The Fibonacci Project

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

Изследователски подход в образованието по математика

Петър Кендеров, Евгения Сендова
(редактори)

Редактори: Петър Кендеров, Евгения Сендова
Художник на корицата: Лилия Павлова
Графично оформление: Албена Василева
Издателство „Регалия 6", 2013

ISBN 978-954-745-224-4

С финансовата подкрепа на европейската 7. рамкова програма
и Института по математика и информатика към БАН

Предговор

Драги читатели,

В ръцете ви е сборник от статии, които са разработени по доклади, представени от авторите им на:

- Националния семинар *Изследователският подход в математическото образование,* проведен в ИМИ-БАН на 16 -17 декември 2011 г.
- Практическия семинар по проект *Fibonacci* — проведен в рамките на 41. конференция на СМБ, Боровец, 9-12 април 2012 г.
- Конференцията *Дай шанс на таланта* в рамките на 30-годишнината на Международната фондация *Св. Св. Кирил и Методий,* проведена в СУ *Климент Охридски, 20 октомври 2012 г.*
- Националния семинар (посветен на акад. Стефан Додунеков) *Изследователският подход в математическото образование,* проведен в ИМИ на 19 декември 2012 г.

Използването на изследователския подход за изучаване и преподаване на математиката не е нещо непознато за българската образователна система. Участието на България (чрез *Института по математика и информатика към Българската академия на науките*) в европейския проект *Фибоначи* (http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/) позволява този подход да навлезе още по-осезаемо в българските училища.

В рамките на този проект българският екип разработи и продължава да разработва образователни дигитални среди, подходящи за използване в целия спектър на българското училище. Акцентът при работа с тях е върху експерименти с динамични геометрични конструкции, при които учениците наблюдават и откриват закономерности, формулират и отхвърлят хипотези, разбират по-дълбоко същността на изучавания материал. Ролята на учителя вече не е „да проповядва факти", „да демонстрира готови доказателства", а да стимулира учениците си да действат, да генерират идеи, *да влизат в кожата* на изследователи. Това подпомага цялостното им израстване като знаещи и творящи млади хора, които няма да се страхуват да атакуват отворени проблеми и ще имат компетентността и мотивацията да откриват и научават нови неща цял живот...

Българският екип по проекта Фибоначи е провел семинари в повече от 15 града с около 900 учители. Но истинският ефект от популяризиране на изследователския подход в образованието на по-широк фронт идва от *Фибо*-учителите – хората, които вече са се запалили не само да опитат атмосферата на динамичната математика, но и да се потопят в нея в ролята на изследователи. Нещо повече – да запалят и учениците си, и колегите си за учене в този стил.

Участниците в семинарите, организирани по проекта *Фибоначи,* имаха възможност да представят добрите си учебни практики в изследователски стил и да се запознаят с европейския опит в това отношение. Фибо-учители от страната споделяха как използват динамичните сценарии, разработени от екипа на проекта Фибоначи, как разработват собствени динамични сценарии, каква е реакцията на учениците, какви са най-сериозните проблеми и постижения при прилагането на този подход.

Бяха демонстрирани, изпробвани и обсъдени преподавателски стратегии в контекста на нови технологически платформи, подпомагащи изследователската атмосфера в часовете по математика, информатика и природни науки.

Съществен (и в някакъв смисъл уникален в международния контекст на проекта) елемент на работата на българския екип беше сътрудничеството с младите таланти по математика и информатика, представители на *Ученическия институт по математика и информатика.* Те се изявиха като активни участници с представянето на изследователски проекти в рамките на семинари по *Фибоначи* и дори като водещи на международни уъркшопи.

Като цяло, учители и ученици, участници във *Фибоначи*, успяха да покажат впечатляващи резултати от прилагане на изследователския подход в работата си и пред партньорите ни по проекта от университета в Байройт и пред оценителите на проекта.

Надяваме се, че като представяме в писмен вид част от преживяното на няколко последни събития, организирани по проекта, ще ви дадем шанс да се докоснете до атмосферата, към която бяхме съпричастни.

Петър Кендеров – координатор на проект *Фибоначи* от българска страна

Евгения Сендова

Преброяването на зайците в стил *Фибоначи* не е завършило – семинар на Фибо-учители

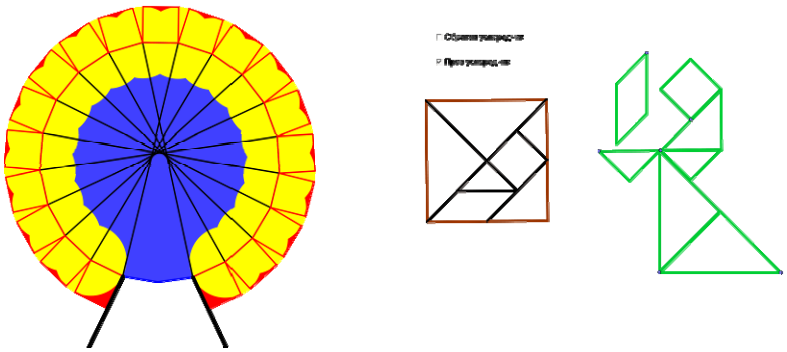
Динамичният математически софтуер – от нула до безкрайност

Ангел Гушев, Веселин Гушев
angel_hg@abv.bg, v_gushev@fmi.uni-sofia.bg
ПМГ „Васил Друмев”, гр.Велико Търново; СУ „Св. Кл. Оридски”- ФМИ

Резюме

В настоящата работа ще изложим накратко нашия опит, свързан с развитието на един необременен млад човек при срещата му с динамичния математически софтуер. Ще представим разработки от три различни етапа на неговата самостоятелна работа (подкрепяна и напътствана от авторите):

- *Използване на динамичния математически софтуер като заместител на графичните програми – поле за рисуване.*
- *Използване на част от динамичните възможности на динамичния софтуер за динамични рисунки.*
- *Използване на продуктите за динамична математика за изследване на геометрични конструкции, създаване на логически игри и т.н.*



Ветрило –рисунка *Дамата с огледалото от елементи на Танграм*

Фиг. 1.

Накрая ще допълним и доразвием неговите идеи, ще дадем поле за размисъл на читателя и ще го провокираме да осъзнае, че единственото ограничение за използването на продуктите за динамична математика се крие в собственото ни въображение и способности.

Ключови думи

изследователски подход, динамичен софтуер и стилове на използването му, проект Fibonacci

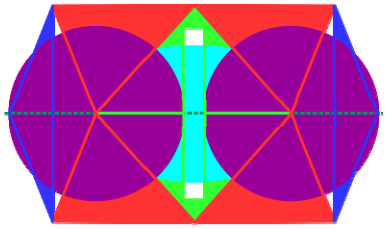
Основна цел на проекта Fibonacci е да се дават на учениците среди, в които те да могат да експериментират със свои идеи и хрумвания. Да могат сами да откриват знанието, защото когато човек сам открие някакъв факт, то това става част от неговите трайни знания [1].

Обект на нашите наблюдения е петокласник*, който в началото на учебната 2011/2012 година за пръв път се запозна с динамичния математически софтуер Geogebra [2].

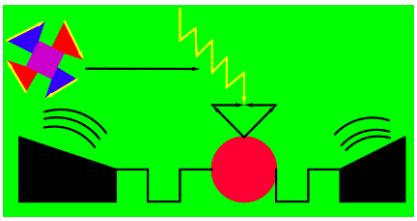
Преди срещата си с него той притежаваше начална компютърна грамотност, включваща работа с операционната система Windows, файловата система, Internet и други програми, сред които графичната Paint и динамичната Geonext. Всъщност Geonext и Paint за него бяха само поле за рисуване, тъй като не беше овладял динамничните възможности на Geonext.

Затова и динамичната среда Geogebra за него в началото беше само поле за рисуване. Въпреки това нашият петокласник много бързо овладя самостоятелно инструментите на продукта и създаде впечатляващи рисунки.

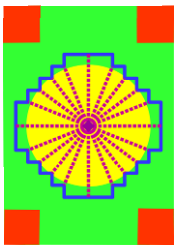
Представяме негови статични рисунки, направени чрез динамичната среда Geogebra като заместител на графичните програми.



Фигури

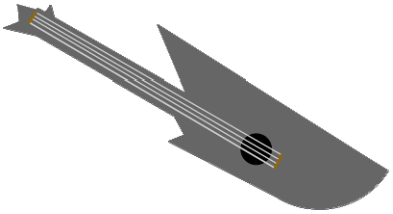


Път на тока - схема

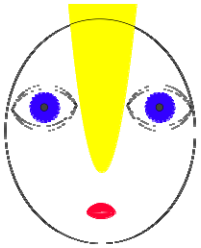


Гръб на карта

Слънчевата система



Китара



Човешко лице

В хода на заниманията му, които не бяха по-чести от един път седмично за около два часа, и след поредица от експерименти от негова страна за работата на различните инструменти, той откри за себе си начин да включи динамика в рисунките си.

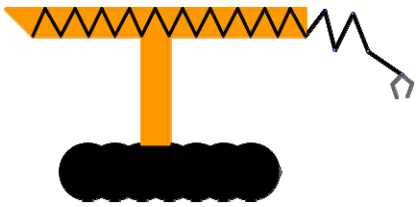
Първите му динамични разработки бяха създаването на кран, както и редица геометрични фигури, променящи положението си с движението на само една свободна точка.

После постепенно осъзна, че за да има динамика и част от обектите да се движат заедно с движението на дадена точка, то всички обекти трябва да са свързани с тази точка и следователно, зависими от нея.

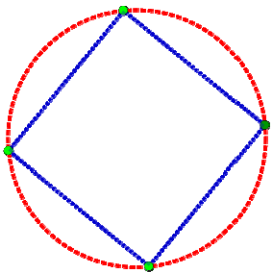
* Данаил Веселинов Гушев, ученик в Va клас на 107 ОУ „Хан Крум”, гр. София

Тогава, вдъхновени от интернет играта “Angry Birds”, се появиха поредица от динамични рисунки, в които различните птици летят и повтарят движенията и формата на събратята си от играта.

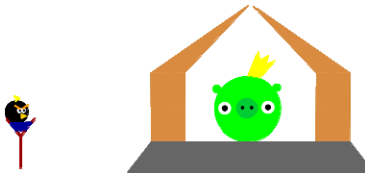
Представяме динамични рисунки, създадени чрез използване на част от възможностите на динамичния софтуер.



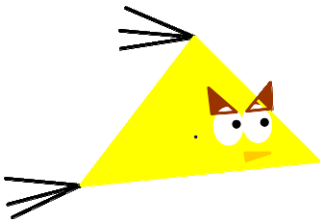
Кран



Геометрични фигури

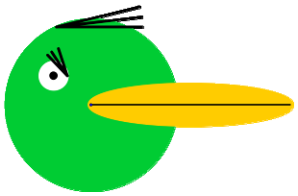


Angry Birds - Бомбата



Angry Birds - Пробивен удар

Angry Birds – Бомбата



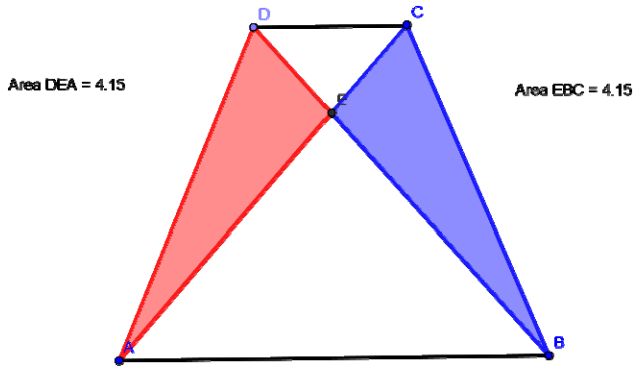
Angry Birds - Бумеранг

Около два месеца след началото на учебната година, във връзка с решаване на задачи от школата по математика, се появи необходимостта от създаване на поле за експеримент. Такова поле беше открито също в динамичния софтуер Geogebra. С негова помощ нашият ученик конструираше непрости геометрични чертежи, добавяше дължини на отсечки, мерки на ъгли, лица на фигури.

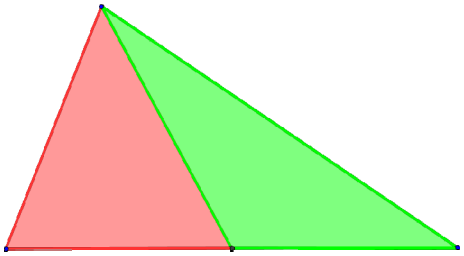
В началото на втория срок, сумирайки натрупаните си знания, той направи поредица от опити да използва компютъра, за да нарежда любимите си логически игри *Танграм* (от седем различни по големина и форма геометрични фигури се съставят различни по форма фигури, една от които е голям квадрат) и Яйцето на Колумб (от девет части с различна форма и големина се подреждат различни фигури, една от които има формата на яйце) [3].

В крайна сметка се получиха много добри симулации както на играта Танграм, така и на Яйцето на Колумб. За постигане на целта се наложи авторите да запознаят младия си ученик с част от по-сложните инструменти на динамичната среда (бутон за показване и скриване на обекти в чертожната повърхност и др.). Ученикът беше запознат и с някои твърдения по геометрия, изучавани в по-горните класове.

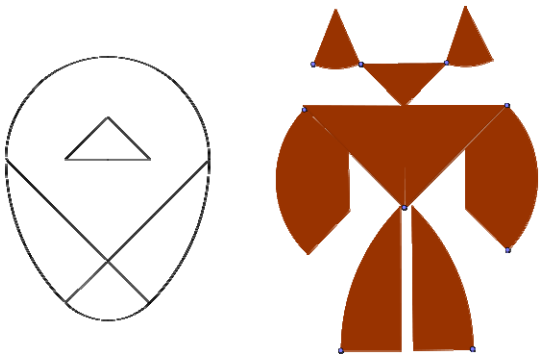
Следващите динамични конструкции онагледяват горепосочените примери (изследване на геометрични задачи и създаване на логически игри).



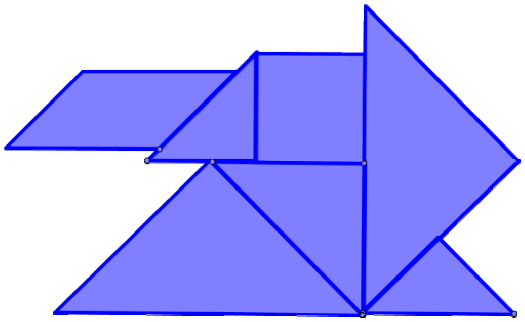
Задача за „пеперудката”



Задача за медианата



Викинг – Яйцето на Колумб

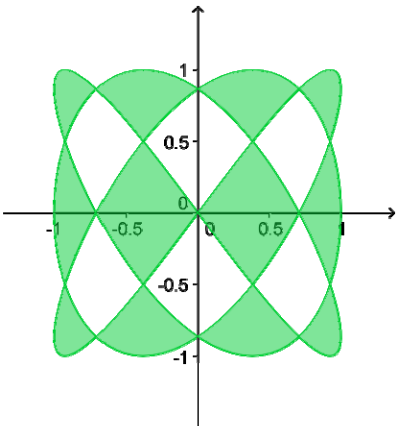


Танк от елементи на Танграм

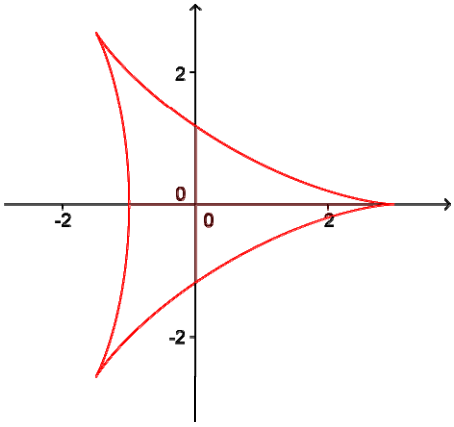
Сега ще разгледаме още някои от последните разработки на авторите, свързани с тяхната работа, в които се демонстрира една от възможностите на динамичната система Geogebra – да се създават нови инструменти.

По-конкретно ще демонстрираме как с помощта на Geogebra могат да се създават параметрично зададени криви, криви на Безие, както и кубични Ермитови криви. Тези приложения са използвани при обучението учители от СДК, както и на студентите от IV курс на специалност „Информатика” във ФМИ на СУ по предмета „Компютърна графика”.

