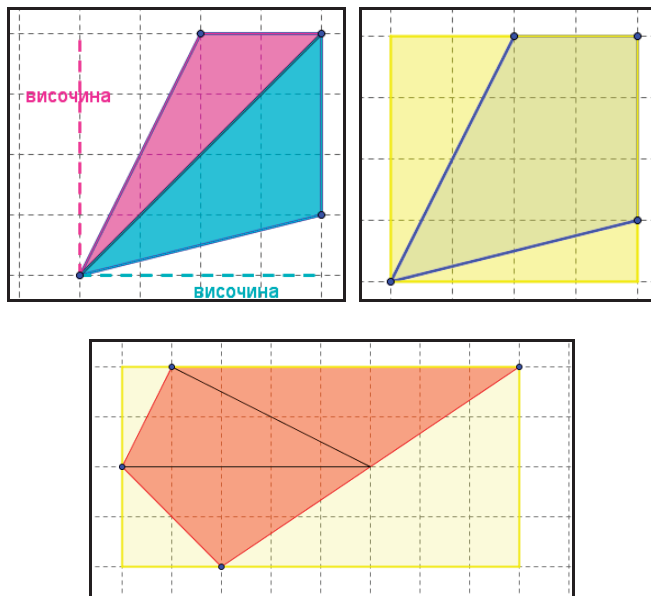
1.11.

Ето пример на делтоиди с равни диагонали.



За да решат задачата, учениците могат да изберат аплет от предходните задачи. Идеята е да **гледат на готовите конструкции като на инструмент** и да съобразяват в какви ситуации да ги използват.

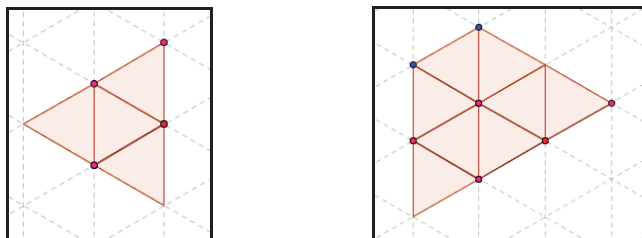
Илюстрирали сме два основни начина за намиране на лице на многоъгълник – чрез разделяне и чрез допълване. Използваме и термина „опаковане“, който в практиката се утвърди като полезен.



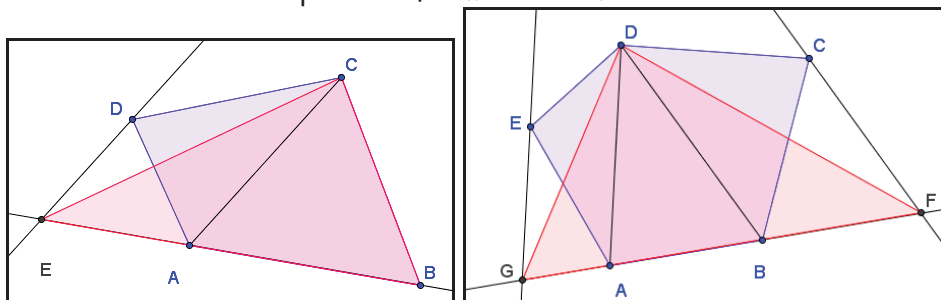
Добре е да насърчим учениците сами да съставят задачи за лице на многоъгълник с различна според тях трудност.

1.14.

И в двата случая в **задача 1** учениците трябва да завъртят единичното триъгълниче, което движат. Ето едно решение, но те трябва да открият и останалите.

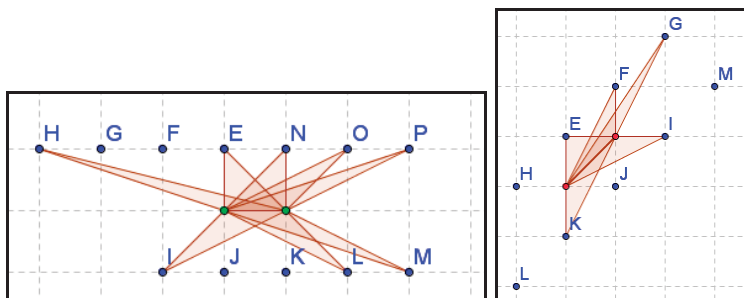


Представеното решение на **задача 2** се основава на резултатите от 1.7 за равнобедрени триъгълници. Може да предложим на учениците обратната задача, както и да обобщим решението в случая на преобразуване на произволен n -ъгълник в равнобедрен m -ъгълник.