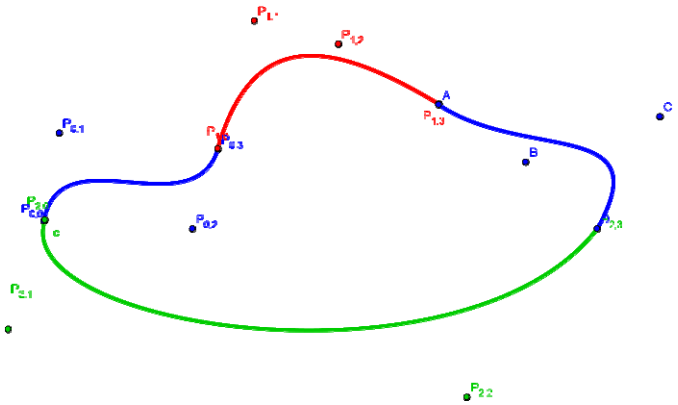
Представяме използване на продуктите за динамична математика за създаване на криви, чрез вградени и потребителски инструменти.



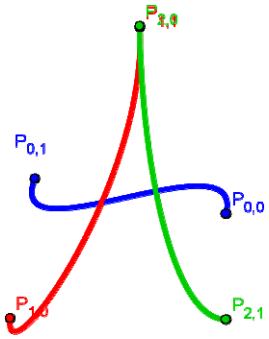
Крива на Лисажу 3:4



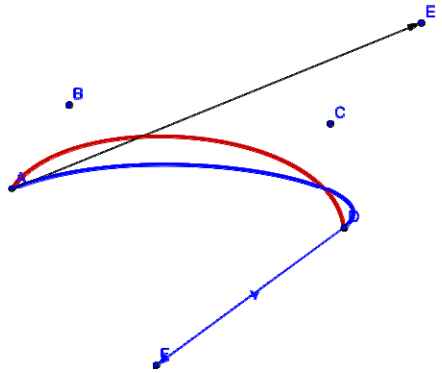
Хипоциклоида



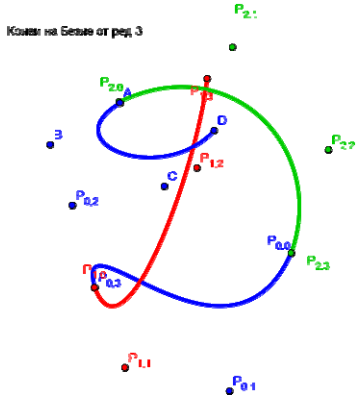
Криви на Безие от ред 3



Ермитови кубични криви

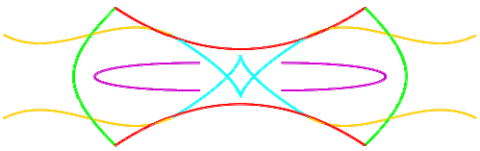


Кубични криви. С червено – криви на Безие, със синьо – Ермитови кубични криви

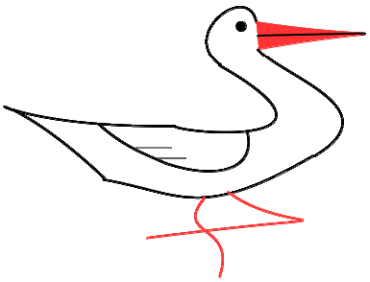


Буква с криви на Безие

Сега ще покажем резултата от еднодневните занимания на нашия ученик с инструментите за създаване на криви и по-точно с този за криви на Безие



Мотив за шевица



Щъркел

Накрая и неговото име, написано отново с криви на Безие:

Дадените примери показват, че няма възрастови граници за използването на продуктите за динамична математика. Няма и ограничения в начините на използването им и дълбочината на постигнатите резултати. Единственото ограничение се крие в собственото ни въображение и способности.

Литература

1. Кендеров, П. (2010) *Иновации в математическото образование: Европейските проекти Innomathed и Fibonacci,* Математика и Математическо образование, 2010, стр. 63-72.
2. http://www.geogebra.org
3. Златилов, В, И. Цветкова, Т. Тонова (2006) *Първа математическа читанка 3.-4. клас*, изд. Труд, София.

От любопитство към любознание

Боряна Куюмджиева
boryana_ak@abv.bg
МГ „Баба Тонка”, Русе

Резюме

Всички сме чели като деца народната приказка за двамата братя, които отишли за дърва, но на връщане, каруцата им се счупила. И като не знаели как да се справят, започнали да викат Неволята. Дълго я викали, но тя така и не идвала. Накрая се отказали, захванали се и сами оправили каруцата си. Сещам се за тази народна притча, когато трябва да изразя отношението си за нивото на образованието у нас и в каква степен то дава необходимите знания и умения на днешните ни млади хора. И не защото в училище те не получават необходимото, а защото не съм напълно убедена, че ние, учителите, акцентуваме и успяваме да бъдем максимално полезни в онези ситуации, в които няма готов отговор, а такъв трябва да се роди на момента.

В темата ще предложа примери, в които съм почувствала раждане на доверие и самочувствие в учениците, когато сме използвали теоретични познания за решаване на стандартни (и не до там стандартни за общоприетата ни методика) задачи. Ще наблегна на моментите, в които любопитството към неизследваната страна в поставения проблем отприщва бент от въпроси, които водят към задълбочаване на знанията и естествено прераства в любов към знанието. А любознанието, то остава завинаги!

Ключови думи

изследователски подход, проект Fibonacci, апроксимиране на графика на функция

1. Увод

Квестор съм на едно от поредните математически състезания. Срещу мен – ученици от втори до дванадесети клас. Замислени, съсредоточени – решават. В един момент, виждам вдигната ръчичка. Доближавам се до малчугана и изслушвам въпросите му. Състезанието свършва, а аз държа да се запозная с разтревожения сладур.

- *Как се казваш?*
- *Николай Здравков Камбуров, втори Б клас.*
- *От кое училище?*
- *„Фридрих Шилер”. (СОУПНЕ „Фридрих Шилер”, Русе)*
- *Искаш ли да ми кажеш коя задачка ти беше най-трудната тук?!*
- *Ей тази.*
- *Какво беше това, което не разбираше?*
- *„Колко двойни стаи трябва да се резервират към вече резервираните пет тройни стаи в хотел Самоков в Боровец, за да може да се настани група от двадесет и един души.”*
- *Така. Кое точно не ти беше ясно тук? Кое точно?*
- *Двойните стаи най-много не го разбрах.*
- *Аха, ами тройните...?*
- *И тройните не разбрах?*
- *А коя думичка още не разбра? За коя ме попита?*
- *Ами, дето ми я казахте тази „резервирането”, го разбрах, само че двойните стаи и тройните не го разбрах.*
- *Аха, и затова, тази задачка беше трудна, така ли?*
- *Да.*

Можем ли да си представим поне за миг какво се случва в съзнанието на един такъв малчуган, дошъл със самочувствие да реши задачите на голямо състезание, а всъщност попада в ситуация, в която не може да си представи условието на задачата. Не става дума да го осмисли и намери някакво логическо решение. Всъщност той няма представа, просто защото е много малък. Той няма житейски опит. Ники ми обясни с ентусиазъм, че е дошъл тук, вместо да бъде на рожден ден, че и в първи клас е бил на математическо състезание и че иска да учи в Математическата. Няколко години по-късно разбрах, че моят сладур Николай се е отказал от изява на математическата сцена. Кога, къде, как и защо го загубихме, не знам?!

Да дам материал за приятна умствена гимнастика, за тренировка на съобразителността и находчивостта. Задачи с необикновен сюжет, подстрекаващи любопитството, занимателни екскурзии в областта на историята на математиката, физиката, астрономията, неочаквани приложения на училищните науки в практическия живот – всичко това придава на моите книги привлекателност и повишава интереса към ученето”. Така обосновава целта на ученето Яков Исидорович Перельман – бащата на научно-популярната литература. Известен факт е, че е успявал да представи сложната теоретична материя чрез практически онагледявания, които да се възприемат убедително от неговите ученици – шлосери, моряци, работници, хора с богат житейски и професионален опит.

За мен неговите методически похвати са безспорен полезен опит в алтернативно поднасяне на математическата теория. Акцент на такава философия на мислене и преподаване е изследователският подход. Не дотам явното му присъствие в нашата образователна система поражда много въпроси, които намираме в съществуващите проблеми. Един от тях е, че днес намалява желанието на учениците за системно задълбочаване на знания, в частност в природо-математическите дисциплини. Липсва мотивация за подготовка и участие в различни форми на изява в областта на математиката, особено за възрастовата група от 9. до 12. клас. Причините за това са много. Някои от тях са свързани с липсата на подходяща стимулираща дейност от страна на съответните институции, с която да се засили желанието на учениците за представителни участия. Липсата на стимули не е само едната страна, макар че в днешната комерсиална действителност това си е направо важен момент. Освен това съществуването на прекомерно голям обем информация в интернет, която е достъпна във всеки момент, е свързана с липсата на желание у ученика да вземе книга в ръце. Това са част от обективните причини, от една страна, за нивото, до което можем да разчитаме на индивидуална инициатива на ученика да бъде творец. От другата страна сме ние учителите – с нашата основна подготовка, възможности за самоподготовка и усет към новите изисквания на информационния век. Подложени сме на външно преценяване за качеството на работа и резултатите от нея, за придобитите знания и умения у учениците, съответстващи на стандартизираното обучение. В този ред на мисли, за да разчупим стандартите, ние, учителите, се нуждаем от всичко, което е известно, отработено и приложимо, но с една важна подробност – да сме го приели като собствена стратегия и усещане за преподаване. Това означава, че всяко ново нещо трябва да е добре обосновано, за да стане вътрешна необходимост, т. е. да се приеме като философия на преподаване. Епизодично четем информация за опит, изведен при прилагане на нови технологии в обучението по математика [2, 3] на базата на различни динамични среди, учебни помагала, с помощта на графични калкулатори и компютри. Но...! Съществено е да се анализират въпроси като: по какъв път се стига до съзнанието на обучаемия, усеща ли той естествена необходимост от търсене на изход в поставения проблем? Съществува ли система за подготовка на младите специалисти - бъдещи учители по математика, чиято философия на обучение да е подчинена на изследователските принципи в методическата работа?! Колко от утвърдените учебни помагала поднасят знанията на принципа “От експеримента към доказателството”?! Тук ми прозвучава народната приказка за двамата братя, които отишли за дърва, но на

връщане каруцата им се счупила. Защото поуката ѝ е много ценна за тези, които търсят алтернативи за промяна на нивото на образованието у нас. Тя е за всички, които разчитат на приемственост в образованието, които не спонтанно, а целенасочено повеждат в света на иновациите, които успяват да разширяват кръгозора на знанията и уменията на днешните млади хора. Струва ми се, че мисията, която е отредена на нас учителите, е да бъдем максимално полезни в онези ситуации, в които няма готов отговор, а такъв трябва да се роди на момента.

Натрупването на знания е много дълъг и труден път, който задължително трябва да е в света на Любопитството и Любознанието. Ние обучаваме учениците, но как? Кои са проблемите, които са в основата на ученето и как могат да се разрешат те, без да се прилага стандартната постановка:

Определение – Теорема – Доказателство – Приложение,

а като се подходи с изследователска постановка:

Проблем - Експеримент - Хипотеза - Доказателство.

Опитът, който ще споделя, е представяне на епизоди от различни задачи, в които съм усетила как на базата на изследване любопитството към формулирания проблем прераства чрез спонтанни въпроси към осъзнаване на знанието, откъдето учителят повежда учениците си в света на любознанието.

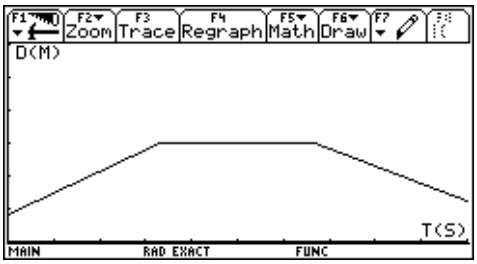
Началото бе с графичните калкулатори [4]!

– Госпожо, какво е това?

– Калкулатор, а това е детектор, с който се отмерва разстоянието, на което се намираш до стената.

– Какво да правим?

– Ще се движите така, че да отмервате разстояния, данните за които да изглеждат като ето тази графика (виж фигура 1).



Фигура 1

И екипът се ентусиазира. Всеки път се получават едни и същи възклицания от вида: „Ама, чакай, как да се движим?”, „Я, пробвай ти! Не, не така!”, „Трябва да вървиш напред!”, ”Не, бе, не виждаш ли, че слиза надолу, трябва да върви нагоре!”, „Я пробвай да вървиш назад!”, „Чакай, чакай, дай аз!”, „Абе, как ще се получи равно!?”

И така минават четиридесет и пет минути на проби и грешки, докато най-накрая екипът от ентусиасти, поддържани от целия клас, постигнат съвършенството – правят с общи усилия верните изводи. Първата част от графиката съответства на разстояния, които нарастват във времето на движение, т. е. с детектора трябва да се отдалечават от стената. Втората част се получава, когато стоят в покой, а в третата част – разстоянието намалява, следователно се връщат с детектора към стената. Убедена съм, че понятието монотонност на функция е важно понятие и неговото интуитивно поднасяне може да стане чрез този чудесен похват – учене чрез преживяване.

Фигура 2

Фигура 3

Когато изучавахме графики на функции ми дойде идея да попитам дванадесетокласниците си:

– Ще можете ли да ми дадете пример за движение, чиято графика да изглежда като тази крива? (Фигура 3) .

– Госпожо, ако застанем в центъра на Разград и наблюдаваме кола, която се движи по околовръстното…?

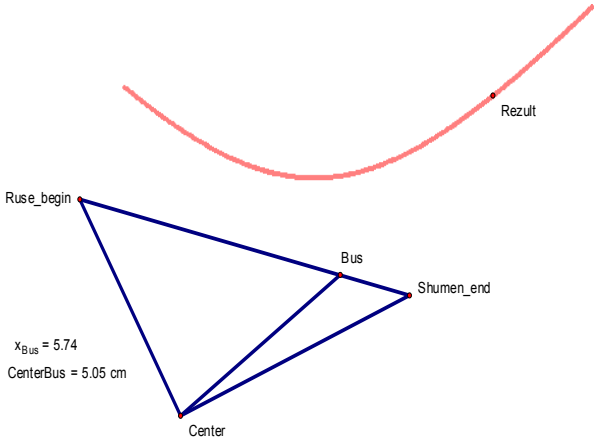
– И, какво...?!

– Ами във всеки момент ще измерваме разстоянието от нас до колата. Ако изобразим наредени двойки числа (време, разстояние) в координатна система, няма ли да се получи такава крива?!

– Ами... не знам!!! – бе моят отговор.

След часа извиках Теодор (така се казваше ученикът ми) и отново се захванахме с предложението му, което ми се видя изключително интересно. Пообсъдихме нещата математически и се оказа, естествено, прав!

И като стана дума за този пример, то такава задача си е в реда на нещата да бъде зададена като практическо задание в час. Може ли да се изпълни реално от всеки ученик?! Да! Достатъчно е с видео-камерата на GSM си да заснемат движение на обект по права линия, след това да направят измервания на разстоянията в началния и краен момент, да приложат теоремата на Стюарт за дължина на чевиана в триъгълник и да приложат апарата на математическия анализ, за да получат графиката на зависимостта $y = f(x)$, където x-координатата изразява времето, а $f(x)$ е разстоянието в дадения момент между наблюдателя и обекта.



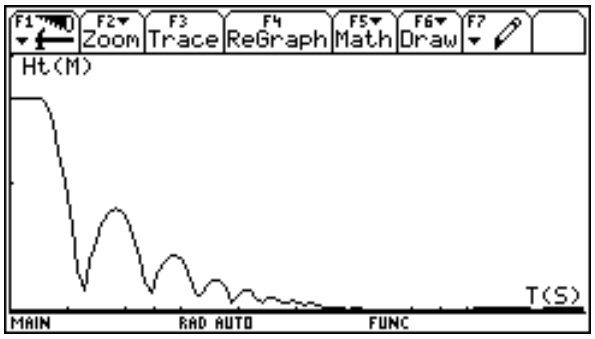
Фигура 4

А сега се досещате, че ще ми е много интересно, ако продължим с обсъждането, но например, обектът да не се движи по права линия! Или, ако двама наблюдатели снимат един и същ обект, но са на различна височина, то как ще се отрази това на крайните изводи? Оставям на любопитните да опитат сами, а аз продължавам в същия дух, но със следващите ми математически „неволи”.

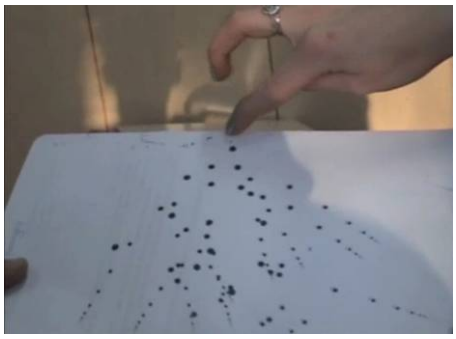
Явно използването на графичните калкулатори и аксесоарите към тях доста повиши интереса на учениците към изследователски дейности. Не можахме да устоим на изкушението да поиграем цели два часа с няколко метални топчета, калкулатор и детектор в ръце. А проблемът на учениците ми, Мая и Пламена, бе изследване на твърдостта на различни материали. Запалени по теоретичната физика те решиха, че ще им е необходима помощ и то точно с тези проби и грешки, за които искам да ви разкажа.

Проблемът е следният: *Вземате метално топче. Поставяте лист хартия, а върху него – лист индиго. Пускате топчето от известна височина. По отпечатаните върху белия лист хартия диаметри на следите на отскоците на топчето и височината, от която е пуснато то, да се проследи каква енергия отнема повърхността, от която отскача топчето и така да се направи извод за нейната твърдост*.

Интересно, нали! Опитът е известен под името *Hardness*. Особено, като си помисля, че тук се свързват две неразделни дисциплини – математика и физика. Представям ви графиката (виж Фигура 5), която получихме, когато топчето бе пуснато от височина почти половин метър, а повърхността беше мозайката в училищния ни коридор. На листа (виж Фигура 6) виждате данните от всички проби за последните два часа! Учениците разполагаха с формули, шаблони и таблици, за които им трябваха реални данни. На базата на направените експерименти Мая и Пламена написаха проект, който бе класиран на трето място в първата теоретична конференция на младите физици.



Фигура 5


Фигура 6

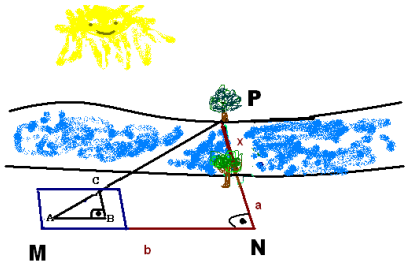
Изложените дотук идеи са интересни примери, с които се ангажира вниманието на учениците в поднасянето на математически факти чрез не дотам стандартни методи на изучаването им.

Технологиите днес са част от ежедневието ни. Няма ученик, който да не използва модерни GSM, таблет или лаптоп. Но според мен е правилно да насочваме вниманието на учениците и към решаване на задачи без използване на модерни технически средства. Има смисъл от възможността да преоткриват отново, с елементарни стъпки и подръчни материали, съществуващи теоретични модели и с помощта на житейски опит да добиват практика и знания, които да останат трайни завинаги. Преди да получат готовите отговори с калкулатор или да чертаят в графични среди, учениците трябва да имат вътрешното усещане за коректност и прецизност на изследваните резултати. На базата на усвоени знания те ще могат правилно да наблюдават, възприемат и анализират (с компютър) теоретичната материя.

Ще ви подскажа приложими сценарии, които успешно могат да бъдат свързани с конкретно учебно съдържание по математика, включено в задължителната подготовка. Ако изучавате тема *Подобни триъгълници* в девети клас, със сигурност ще се съгласите, че темата е достатъчно трудна за усвояване. А къде в практиката учениците биха използвали тези знания? Въпрос, който винаги стои пред всички, що се отнася за мотивация, че изучаваният материал не е само част от логическата верига математически знания, а е приложим и е част от нашето ежедневие. Представях си, че моите ученици ще почувстват по-близо теорията, ако тя бъде поднесена чрез ролева игра. Мислех си, че

екипната работа ще стимулира качественото осмисляне на теорията и ще подскаже нови идеи и въпроси, около които да се концентрират нашите изследователски решения. Не търсех реализация на идеите си само чрез динамични компютърни среди, а по-скоро насочвах вниманието си към идеята „Преживей, за да усетиш!”.

И така по книгата на Перельман „Забавна геометрия” предложих на моите единадесетокласници да филмираме различни етюди от нея. Например задачата за измерване широчината на реката, без да се преминава по нея. Идеята е проста, но много атрактивна (виж Фигура 7). Заставате от единия бряг на реката – в точка *N* и избирате два белега от двете страни на реката, лежащи на една линия по нейната ширина. Вземате дъсчица със забити върху нея пирони, разположени във форма на равнобедрен правоъгълен триъгълник - ΔABC. С помощта на дъсчицата подравнявате избраните белези (дървета) да съвпаднат с единия катет на триъгълника – *BC*. Движите се в една посока успоредно на брега до момента, в който пироните по хипотенузата – *AC* и срещуположно лежащият обект на отсрещния бряг застанат на една линия. Вече сте готови да намерите широчината на реката, защото са налице следните данни, означени на Фигура 8. Триъгълниците *MNP* и *ABC* са подобни, откъдето $\frac{AB}{BC}=\frac{MN}{NP}=1$, т.е. $MN=NP$. Оттук $b=a+x$, или търсеното разстояние $x=b-a$.



Фигура 7

Как ще се получи това в клас ли? Достатъчно е с тебешир да разчертаете на пода две успоредни линии. И оставяте екипа да проиграе вече описания сценарий! Ще измерват разстояния, ще получават резултати и, разбира се, ще се забавляват, докато учат! В темата Ви предложих част от реално преживени ситуации в час, в които съм почувствала раждане на доверие и самочувствие у учениците, когато сме използвали теоретични познания за решаване на стандартни (и не дотам стандартни за общоприетата ни методика) задачи. Наблегнах на моментите, в които любопитството към неизследваната страна в поставения проблем отприщваше бент от въпроси. Те водят към задълбочаване на знанията, което естествено прераства в любов към знанието. А Любознанието, то остава завинаги!

Литература

1. Перельман, Я. И. (1959) *Занимательная геометрия*, Москва.
2. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci.* 39 Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2010.
3. Баптист, П., К. Милер, Д. Рааб. *Към нов подход в математическото образование.* http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/SINUS_Bg-ver4.pdf
4. Куюмджиева, Б. *Общ преглед на възможностите на калкулатора TI – 92 и една идея за приложението им в конкретна тема от урочното съдържание по математика за 8 клас*, сп. “Математика и информатика”, бр. 5/2001 г., стр. 36.
5. Куюмджиева, Б. *Една интересна идея за демонстриране на калкулаторите при решаване на стратегически задачи*, сп. “Математика плюс”, бр. 4/2001 , стр. 71.

Приложения на еднаквостите в практиката

Ваня Лалева
Пловдив

Резюме

Разглеждаме няколко примера, с които да покажем на учениците, че математиката е възникнала в стремежа на хората да намерят решения на проблеми, появили се в реални ситуации.

Ключови думи

изследователски подход, проект Fibonacci, динамичен софтуер, еднаквости

1. Увод

Разглеждаме няколко възможности, с които да покажем на учениците, че математиката не е съвкупност от измислени понятия и твърдения, а е възникнала в стремежа на хората да намерят решения на проблеми, появили се в реални ситуации.

Темата **Еднаквости в равнината,** изучавана в осми клас, е от реално присъстващите преобразувания на фигури в бита и природата, за които почти всеки ученик може да посочи пример.

За **мотивиране** на необходимостта от изучаване на геометричното преобразование **Осева симетрия** и за **въвеждане** на понятието разглеждаме следната практическа задача:

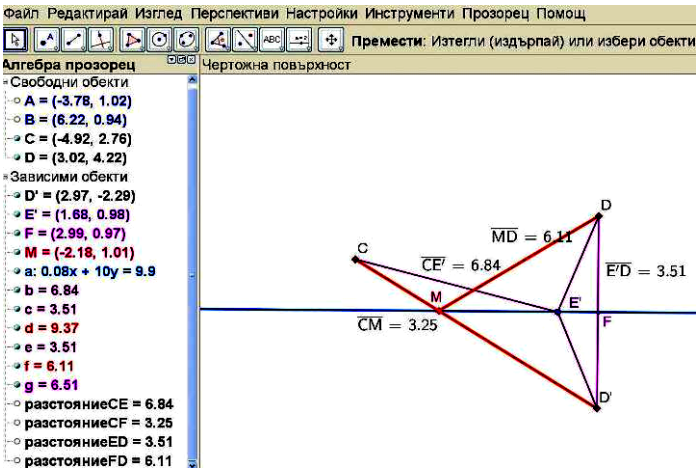
Задача 1. *Две селища се намират от едната страна на река. Необходимо е да се построи мост, който да ползват и двете селища. Изберете разположението им спрямо реката и определете мястото на моста, така, че да се построят възможно най-кратки пътища.*

В динамичната среда GeoGebra, с помощта на инструментите **Права през две точки** и **Точка**, построяваме модел на ситуацията (Фиг.1).

Избираме предполагаемото място на „моста” и с инструментите **Отсечка** и **Разстояние или дължина** построяваме „пътищата” и измерваме дължините им. Експериментираме „преместване” на „моста” с инструмента **Премести**, като следим изменението на сбора от „дължините на пътищата”. Наблюдава се намаляване на този сбор до определено място, след което той отново се увеличава. Изградена е хипотезата, че такова място съществува. Остава да го намерим и да докажем, че тогава сборът от разстоянията е най-малък. Да помислим за решението на задачата, ако селищата се намират на същите разстояния от реката, но в различни полуравнини относно реката. С инструментите **Перпендикулярна права през точка**, **Сечение на два обекта** и **Окръжност с център през точка** „преместваме” селището D от другата страна на реката. **Скриваме** окръжността и правата**.** Използваме твърдението: ”Най-късото разстояние между две точки е отсечката, която ги свързва” и с инструмента **Сечение на**

два обекта откриваме мястото на „моста”- М. Чрез еднаквостта на триъгълниците $\Delta DMF \cong \Delta D'MF$ и $\Delta DFE' \cong \Delta D'FE'$ и неравенството $CD' < CE' + E'D'$ за страните на $\Delta CD'F$ доказваме, че М е търсеното място за „моста”.

Отново се връщаме на точката D', която ни помогна да решим задачата и на преобразуваните по този начин точки от равнината относно дадената права, което преобразование се нарича **Осева симетрия**. По-късно отново се връщаме на чертежа, за да коментираме образа на отсечка и двойни елементи при осева симетрия.



Фигура 1

Накрая припомняме начина, по който построявахме графиката на функцията $y = |x|$, както и на $y = ax^2$, и отново намираме приложения на осеви симетрии.

Когато от учениците е усвоено определението за **осева симетрия** и умението да построяват образи и първообрази на точки и фигури при осева симетрия в тетрадките, е разумно да им покажем и да разрешим използването на динамичната среда GeoGebra и инструмента **Осева симетрия** за тази цел. Нека да им доставим удоволствието сами да откриват кога и как да прилагат геометричното преобразование, а построението да извършват рационално.

За любителите на билярда и на математиката е интересна следната задача:

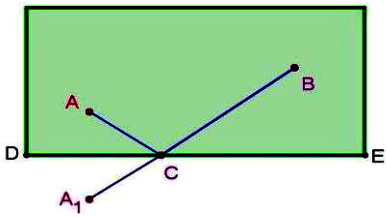
Задача 2. *На билярдна маса има две топки. Да се определи: А) от кое място на една от страните на масата трябва да се отрази едната топка, така че след това да удари другата? Б) от кое място на една от страните на масата трябва да се отрази едната топка, така че след последователното отразяване от две от страните да удари другата? В) от кое място на една от страните на масата трябва да се отрази едната топка, така че след последователното отразяване от три от страните да удари другата?*

Нека да направим модел на масата и топките. С инструмента **Отсечка с дадена дължина** избираме двата върха на масата, а с **Перпендикулярна права през точка**- правите през две от страните на масата. Избираме третия връх с бутона **Точка**, върху едната права и отново с **Отсечка с дадена дължина**, фиксираме четвъртия

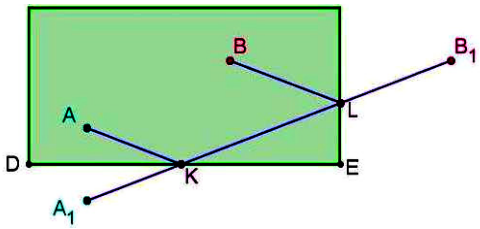
връх на масата. Маркираме „масата” с инструмента **Многоъгълник**  , за да можем да фиксираме „топките” върху нея с инструмента **Точка**  .

Искаме „топката” *A* след отразяването от страната *DE* да удари „топката” *B* (фиг.2). Анализираме ситуацията, припомняйки си закона от физиката „Ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение”. Достигаме до заключението, че отразеният лъч ще минава през образа на точката *A* при осева симетрия с ос *DE*, а падащият през образа на точката *B* при същата симетрия. Търсената точка е пресечна точка на отразяващата страна и правата, определена от едната точка и образа на другата точка, при симетрия с ос – страната.

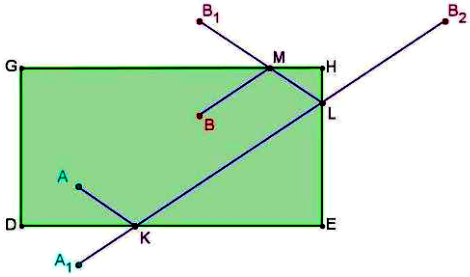
При две отразяващи страни (фиг. 3) се разглеждат две осеви симетрии и съответно при три отражения – три осеви симетрии (фиг.4).



Фигура 2



Фигура 3



Фигура 4

За въвеждане на преобразованията **Ротация** и **Транслация,** както и за изясняване на понятията **положителен и отрицателен ъгъл на въртене** разглеждаме следната задача, вдъхновена от задачата за хамалите [1]:

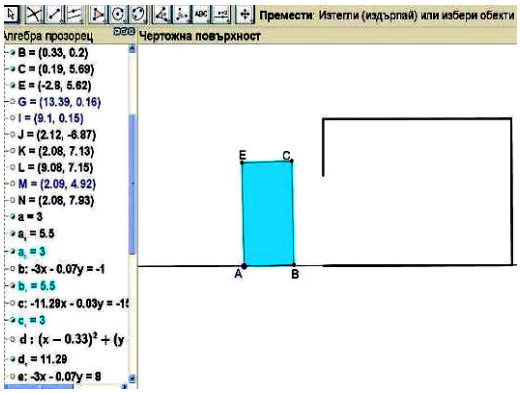
Задача 3. *Старинен неразглобяем гардероб е поставен пред вратата на стая (фиг. 5), като височината на гардероба е по-голяма от височината на вратата, но по-малка от височината на стаята, а широчината и дължината му са по-малки съответно от широчината и височината на вратата. Съставете стратегия за внасянето на гардероба в стаята. Следете движенията, които извършва стената, съдържаща вратите му.*

Демонстрираме преместването отначало на макети, като напомняме, че следим движението на вратите на гардероба. Коментираме началното преместване по „**посока**” към вратата (фиг. 6) и на определено разстояние, т.е. на определена „**дължина**”, и си припомняме изученото по-рано понятие, което има посока и дължина – *вектор*. Такова преместване се нарича **Транслация** или **успоредно пренасяне** и се определя от (посока и дължина) вектор на транслация. Естествено е следващото предложение да е **„завъртане”** (фиг. 7), като уточняваме **около** какво завъртаме, **в каква посока** и **на колко** градуса завъртаме**.** Информативно обясняваме, че това движение се нарича **Ротация** и се определя от три условия – център на ротация, посока на въртене и ъгъл на

завъртане. Следва внасяне в стаята (Фиг. 8) и „изправянето” на гардероба (Фиг. 9 и 10), като обръщаме внимание на обратната посока на завъртане .