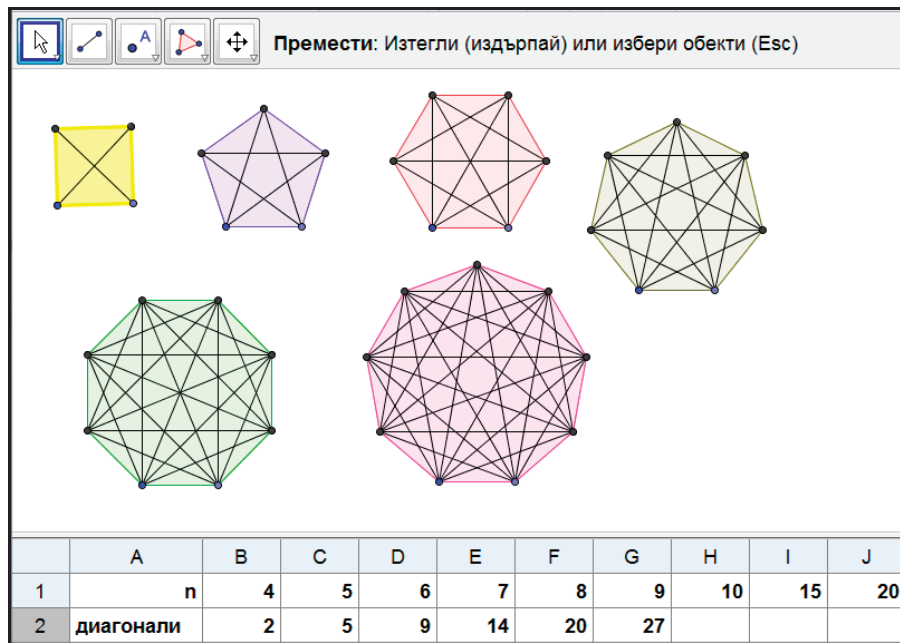
1.16

И тук се използват резултатите от 1.7 за равнобедрени триъгълници.



Тъй като работим само с възли на квадратната мрежа, добре е да разграничим двата случая - на непрекъснатост и дискретност.

2.1.



Очакваме от учениците да открият общо правило за получаване на редицата от броя на диагоналите 2, 5, 9, 14, 20, 27 ...

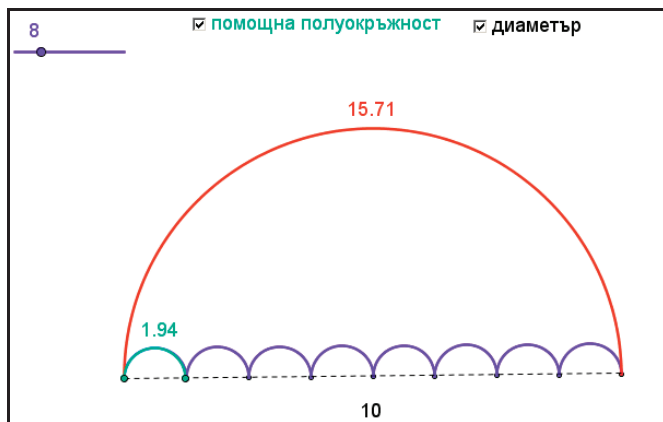
2.4.

В **задача 1** учениците могат да видят междинните отговори, като завъртят окръжността докрай. Те могат да променят окръжността в **задача 2.**, като преместват механично точките O или A. Важно е да им напомним, че получената дължина на окръжност е приблизителна стойност, поради приближението, което използваме за π .

2.5.

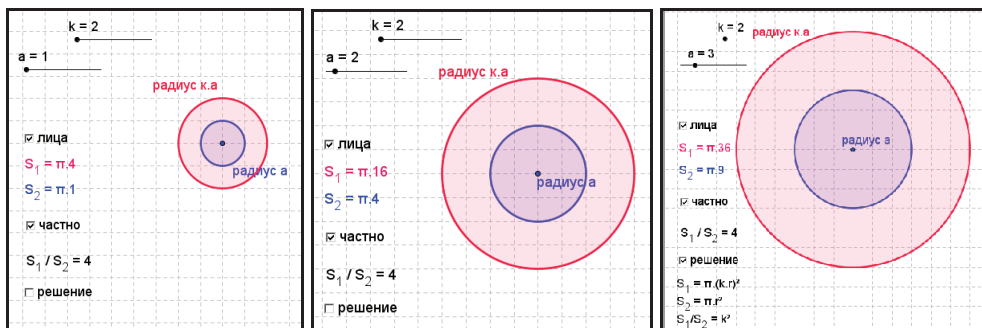
Учениците биха могли да обобщят резултатите от **задачи 1 и 2** (евентуално с наша помощ) и да ги използват, за да решат **задача 3**. Независимо от това, в **задача 3** е даден помощен инструмент

(полуокръжност) за изследване. Те могат да поставят помощната полуокръжност върху синя полуокръжност и да използват дължината ѝ.



2.6.

Част от съдържанието е разработено по аналогия с темата *Дължина на окръжност*. Така учениците ще продължат да изследват разглеждани вече обекти и ще се ориентират в задачите за по-кратко време. Те могат да менят окръжностите в **задача 2**, чрез плъзгач (за синята) и чрез механично придвижване на точка (за червената окръжност). Те могат да изследват конструкцията в **задача 4** включително и за различни стойности на разликата на радиусите на двата кръга.



2.8.

В **задача 3**, учениците могат да местят точката върху червената права и да наблюдават координатите ѝ.

2.9.

В **задача 2**, учениците могат да местят точка A произволно във възли от мрежата, а точка B – върху права през A , успоредна на абсцисната ос.



Тони Чехларова

ГЕОМЕТРИЧНИ ФИГУРИ

изследвания с динамични конструкции
в 5. и 6. клас

Редактор: Евгения Сендова
Българска, първо издание
2012

ISBN