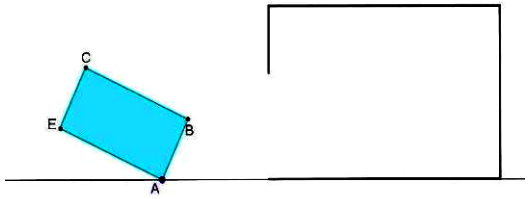
Предлагаме двумерен модел на разглежданата ситуация.

С помощта на инструментите **Премести**  и **Завърти около точка**  всеки ученик самостоятелно прилага съответните движения, като внимава гардеробът „да не минава през стените на стаята”.

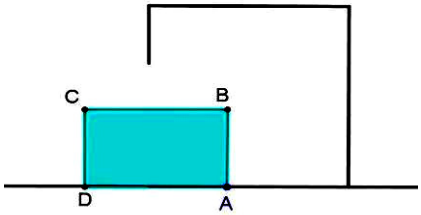


Фигура 5

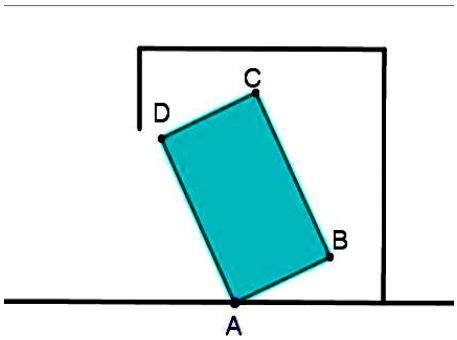
Фигура 6



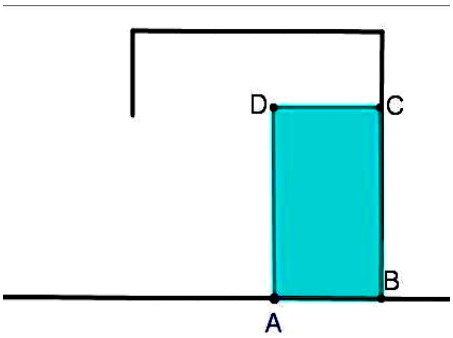
Фигура 7



Фигура 8



Фигура 9



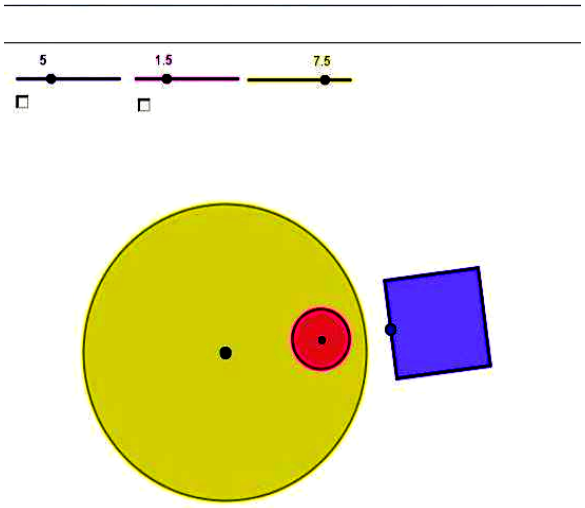
Фигура 10

Когато преценим, че необходимите знания и умения, свързани с геометричното понятие **Ротация** са усвоени, можем да проверим до колко това е така с поставянето на няколко практически задачи.

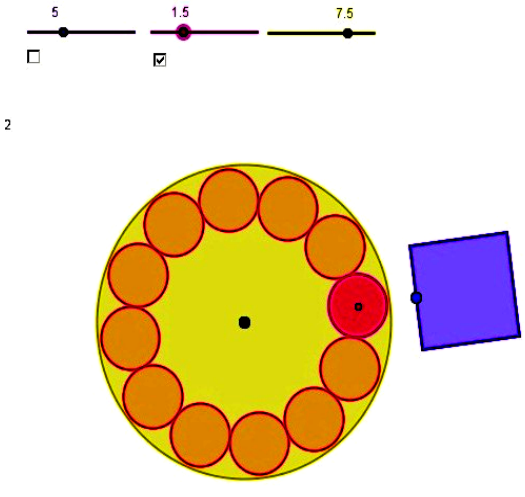
Задача 4. *Семейство си купило кръгла маса с диаметър 150 см. Мъжът се чудел дали около масата ще има място за 12 стола с размери 50 см на 50 см, а жената – дали ще могат да се подредят на нея 12 чинии с диаметър 30 см, като има достатъчно място за приборите за хранене? В динамичната среда GeoGebra направете модел на задачата и експериментално намерете отговора на въпроса на семейството.*

Чрез инструмента **Окръжност с център и радиус**  се създават моделите на маса с радиус 75 см и на чиния с радиус 15 см. На чертожната равнина не се виждат окръжности, защото радиусите са големи. С инструмента **Намали чертожната повърхност**  моделите се появяват във видимата част на екрана Построяването на квадрата-„стол” е известно на учениците (Фиг. 11).

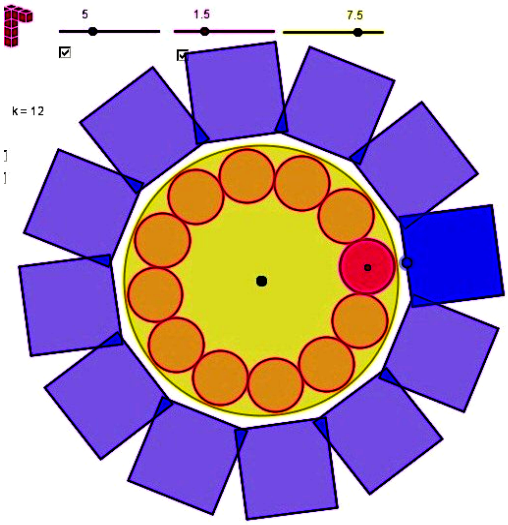
Коментират се предложенията за ротация с ъгъл на въртене $\alpha = \frac{360^\circ}{12}$=30° или $\alpha = -30^\circ$, или ротация и централна симетрия. Отговорите варират от „малко е тясно, но може”, който е подредил само чиниите (фиг.12), до „не може”, който е подредил и столовете, които се застъпват (Фиг. 13). Отговорът е „не” и от елегантните решения „В кръгов сектор с централен ъгъл 30° не може да се постави такъв стол” (фиг.14) и „Такъв стол може да се постави само ако ъгълът на въртене е по-голям от 40°, следователно отговорът е „Не” (Фиг. 15).



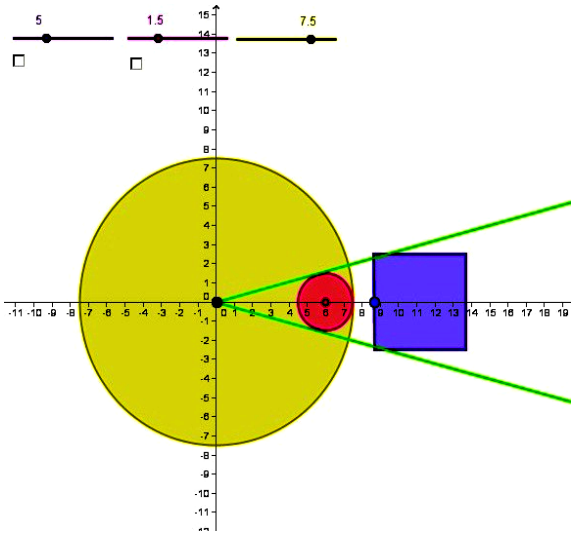
Фигура 11



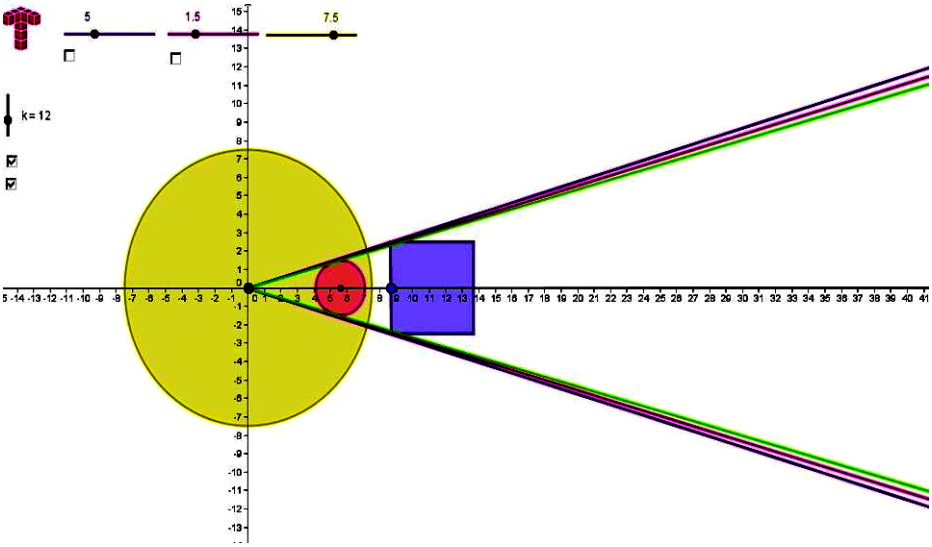
Фигура 12



Фигура 13



Фигура 14



Фигура 15

Литература:

1. Василева А., *Ако хамалите бяха математици и други екстрем(ал)ности*. Математика и информатика, бр. 1, 2011, с. 11-18.

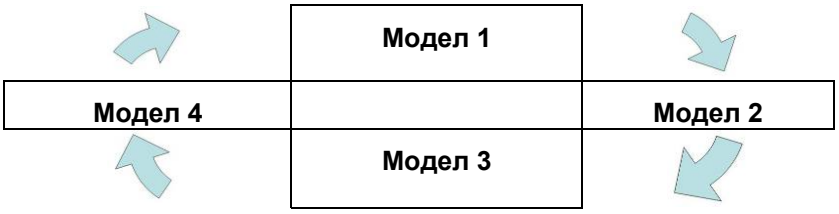
2. Чехларова Т. Д., Димкова, Е. Сендова, *Въздушни следотърсачи с GeoGebra*, Математика и информатика, бр. 6, 2010, с. 3-13.

Методика за представяне на модели в обучението по химия

Георги Гачев*, Йорданка Димова**
gachev@gmail.com; dimova@uni-plovdiv.bg
*** ИМИ – БАН, ** ПУ „П. Хилендарски"**

Резюме

*В тази статия представяме авторска методика за визуализиране на обекти в обучението по природни науки, която именуваме **Последователно представяне на модели** (**ППМ**). Методиката се основава на предположението, изказано от немския психолог Херман Ебингхаус (Hermann Ebbinghaus, 1850-1909), че първото впечатление се запазва най-ефективно в дългосрочната памет (primacy effect). Ебингхаус прави интересни експерименти със запомняне на думи, но е логично да се очаква, че това важи и за по-сложни обекти, например – модели.*



Фиг. 1.

В текста илюстрираме методиката върху темата „Строеж на атома" чрез четири модела на водородния атом. Тези модели са част от съдържанието на разработен от авторите нов програмен продукт, който може да подпомогне визуализацията и усвояването на представите за строежа на атома в интерактивен режим в курса по химия на всички равнища.

Ключови думи

изследователски подход, проект Fibonacci, динамичен софтуер, строеж на атома

1. Увод

Визуализацията чрез модели е един от най-актуалните фокуси на изследователския интерес в областта на съвременното обучение по природни науки (Science Education), тъй като информационните технологии навлязоха масово в класните стаи и позволяват да се онагледява в интерактивен режим и най-абстрактното предметно знание за изучаваните природни обекти [1, 2]. Безспорно всестранното разбиране на моделите и моделирането са съществени за ученето по химия [3], по физика и по биология.

2. Последователно представяне на модели

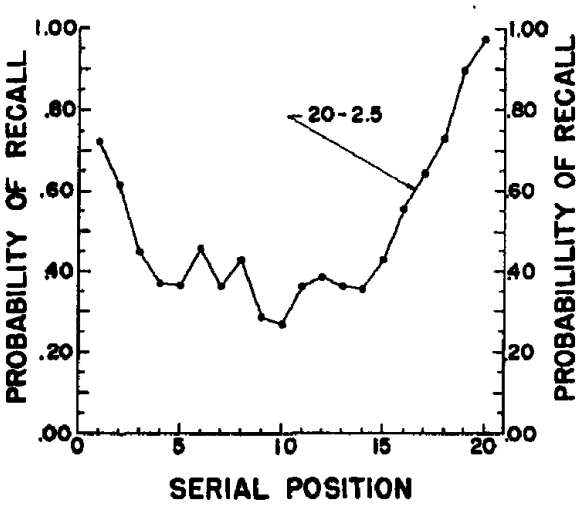
По традиция моделите се въвеждат последователно, адекватно на равнището на усвояваното знание, като познавателният процес се „движи" от визуализация на по-прости модели към по-сложни. Тази практика е свързана с господството на дидактическия

принцип за достъпност на учебното съдържание, който има педагогически и психологически съставящи.

А какво се случва, ако се предположи, че достъпно за съзнанието на младата личност е това, което е постигнала съвременната наука, включително – най-актуалните представи? Това би ни насочило към идеята онагледяването да се започва със съвременните модели на изучаваните обекти.

Тази идея може да намери психологически опори в предположението, изказано от немския психолог Херман Ебингхаус (Hermann Ebbinghaus, 1850-1909), че първото впечатление се запазва най-ефективно в дългосрочната памет (primacy effect). Ебингхаус прави интересни експерименти със запомняне на думи, но е логично да се очаква, че това важи и за по-сложни обекти, например – модели.

Ефектът на първото впечатление (primacy effect), наричан още ефект на положението в редицата (serial position effect), може да се представи графично:



Графиката изобразява вероятността да бъдат запомнени двадесет думи, произнесени последователно със скорост една дума за 2.5 секунди. (Bennet B. Murdock, Jr., 1962)

Нека приложим идеята на **primacy effect** към изучаването на абстрактни обекти чрез модели в обучението по природни науки.

Да предположим, че преподавателят разполага с няколко модела на един и същ обект. Моделите са с различна степен на сложност и трябва да бъдат представяни на учениците последователно. Какъв модел би трябвало да се представи в началото, за да се постигне primacy effect, по-сложен или по-прост?

Ако се започне с по-прост, учениците ще имат затруднение, когато се появи необходимост от усложняване или промяна на мисления модел, тъй като по-простият ще бъде активиран от дългосрочната памет по-бързо и вероятно – по-често, което от своя страна отново затвърдява по-елементарната представа.

От друга страна, ако първоначално бъде представен по-сложен модел, съществува вероятност повече признаци на модела да бъдат дълготрайно запаметени. Освен това, при последователно представяне на модели с низходяща сложност, поради различната индивидуална познавателна способност, учениците ще имат по-добра възможност да осмислят и усвоят най-сложния възможен модел (желателно е това да е първият).

Възниква въпросът: *Как да се определя колко сложен е един модел?*

Един подход е следният:

1. Определя се кой от моделите, с които се разполага, има най-много признаци, отговарящи на съвременните представи за изучавания обект – той трябва да бъде представен първи.

2. След него се работи с модел, който има по-малко на брой признаци и т.н.

3. С редукция на признаците се стига до най-опростения модел.

В схема 1 представяме методиката за визуализация, която именуваме *Последователно представяне на модели* (ППМ).

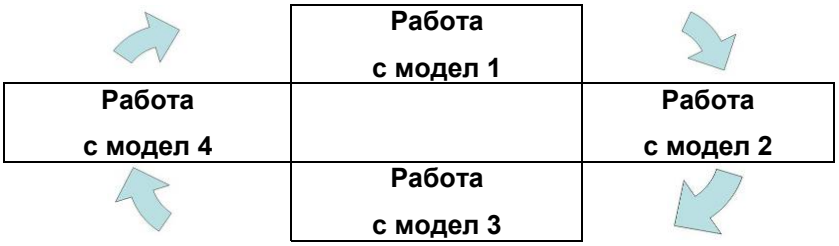


Схема 1

В схемата сме включили 4 модела, като отчитаме, че минималният брой модели трябва да е 2, а максималният – 4 (максималният брой модели зависи от степента на сложност на първия модел). Независимо от броя на моделите, задължително е изискването за „връщане” към първия модел и рефлексия над усвоеното знание за изучавания обект. И тъй като съществуват множество псевдо-тримерни графични среди, с чиято помощ може да се представят обекти, препоръчваме първият модел да е тримерен.

Всеки етап на работа с модел може да се алгоритмизира, като се използва „обърната” скала на когнитивните цели на Блум:

Действия	Цели
6. Оценка на осмисленото знание за обектите	1. Оценка
5. Формулиране на изводи за обектите	2. Синтез
4. Анализ на правилните и грешните стъпки	3. Анализ
3. Работа с модела в интерактивен режим – проби и грешки	4. Прилагане
2. Наблюдение на признаците на модела	5. Разбиране
1. Представяне на Модел (обобщено знание)	6. Знание

Бихме искали да уточним само един детайл от този алгоритъм. Действие 3. предоставя добра възможност да се манипулира с моделите – завъртане, увеличаване, намаляване на размера, построяване; разчита се на абдуктивно възприемане на материала, чрез проби и грешки; режимите на обучение може да са два – евристичен и тестов.

Считаме, че последователното представяне на модели (serial model presentation) е познавателен (когнитивен) похват, който има потенциал:

1. да стимулира познавателен интерес към съвременното знание, да подпомага ученето и да развива логическото и образното мислене на обучаваните;

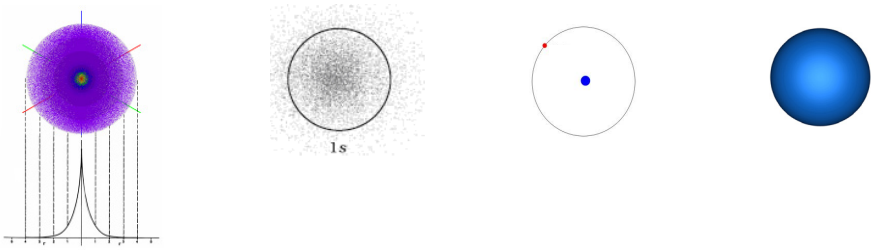
2. да разширява образната представа и да обогатява усвоеното знание за изучавания обект (при това, близостта на представата е точно равна на близостта на първия представен модел до действителността, такава каквато науката си я представя днес).

3. да формира и развива дигиталните знания и умения на обучаваните;
4. да разкрива научното знание в по-широк ценностен контекст.

3. Илюстрация – Строеж на водороден атом

Нашият обзор показва, че има недостиг от достоверни модели на атома, подходящи за интерактивно обучение по-химия в СОУ. Затова правим опит да разработим програмен продукт, който да демонстрира модели на атома – от достоверни до по-елементарни.

Нека да илюстрираме ППМ с най-простия пример – визуализация на представата за строежа на атома чрез модели на водороден атом.



Модел 1 Модел 2 Модел 3 Модел 4

Низходяща сложност на моделите

Схема 2

Чрез Модел 1 водородният атом се представя тримерно, като се използва съвременната представа за електронен облак. При Модел 2 изображението е двумерно. Модел 3 насочва към орбиталния модел на Бор с ядро и движещ се около него електрон, а Модел 4 „връща” към класическите представи на Далтон за неделимия атом (само с един признак – форма).

Очаква се в резултат от прилагане на ППМ учениците да постигнат ясно разбиране, че съвременните представи за строежа на атома са по-сложни от тези, които традиционно им се представят в учебниците. Това е важно разбиране, което създава нагласа и готовност у ученика за непрекъсната промяна на знанията. Очаква се и стимулиране на интерес към новите, по-задълбочени (по-)знания.

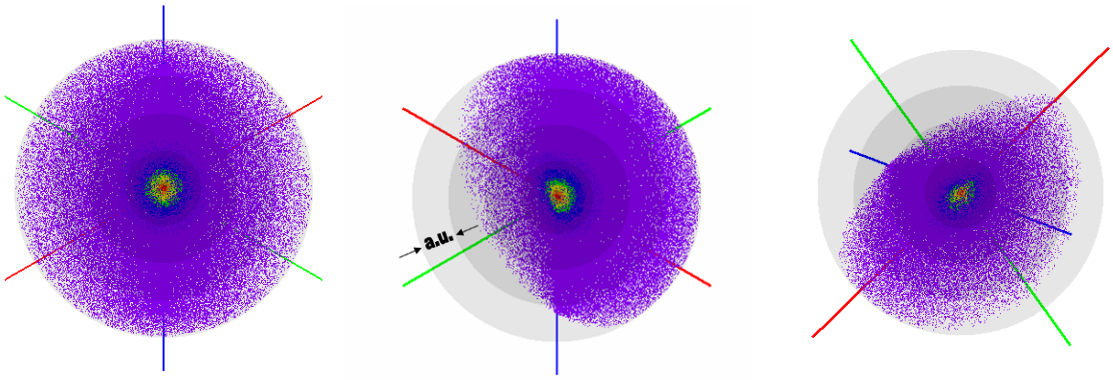
С този пример се показва, че прилагането на методологията ППМ в един урок има потенциал да представя съвременното знание в развитие, без да надхвърля границите на разбирането на ученика и без да изключва контекста на историческия процес на движение към „по-дълбоката същност” на изследваните обекти.

Експерименталната реализация на програмния продукт е осъществена с помощта на библиотеката за 2D и 3D компютърна графика OpenGL. Тя е избрана поради факта, че е платформено независима и това дава възможност бъдещият програмен продукт да бъде използван с различни операционни системи.

По-долу са представени резултатите от моделирането на вероятностната плътност на разпределението на електрон с 1s орбитала в обема на водороден атом:

Схема 3

Електронният облак, представян традиционно като двумерен модел



А) ***Б)*** ***В)***

Схема 4

Електронният облак е представен като тримерен модел.

Ето и някои свойства на тримерния модел.

- Изображението се формира от точките, които електронът е посетил при обхождането на атома, като местата с по-голяма вероятност преминават в червен цвят. Формирането на облака може да се наблюдава с анимация.
- Изображение Б) представя реалния размер на атома. Отбелязана е мерната единица a.u. atomic unit = 5.29 x 10-11 m или 0.529 Å (ангстрьом), а също и скала от сиви концентрични сфери. От схемата може да се определи радиусът на водородния атом 4 a.u. или приблизително два ангстрьома.
- Както при схема В) е възможно да се правят различни сечения на атома с цел по-подробното му визуално изучаване и запаметяване.
- Всички изображения могат да се увеличават и завъртат около трите оси, както и да се премине визуално през атома
- Моделите могат да се представят последователно като сценарии от методологията ППМ

4. Заключение

Методиката *Последователно представяне на модели* не е приложена все още в педагогическата практика. Предстои да се изследва нейната ефективност в обучението по химия при изучаване на темата *Строеж на атома*.

Литература

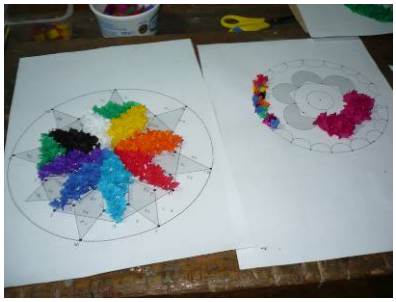
1. Kenderov, P., Sendova, E., Chehlarova, T. (2012) *IBME and ICT – the experience in Bulgaria*. В: Baptist, Peter and Dagmar Raab (eds.): Implementing Inquiry in Mathematics Education, Bayreuth 2012. pp. 47-54, ISBN 978-3-00-040752-9.
2. Gilbert, John K.; Reiner, Miriam; Nakhleh, Mary (Eds.). (2008) *Visualization: Theory and Practice in Science Education*. Series: Models and Modeling in Science Education, Vol. 3.
3. Justi, R., Gilbert, G. (2008) *Models and modeling in chemical education*. In: Chemical education& Towards research-based practice. Gilbert et al.(Editors), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, pp. 47-68.
4. Bennet B. Murdock, Jr. (1962) *The serial position effect of free recall*, Journal of Experimental Psychology, 1962, Vol. 64, No.5, p. 482-488.

Има ли място за динамичния софтуер в часовете по СИП „Приложник”?

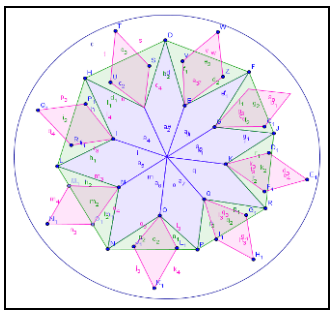
Даниела Кунчева
ОУ”Н. Й. Вапцаров”, с. Селановци, обл. Враца

Резюме

През настоящата учебна година водя СИП „Приложник” със седмокласници. Учениците ми имат добри познания за програмите Geonext и GeoGebra и бързо усвояват техники от приложното изкуство. Това залегна в основата на програмата на СИП-а. Идеята беше в колективната творческа работа да комбинираме математика и изкуство [1, 2], както и някои нови техники, които интернет предлага. Като крайна цел трябваше да организираме за 24 май изложба на декоративните чинии изработени от учениците. Чертежите на чиниите изработихме в GeoGebra, като с възможностите на динамичния софтуер от един чертеж получихме много голямо разнообразие на модели. Изследователски подход учениците приложиха не само при изработка на чертежите, но и при работата по двете техники – торцевание и изонит. Разполагахме само с описание на техниките, но нямахме готови мостри пред себе си. Всичко, което виждате като готови изделия, е лично творчество на участниците в групата и няма повтарящи се чинии. Моделите, цветовата комбинация и качеството на изработката изцяло зависи от конкретния ученик. Интерактивният подход в часовете поддържа интереса на учениците и техният брой постоянно се увеличава. Учениците ми се надяват благодарение на проекта Fibonacci творбите им да се видят от по-голяма публика.








Ключови думи

динамичен софтуер, приложно изкуство, торцевание, изонит, декупаж

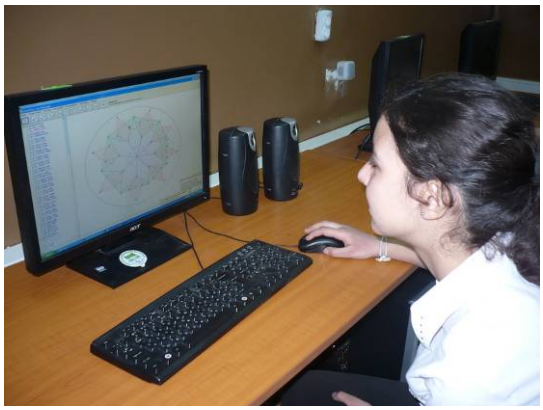
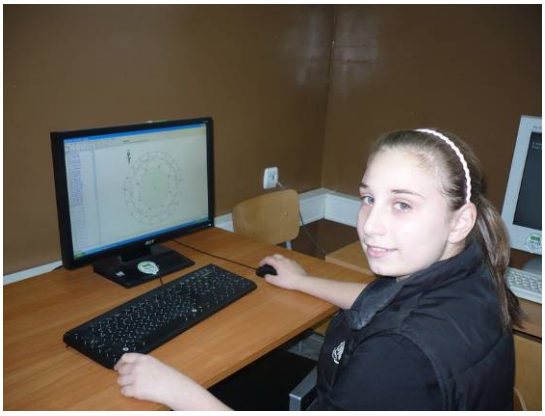
1. Увод

С възможностите на динамичните среди - *Elica, Geonext* и *GeoGebra* се запознах през 2009 г. като участник в проекта *InnoMathEd* [2]. Постепенно въведохме програмите в часовете по математика – ЗП и ЗИП в 5., 6., 7. и 8. клас. През учебната 2010/2011г. преподавах на VI клас математика, ЗИП математика и домашна техника и икономика. Тъй като имах възможност да комбинирам знания от различни области, позволих си да запозная учениците по ДТИ с нови техники, които заимствах от интернет и които те с много голямо желание усвоиха. Същите шестокласници бяха и основните участници в разработването на материала „С разместване на точки в *Geonext*, където сами бяха автори на задачи, използвайки динамичния софтуер. Със съставените задачи участвах в семинари по проект *Fibonacci* и учениците са запознати с идеята на проекта и с това, че техните разработки са споделени с други колеги. Поради голямото желание да работим нещо заедно (тази година при тях имам само математика и ЗИП математика) през настоящата учебна година заложихме СИП ”Приложник”. Идеята беше да продължим колективната творческа работа, комбинирайки математика, приложно изкуство и нови техники, които интернет предлага.

При съставяне на програмата за СИП-а трябваше да взема под внимание:

1. Добрите умения за работа на седмокласниците в *Geonext* и *GeoGebra***.**
2. Голямото желание да научават и прилагат техники, които за първи път виждат.
3. Желанието им да организират изложби и демонстрират наученото.
4. Трудната за мен задача да подбера и изпробвам техники, които ще са интересни и изпълними от учениците.

Основната задача, която прокарах през всички дялове на програмата, е да направим изложба от декоративни чинии, начертани и изработени от участниците в групата.

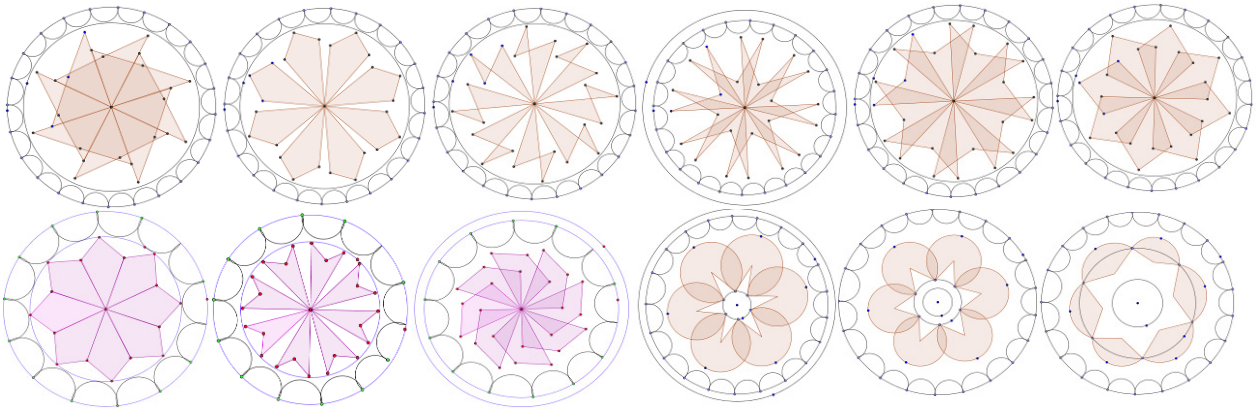

2. Изработване на чертежи

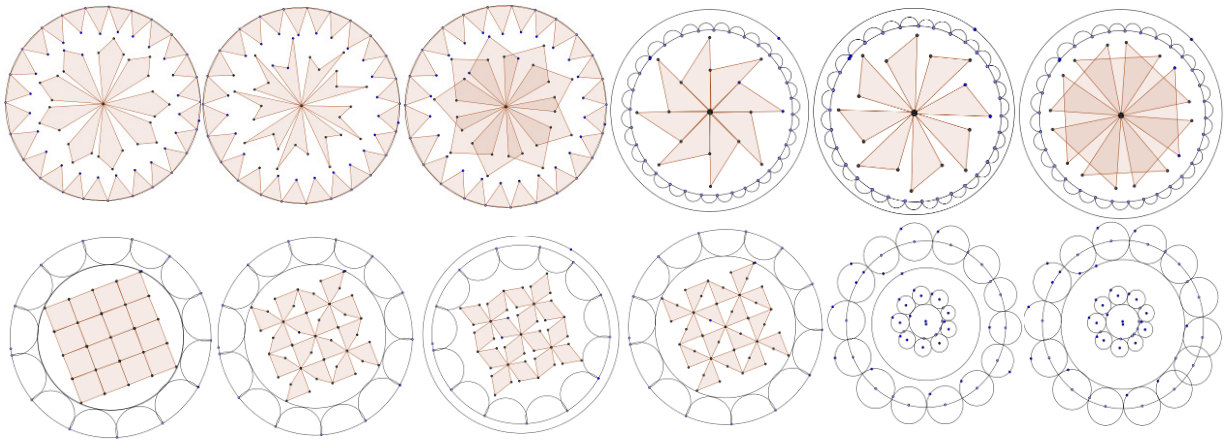
Изработката на чертежите отне известно време, защото знанията по математика не ни достигаха. Учениците, като малки изследователи стигнаха до идеята, че трябва да намерят центъра на чинията и тогава да чертаят елементи. Симетричните елементи бяха основни в техните модели. Неуспешните опити премахваха и започваха отначало. Уточнихме, че не трябва да има много ситни елементи, защото няма да могат да ги пренесат и изработят. За два учебни часа на всеки компютър имаше по един динамичен модел на чиния. За да принтираме моделите, трябваше да ги запишем като картинка, за да регулираме големината им съобразно размерите на чиния. При изваждане на първите модели започна да се чува коментарът, че всеки си харесва за изработка повече от един модел.

3. „Торцевание”

Извадихме чертежите на хартиен носител и започнахме с техниката „Торцевание” [3], която бяха усвоили предната година.

Тъй като тази година съм класна на V клас, поканих част от тях да видят какво работим със седмокласниците. Интересът беше предизвикан и малко по малко 10 петокласници станаха редовни участници в заниманията. Проблем бяха моделите, защото на пети клас тепърва предстоеше запознаване с динамичната математика, а седми клас ревниво пазеше собствените си модели. И на този проблем намерихме решение – динамиката в програмата. От всеки начертан модел с движение получихме голямо разнообразие от уж еднакви, но различни варианти:





Налепените чинии монтирахме върху подложки (чинии за еднократна употреба), окачихме ги на стената и стаята грейна от пъстротата на цветовете:

Изследователският подход беше приложен не само при начертаването на различните модели, но и при подбора на цветовете и решението как да изглежда готовата декоративна чиния.

4. „Изонит”

Време беше за нова техника. Техниката, която предложих на учениците, се нарича *изонит-бродерия* [4] върху картон и е много стара. Показах им първия изработен от мен модел и седнахме отново пред компютрите. Използвайки динамичния софтуер, извадихме голям брой модели, които колкото си приличаха, толкова се и различаваха. Пренасянето на чертежите, върху хартиените чинии е доста трудоемка работа. В началото сама дупчех чиниите, но в последствие част от учениците усвоиха и това умение. Трудностите при първите чинии отказваха учениците, които искаха да си лепят, защото си го могат. Наложи се да приложим изследователски подход и при работа с игла – вдяване на конец, връзване на възел, усвояване на бодове. Постепенно трудната техника беше усвоена и в момента имаме немалък набор от готови модели.

5. „Декупаж”

Последната заложена техника е „Декупаж” [4], която учениците са пробвали предната година върху шишета. Тази година заложих декупаж върху чинии.

6. Заключение

Заниманията в СИП-а са два часа седмично. Показателно за интереса на учениците е, че от 13 души в началото на годината в момента групата се състои от 24 ученици от VII и V клас. Усещат се приятелските взаимоотношения и задоволството от добре свършената работа. Всички участници в групата се възприемат като малки изследователи, защото това, което изработват, го нямат като модел. Всичко сътворено от тях е плод на лична идея – модел, техника, цветова схема и качество на изработката. Изложбата с готовите чинии представихме на 24 май в читалището в с. Селановци.

Литература

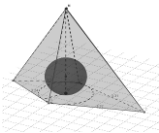
1. Chehlarova, T., E. Sendova. *Stimulating different intelligences in a congruence context. In: Constructionist approaches to creative learning, thinking and education: Lessons for the 21st century*. Proceedings for Constructionism 2010. The 12th EuroLogo conference. 16-20 August, Paris, France. 2010. ISBN 978-80-89186-65-5 (Proc)
2. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*. 39 Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2010.
3. *Торцевание*, http://krokotak.com/2011/03/tehnika-tortsevanie/, 22.02.2013 г.
4. Как да шием по картичките – изонит, http://rallitoblog.blogspot.com/2010/05/blog-post_14.html, 22.02.2013 г.
5. *Декупаж*, http://bg.wikipedia.org/wiki/Декупаж, 22.02.2013 г.

Може ли изучаването на стереометрия да бъде начин за забавление?

Даниела Петрова, Ангел Миланов
dan_petrova@yahoo.com, angel.milanov@gmail.com
91. НЕГ „Проф. К. Гълъбов”, София

Резюме

Вписани и описани тела - материал, за който практиката ми е доказала, че не е най-обичаният от учениците. Исках да го направя по-примамлив и реших, че начинът е да използвам 3D-геогебра. Не ме уплаши това, че е β-версия. Запретнах ръкави и


започнах да се забавлявам с направата на интерактивни чертежи. Резултатите бяха интересни. Във всеки клас учениците се разпределиха в 5 отбора (разполагахме с 5 лаптопа) и всеки от тях избра тема за изследване. Времето за „откривателство” беше 2 учебни часа. След това всеки отбор докладваше пред класа.

Получиха се много интересни дискусии с често срещания в тях красив въпрос „Защо?”. Една от най-разгорещените беше по повод вписания в четириъгълна пирамида прав кръгов конус. Много ме зарадва и възклицанието: „Тук има някакви отношения!”. Това възклицание доведе до превъзходно подаване на идеи между участниците в отбора и между тях и класа. В някои случаи отбори обединиха усилията си в разглеждането на подобни ситуации (примерно: вписан прав кръгов конус и вписано кълбо).

За младите хора не представлява затруднение да изпробват дадена математическа ситуация в подходяща компютърна среда, за да добият по-ясна представа за нещо, което би било иначе абстракция за тях. Логическите връзки се изграждат по-бързо с дигитален модел, който е много гъвкав инструмент за онагледяване.

Докладите на отборите все още не са свършили и не сме започнали с решаването на задачите, но на мен вече ми е топло на душата. Радвам се на това, че накарах учениците да мислят в контекста на предизвикателна математическа ситуация. Бях изненадана, че много малко от тях използваха поставените насочващи въпроси и указания във файловете. Разбира се, имаше ученици, които се опитаха избягат от задачата си. Имах и проблеми от чисто техническо естество, и с работата с β-версията на GeoGebra, но искрено се забавлявах, защото и аз бях в ролята на изследовател. Надявам се, че след някоя седмица ще мога да си кажа, че не съм сбъркала с избора на този нетрадиционен начин за преподаване на стереометрия.

Ключови думи

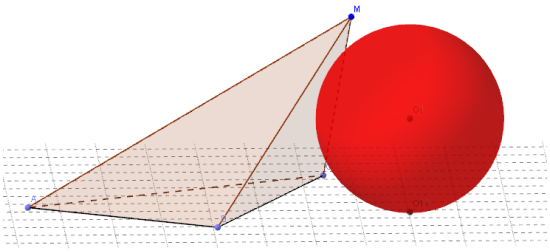
изследователски подход, проект Fibonacci, GeoGebra, стереометрия, вписани и описани тела

Предистория

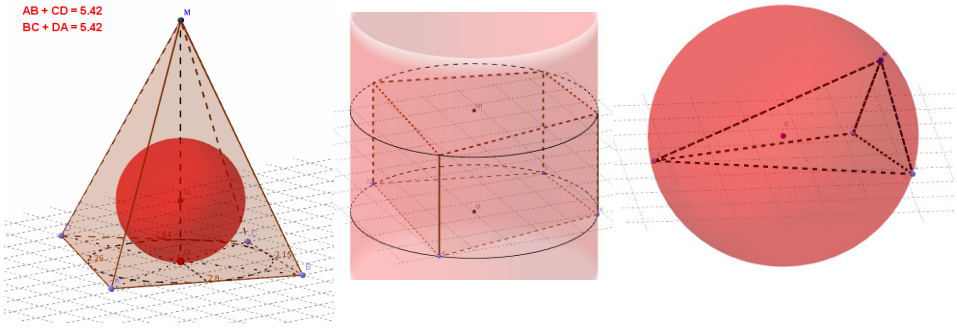
За нещо различно щом ти си готов,
прави го! И нека урокът ти нов
да бъде по-свеж, по-разчупен, със смях!
Дано да си кажеш след него „Успях!”.

Вписани и описани тела. Материал, който практиката ми е доказала, че не е най-обичаният от учениците. Исках да го направя по-примамлив и реших, че начинът е да използвам динамична среда, в която чертежът може да се уголемява, смалява, да се върти и разглежда от всички страни. Лесно могат да бъдат добавени точки, отсечки, да бъдат измерени разстояния, големини на ъгли, лица на фигури. Това дава възможност да се открият зависимости, които иначе даваме наготово на учениците или откриваме с помощта на много чертане. В случая използвах 3D-геогебра.

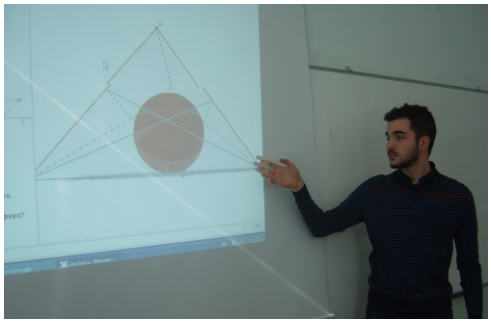
Гледната точка на учителя



При подготовката за урока се чудех дали си струва отделеното време, защото работата с бета-версия понякога доста изнервя. Налагало ми се е в рамките на 1 час да затворя и отново да отворя няколко пъти работния прозорец, да рестартирам компютъра и да похабя доста нерви. Но през цялото време си казвах, че, ако издържа, ще потвърдя за пореден път мнението си, че излизането от традиционното е запомнящо се и дава добри резултати. Крепеше ме и чувството, че се забавлявам и детинската радост, когато успявах да измисля начин да попълня и надхитря пропуските в недовършената версия на геогебра. В един момент offline-версията спря да изпълнява командата Pyramid и реших да пробвам да създам пирамида по дадените й върхове в online версията.



Опитът се оказа успешен и след това при подобни проблеми действах по същия начин. При построяването на ъглополовяща равнина при основните ръбове на триъгълна пирамида се наложи да се преборя и с един проблем, който доведе до интересна ситуация – кълбото, което трябваше да е вписано, в определени моменти ставаше външно-вписано, защото не можех да



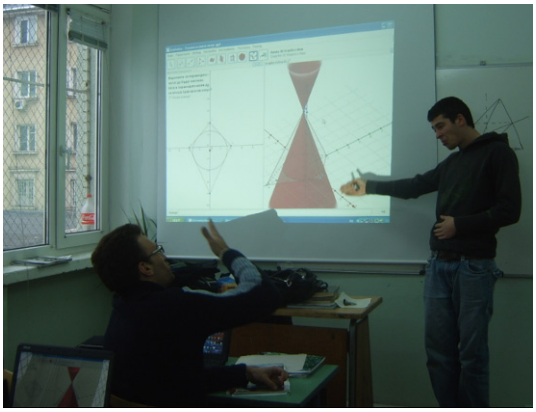
задържа ъглополовящата равнина между основата и околната стена в правилната посока. Имам и един проблем, който все още не съм изчистила – една и съща формула води в повечето случаи до правилното изписване на ъгъл с число, по-голямо от 90, а в един случай си стои като отрицателно число. Въпреки всички трудности, а може би и точно заради тях, ми беше интересно да направя чертежите. Възможността да разглеждам телата от всички страни помогна дори на мен да се справя по-лесно при съставянето на чертежите, когато „влизахме” в конус и кълбо.

Направих чертежи, с които онагледих вписването на цилиндър, конус и кълбо в пирамида и описването им около пирамида. Имаше и чертежи за вписване на цилиндър и кълбо в призма и описването на цилиндър и кълбо около призма. В училищния курс се разглеждат предимно прав кръгов цилиндър и прав кръгов конус. Това не ми попречи да направя един чертеж с наклонен конус, за да илюстрирам теоремата-признак за вписване на кълбо в пирамида в общия случай.

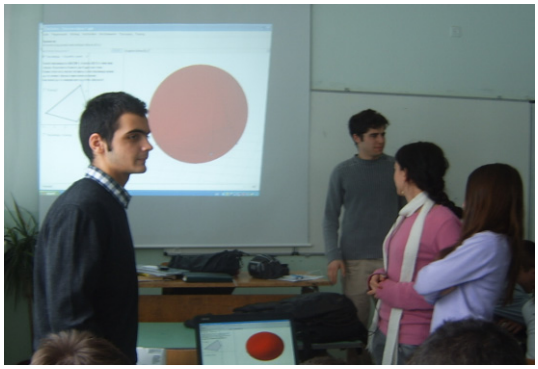
Решаването на задачи и следващата контролна работа ще покажат дали съм постигнала целта си. Иска ми се учениците да не се плашат при решаване на задачи с вписано кълбо и всякакви вписани едно в друго тела.

Училището ме подсигури с 5 лаптопа и стая с достатъчно контакти за тях.

Направих чертежите, пуснах ги в действие и с огромен интерес наблюдавах какво се случва.



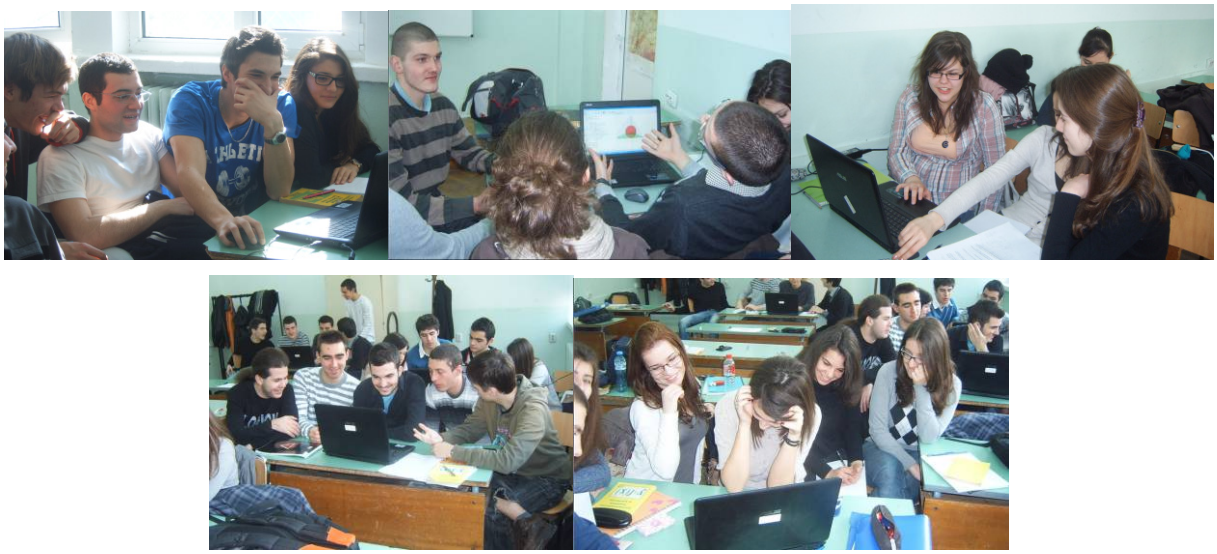
Понякога и докладването може да е смешно



Отборът отговаря на въпроси

Различните часове

Във всеки клас учениците се разпределиха в 5 отбора и всеки от тях избра тема за изследване. Всяка тема беше подсигурена с поне 2 динамични чертежа. Времето за „откривателство” беше 2 учебни часа. След това всеки отбор докладваше пред класа.



Усмихнатите лица са доказателство, че можем да учим, забавлявайки се!

Оказа се, че не е трябвало да си спестявам извеждането върху екрана на сбора от срещуположните ъгли на вписан в окръжност четириъгълник, както и сбора от страните на описания около окръжност четириъгълник. Нямаше клас, в който да не започнат сами да преправят четириъгълниците така, че да могат да ги контролират по желания начин. Това ме накара да направя въпросните допълнения за следващите часове.

Мислех си, че учениците ще имат нужда от моята помощ по време на откриването на връзките между елементите в разглежданите чертежи. За да не се разкъсвам между отборите, бях подготвила върху всеки чертеж достатъчно стъпки за подсказване в случай на необходимост. Бях изненадана, че много малко ученици използваха поставените насочващи въпроси и указания във файловете. Повечето дори не бяха забелязали, че има поставено на екрана мъничко копче за помощ. Въртяха чертежите, гледаха ги от всички страни, поставяха точки една над друга, за да постигнат желаното. Всички се стремяха да открият възможно повече закономерности в конструкциите си. И се забавляваха. Дори в един от класовете обявиха съревнование между отборите.

По време на отборното разглеждане на задачите и след това, при докладването пред класа, се получиха много интересни дискусии с често срещания в тях красив въпрос „Защо?”. Една от най-разгорещените беше по повод вписания в четириъгълна пирамида прав кръгов конус. Стигнахме до разискване на дефиницията за конус в общия случай. Констатирахме факта, че ъгълът между оста на конуса и образуващите е постоянен в правия кръгов конус и се променя в наклонения. Говорихме и за това, че в геогебра конусът е определен по върха, оста си и ъгъла на въртене на образуващата. Споменахме коничните сечения и това ще е следващата тема за разискване с помощта на геогебра.

Наложи се повече да се застоявам при отборите, които имаха задачата за вписано в пирамида кълбо. В един от класовете, в резултат от поставен въпрос, показах на отбора цялата ъглополовяща равнина, а не само онази част от нея, която е между стените на пирамидата. След това те използваха същите стъпки, за да онагледят по-добре представянето си.

При докладване на отбор, който имаше задачата за вписано в пирамида кълбо, една от девойките възкликна: „Тук има някакви отношения!”. Това възклицание доведе до превъзходно подаване на идеи между участниците в отбора и между тях и класа. Другата девойка в отбора се сети, че търсеното отношение идва от свойството на ъглополовящата в триъгълник. Ученици от останалата част на класа подеха идеята и с

общи усилия търсеното отношение беше намерено. За да го онагледи, Ангел направи допълнение към чертежа, оцвети го и… аз бях на върха на щастието.

В някои случаи отбори обединиха усилията си в разискване на подобни ситуации (при вписан прав кръгов конус и вписано кълбо). Имаше и предположение за това, че върхът на наклонения конус, центърът на вписаното кълбо и единият фокус лежат на една права. Още в междучасието започнахме да проверяваме и въпросът остана за следващи дискусии. Имаше и спорове трябва ли пирамидата да е правилна, за да може да се впише в нея кълбо. Коментирахме аналогията при вписване на кръг в четириъгълник и кълбо в четириъгълна пирамида.

Гледната точка на Ангел, един млад човек, който търси отговори, често ги намира сам и не се предава лесно:

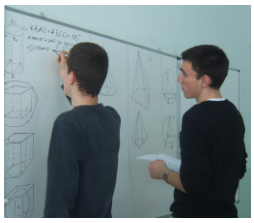
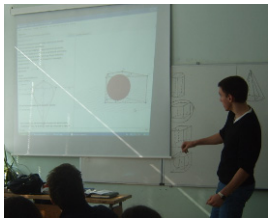
„Като ученик и млад човек харесвам новите и авангардни идеи. Смятам, че най-лесният начин за научаване е чрез наблюдение и осмисляне; бихме могли да се възползваме от нововъведенията в техниката, за да улесним този процес, вместо да чертаем на ръка. Освен това за младите хора не представлява затруднение да изпробват дадена математическа ситуация посредством подходяща компютърна среда, за да добият по-ясна представа за нещо, което би било иначе абстракция за тях. Логическите връзки се изграждат по-бързо с дигитален модел, който е много гъвкав инструмент за онагледяване.

Докато решавам домашно, понякога се възползвам от възможностите на геогебра, за да достигна до отговора по-бързо. Друг път се наслаждавам на красотата на математиката, когато е пред очите ми, особено на геометрията. На мнение съм, че в България изобщо не изоставаме в областта на информатиката и така трябва да си остане. Напълно подкрепям учителите новатори и напредничавите методи на преподаване.“

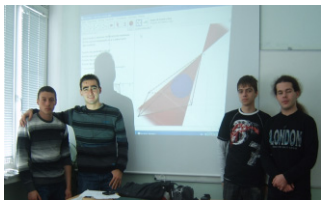
Плюсове и минуси

Минуси:

- Зависим от техниката (компютри, проектор), за да можем да я ползваме.
- В 3D-геогебра все още няма готови инструменти за ъглополовяща равнина и възникват проблеми с командите, заради това, че версията е недовършена.
- Необходимо е много време за предварителна подготовка на урока.
- Недостатъчно е времето в часовете по математика – работата с геогебра често губи повече време от преподаването по традиционен начин.
- Някои ученици се опитваха да не работят в часа по поставената задача, като пускаха игрички на компютъра. Други не се включваха в дискусиите на съотборниците си.

Доклад и записване на обобщение след него




След докладването

Плюсове:

- Излизаме от рамката на традиционния час по математика.
- Предизвикателство за мен – използвах елементи от аналитичната геометрия, за да претворя чертежите от главата си в геогебра.
- Работата с 3D-геогебра дава възможност чертежът да бъде разглеждан под произволен ъгъл и да бъде смаляван или увеличаван.
- Даваме възможност на учениците за творческа изява.
- Приучаване на работа в отбор.
- Красивите дискусии, които в традиционния час са рядко явление.

Вместо обобщение

Докладите на отборите все още не са свършили и не сме започнали с решаването на задачите, но на мен вече ми е топло на душата. Радвам се на това, че накарах учениците сами да преоткрият изучавания материал. Радвам се на това, че те не избягаха от мисленето и чух неочаквани за мен предположения, които предстои да проверим. Направи ми много добро впечатление, че доста отбори си бяха приготвили записки, за да не пропуснат нещо важно при докладването си. Един артистичен младеж даде отговор на сериозен въпрос с физиономия и поза на шоумен, с което внесе смях в дискусията. Радвам се, че имам и съмишленици в лицето на Ангел. Той има идеята да направи инструмент за по-лесно построяване на ъглополовяща равнина и да направи чертеж, с който да илюстрираме коничните сечения.

Разбира се, имаше и ученици, които искаха да избягат от задачата си – опитаха се да редят пасианси и да сърфират в интернет, след като, според тях, са приключили работата си. Имаше и няколко пасивни участници в отборите. Но това беше само една тъмна капка в морето от слънчеви емоции.

Радвам се, че с Ангел сме съмишленици. Направата на използваните в урока чертежи съвпадна с приключването на първия срок и нямаше как той да се включи по-активно в разработката им. Сега Ангел има идеята да направи инструмент за по-лесно построяване на ъглополовяща равнина и да направи чертеж, с който да илюстрираме коничните сечения.

През цялото време искрено се забавлявах и се радвам, че не се отказах от идеята си. Надявам се, че след някоя седмица (след контролната работа) ще мога да си кажа, че не съм сбъркала при решението си да преподавам стереометрия с помощта на динамичен софтуер.

Литература

1. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*, Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39. пролетна конференция на СМБ, 2010.

Еднаквостите могат да са красиви, а не сухи и скучни - споделен опит за паркетиране на равнината с ученици 7. клас (в час по ИТ)

Елисавета Стефанова,
mamajoni@abv.bg,
73.СОУ"Владислав Граматик"- София

Резюме

В работата се споделя интересът на учители, ученици и родители към изследователския подход при усвояване на математически знания, чрез динамични геометрични конструкции и картинки в стил Ешер, направени на Geogebra. Като следствие от опита с тази програма се описват няколко последователни стъпки към откриването и натрупването на опит с еднаквостите, при решаване на математическо-художествената задача за паркетиране на равнината, а може би и нещо повече... Загатват се бъдещи планове както и интегриране на математиката с ИТ и изобразителното изкуство.

Ключови думи

геометрични трансформации, паркетиране на равнина, изследователски подход, Ешер

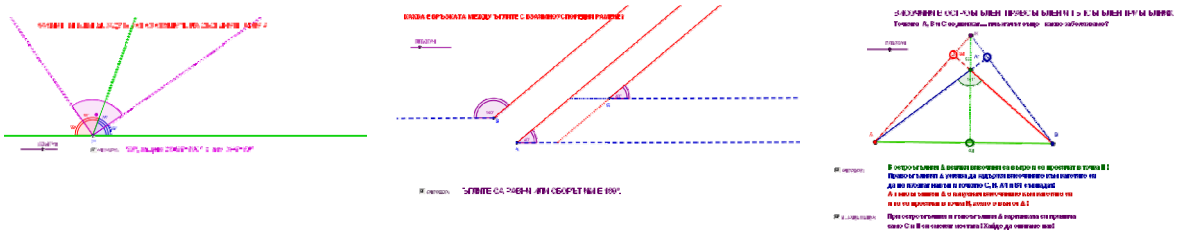
1. Увод

В забързаното си ежедневие всички ние забравяме колко малко ни трябва, за да сме щастливи...

2. В началото беше ... динамичната геометрия.

За мен всичко започна с един курс по *Geogebra* – кратък, но динамичен и вдъхновяващ [1]. Беше от тези неща, за които си казваш, че само да имаш мъничко свободно време ... непременно ще се задълбочиш и развиеш, а дори и не подозирах колко бързо ще се случи всичко това. Е, още на курса разбрах няколко основни неща и най-вече това, че мога да провокирам учениците да погледнат на геометрията с очите на изследователи.

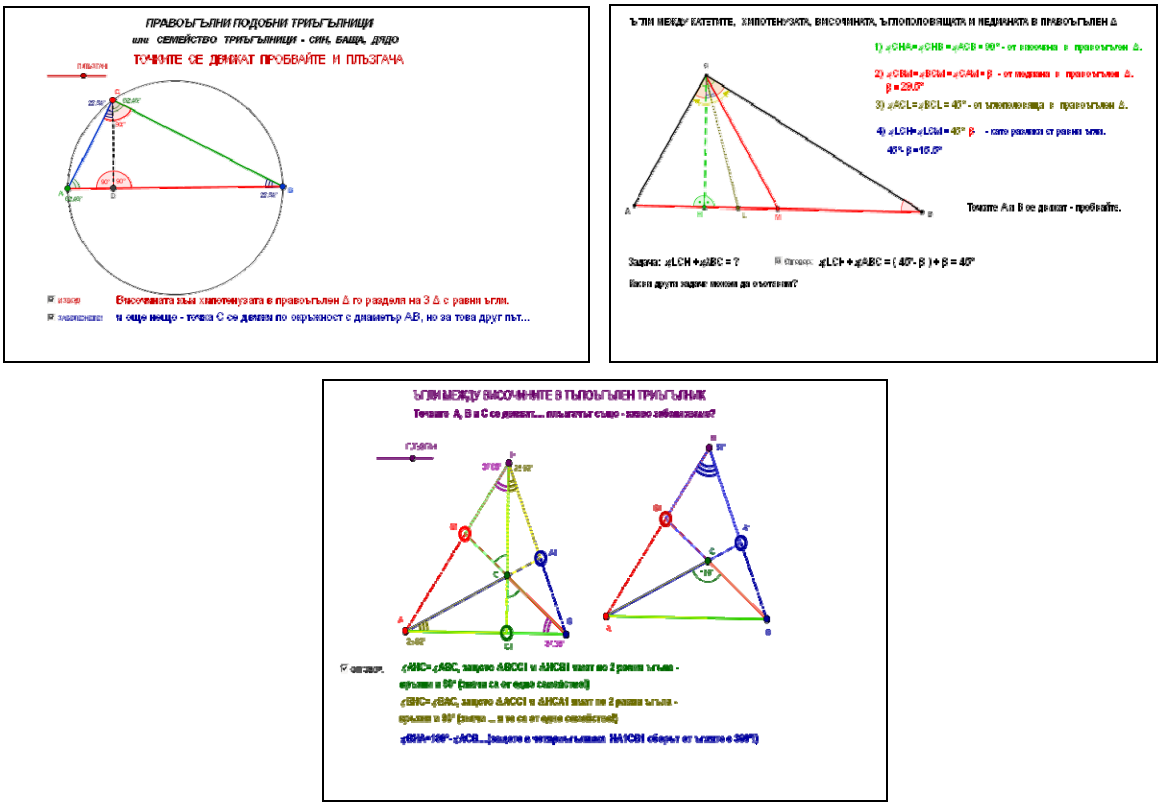
Първите ми опити бяха доста ... тромави, но ми дадоха увереността, че ще се справя. Всъщност това, което ме накара да не се откажа, беше интересът на децата – те се запалиха повече от мен, искаха да ги науча в извънучилищно време на „тези програми". Така, че връщане назад нямаше. Аз откровено им признавах, че сега се уча и тези, които искат, могат да ми помагат. Интересът беше голям и въпреки недостатъците на първите ни разработки (изобилие на текст) усетих, че се движим в правилна посока (Фиг.1.)



Фиг. 1. Ето така изглеждаха първите ни динамични картинки..

Сега като си давам сметка наистина са много описателни и доста ограничени в движенията си – по това време много се впечатлявах от плъзгачите и гледах на всяка цена да имам плъзгач в работата, което спъваше движенията. Но пък си имахме своите успехи – започнах да измествам индивидуалните изследвания на всяка разработена задача за домашно вкъщи, така че за в час по математика (7. клас сме и нямаме много време) оставаше да направим само изводите. На този етап се включиха и голяма част от родителите, които също харесаха „новите неща”.

И постепенно станахме по-добри (Фиг.2.)

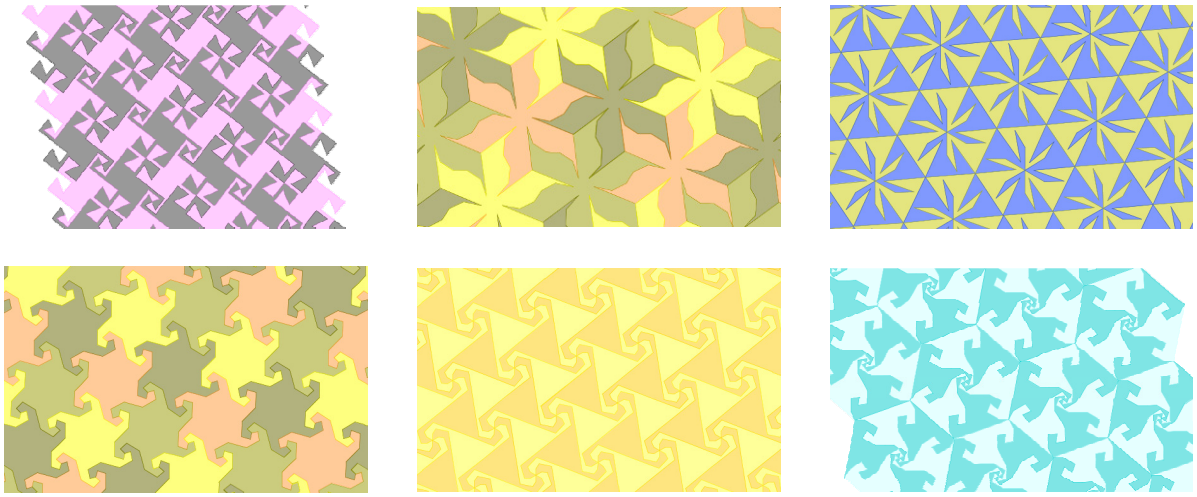


Фиг. 2. Тези динамични картинки ни направиха „истински откриватели”

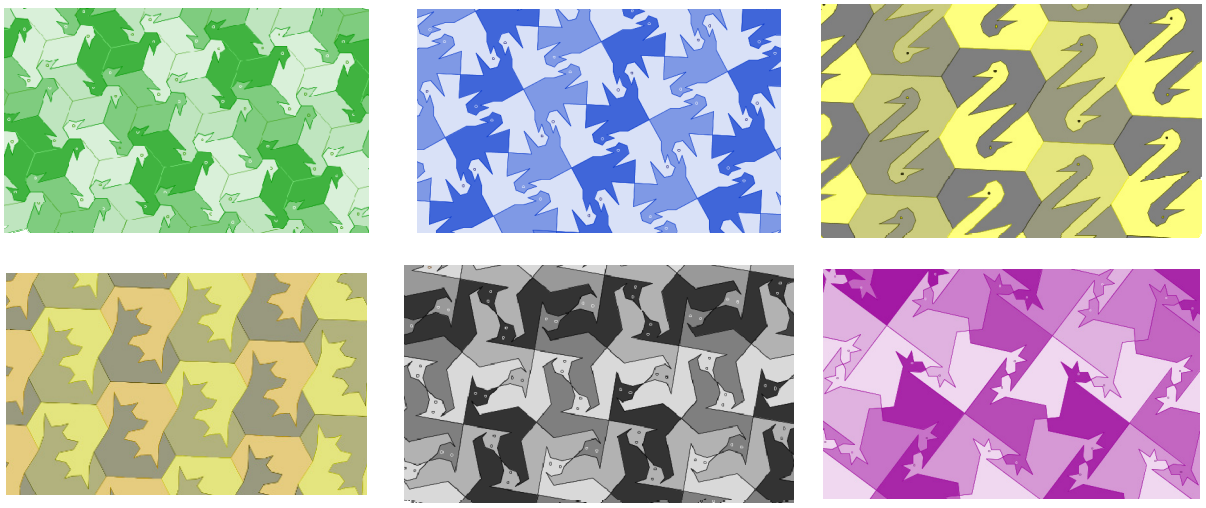
На някои от триъгълниците децата дадоха имена – кръстиха подобните триъгълници *семейство триъгълници*, имайки предвид голямата им прилика (*син, баща* и *дядо* – по формата и ъглите си приличат, само големината им е различна). Еднаквите триъгълници се оказаха *близнаци*.

3. Паркетирането....

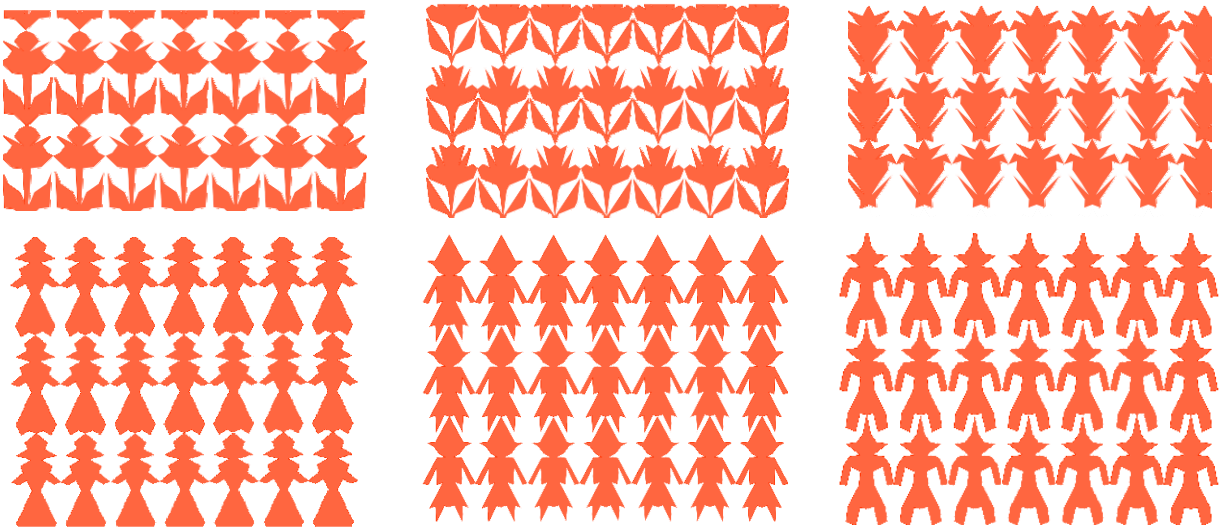
Е, стигна се до най интересното – паркетирането на равнината. Започнахме като на шега, провокирани от статията „Динамичното паркетиране” [2]. Тръгваме от фигура, паркетираща равнината -- квадрат, триъгълник, шестоъгълник, ромбоид, трапец и я подлагаме на деформиране с помощта на динамични точки по контура, които са подложени на подходящи геометрични трансформации (транслация и ротация). Целта е да получим нова паркетираща плочка с необичайна форма. Стигна се до един момент, в който забравихме да изтрием едни точки и нещата много бързо се развиха.... – оказа се, че сме направили „нашето” малко откритие и интересът стана още по-голям. Засега имаме цветя (Фиг. 3), много животни (Фиг. 4) и мартенички, паркетиращи равнината (Фиг. 5).



Фиг. 3. Цветя...



Фиг. 4. Животни...

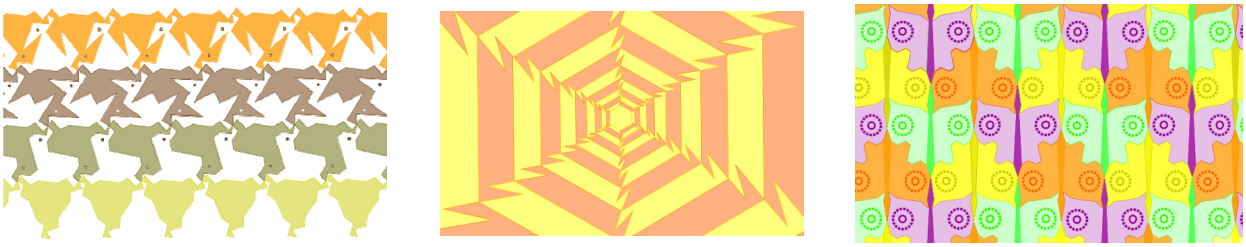


Фиг. 5. Мартенички...

Истината е, че децата с голяма лекота стигаха до неща, които аз не бях открила. С една дума, радостта ни от всяко, дори и най-малко постижение, беше обща. Май нямахме време да се отчайваме и обезверяваме от временни неуспехи. Търсейки едно, откривахме друго и понякога сменявахме в движение посоката на изследванията си. С радост открих, че ученици, които не обичаха математиката, изведнъж станаха много активни, а имах подкрепата и одобрението на колегите, ръководството на училището и родителите. С една дума всички ни се радваха, а така се постигат резултати.

3. Бъдещето...

Интересът на децата е огромен. И както казват, апетитът идва с яденето... имаме големи планове за бъдещи занимания [3] – проучихме Ешер като творец и видяхме, че ще имаме развитие в тази посока (Фиг. 6).



Фиг. 6. Бъдещи планове...

Тук със сигурност ще се включат и колегите по изобразително изкуство, а вече се включват и родители... Идеите ни са много и все интересни..., а бъдещето е пред нас.

4. Заключение

Експерименталното или изследователско начало в преподаването на нови знания е това, което ще ни доближи до децата. Така те ще научат повече от нас, а сигурно и ние ще научим много нови неща ... от тях ... и за тях.

Литература

1. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci.* 39 Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2010.

2. Чехларова, Т., Е. Сендова. *Динамично паркетиране*. сп. Математика и информатика, бр.6, 2011. С. 5-17, ISSN 1310-2230

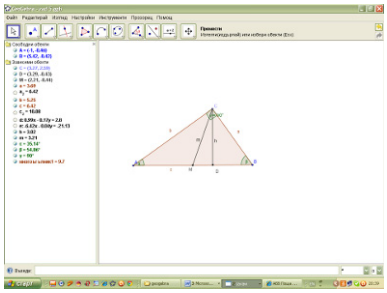
3. Chehlarova, T., E. Sendova, E. Stefanova, (2012) *Dynamic tessellations in support of the inquiry-based learning of mathematics and arts*, in Theory, Practice and Impact – Proceedings of Constructionism 2012, Athens, Kynigos, C., Clayson, J., Yiannoutsou, N. (Eds) August 21-25, pp.570-574

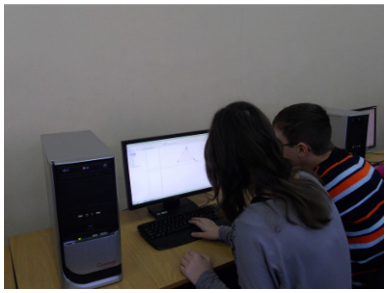
Използване на изследователски подход при преподаване на темата „Еднакви триъгълници” в седми клас

Елка Петкова
elka_toninska@abv.bg
СОУ „Любен Каравелов”, Видин

Резюме

В настоящата разработка споделям опита си по приложението на динамичния софтуер GeoGebra в обучението по математика в седми клас върху раздела „Еднакви триъгълници” от задължителната подготовка. От гледна точка на изследователския подход в математическото образование тази тема предлага много добри възможности, защото могат да се разглеждат задачи и проблеми с различна степен на трудност в зависимост от възможностите на учениците в конкретната паралелка.





В разработката представям не само своя скромен опит в работата с динамични конструкции, но и опита на своите ученици, които конструираха динамични чертежи в учебните часове по математика, както при усвояване на нови знания, така и при решаване на задачи за затвърдяване на знанията.

Ключови думи

Динамичен софтуер GeoGebra, равнобедрен триъгълник, правоъгълен триъгълник, симетрала на отсечка

1. Увод

Съвременното развитие на информационните технологии поставя обучението по математика в нови реалности и предоставя механизми за методическа подкрепа на учителите [1, 2]. Чрез информационните технологии се откриват възможности за използване на изследователския подход при решаване на задачи. Една от тези възможности е използването на динамичен софтуер в обучението. Той намира широко приложение при реализиране на основните дейности в хода на обучението. Динамичните конструкции, изградени чрез него, се използват за достигане до идея за решаване на конкретна задача. С тяхна помощ се формулират хипотези за свойства и твърдения. По този начин ученикът се приучва да разсъждава логично, изгражда се културата му на самостоятелно мислене.

В настоящата разработка споделям опита си по приложението на динамичния софтуер *GeoGebra* в обучението по математика в седми клас при изучаване на раздела „Еднакви триъгълници" от задължителната подготовка. От гледна точка на изследователския подход в математическото образование тази тема предлага много добри възможности, тъй като могат да се разглеждат задачи и проблеми с различна степен на трудност в зависимост от възможностите на учениците в конкретната паралелка.

2. Използване на динамични конструкции в раздела „Еднакви триъгълници"

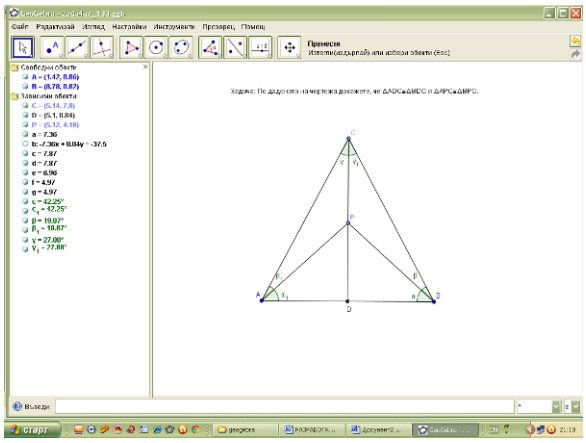
През декември 2011г. присъствах на семинара, организиран от Института по математика и информатика към Българска академия на науките „Изследователски подход в образованието по математика". Представените на този семинар методически разработки (например [3]) искрено ме впечатлиха и си зададох въпроса не бих ли могла и аз да използвам динамични конструкции в часовете по математика в седми клас. Прецених, че за да се стигне до ефективно използване на динамичната геометрична система *GeoGebra* в обучението, е необходимо да се премине през следните етапи:

1. Използване на динамични чертежи в учебните часове;
2. Запознаване на учениците с динамичната система *GeoGebra*;
3. Конструиране на динамични чертежи от самите ученици и използването им в часовете по математика.

Като преподавател по математика, а не по информационни технологии, първата цел която си поставих, бе да се запозная с динамичния софтуер *GeoGebra*. Това се оказа сравнително лесно, защото вече бях работила с *GEONExT* и имах известна представа от подобни програми. Разбира се, не мина без помощта на преподавателите по ИТ. Подготвих самостоятелно няколко задачи с динамични чертежи и ги включих в урочната си работа с помощта на мултимедия.

Ето как изглежда една от първите разработени чрез динамика задачи:

Задача: *За* ΔABC *точка* P *лежи върху ъглополовящата* CD *така, че* $\sphericalangle DAP = \sphericalangle DBP$ *и* $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP$. *Докажете, че* $\Delta ADC \cong \Delta BDC$ *и* $\Delta APC \cong \Delta BPC$.



Конструкцията позволява движение на точките *C* и *P* и предполага сериозна дискусия.

Както се очакваше, след няколко учебни часа сред учениците се долови известно оживление. Колкото повече използвах подобни задачи в обучението по геометрия, толкова повече се убеждавах, че часовете трябва да се провеждат в компютърния кабинет. Там учениците могат сами да изпълняват всички задачи, т.е. да чертаят и изследват чертежите, да отговарят на въпросите, поставени в урока, да правят предположения и сами да стигат до необходимите решения. По този начин се постига

основната цел на изследователския подход: да се индивидуализира учебният процес и учениците да станат по-независими строители на знанието си.

Разбира се имах своите опасения – ще могат ли учениците да се включат в изготвянето на динамични конструкции? Тогава си поставих следващата цел: да запозная учениците с възможностите на динамичната геометрична система *GeoGebra* като изследователски инструмент, още повече, че училището ни разполага с добра компютърна база – имаме четири компютърни кабинета с по дванадесет оборудвани работни места. Отделих един от часовете за ЗИП по математика и запознах учениците с *GeoGebra* и нейните възможности. Учениците бързо се ориентираха в новата динамична среда и още в същия час успяха да конструират динамичен чертеж на една не много сложна задача към урока „Свойства на равнобедрения триъгълник".

Изводът от първия час е, че създаването на динамичен чертеж, с чиято помощ да се реши дадена задача, не е сложно за запознатите с основните инструменти на *GeoGebra*, т.е. при един изследователски подход не би било трудно ситуацията да се пресъздаде реалистично, за да се стигне до хипотеза.

За домашна работа поставих на учениците задачата, ако имат възможност, да инсталират *GeoGebra* на домашните си компютри и да разучат по-подробно възможностите й.

Следващия урок на тема „Симетрала на отсечка" проведохме в компютърния кабинет. Доказването на Теоремата: „Всяка точка от симетралата на една отсечка е на равни разстояния от краищата на отсечката" направихме чрез реализирането на следните етапи:

1. *Построяване на динамична конструкция*. Учениците изпълниха следните стъпки:
   - Постройте произволна отсечка *AB*;
   - Постройте симетралата S_{AB} на отсечката *AB;*
   - Изберете точка *C* от S_{AB} .
2. *Изследване и формулиране на предположение*.

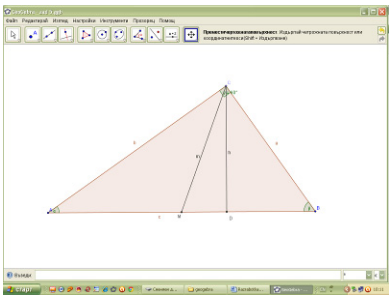
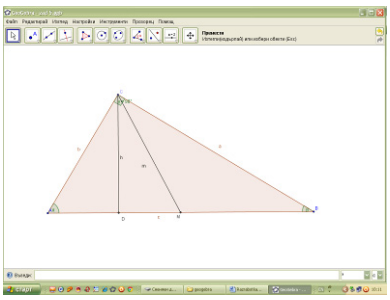
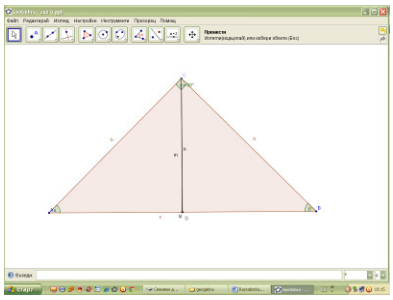
При фиксиране на отсечката *AB* и движение на точка *C* върху симетралата на отсечката учениците наблюдават изменението на отсечките *AC* и *BC* и сравняват техните дължини. Лесно се забелязва, че дължините на отсечките се променят при движението на точка *C*, но остават равни помежду си. Това дава възможност да се формулира предположение. Доказателството се извършва чрез разглеждане на $\Delta\, AOC$ и $\Delta\, BOC$ и доказване, че са еднакви.

3. *Обобщаване и изказване на Теоремата*.

А ето още една задача, по която учениците успешно разсъждаваха:

> **Задача:** *Да се докаже, че ъгълът между медианата и височината към хипотенузата в правоъгълен триъгълник е равен на разликата от острите му ъгли.*

Конструкцията има следния вид:

Създаденият от учениците чертеж е динамичен. Той позволява да се мести подвижна точка *C*, без да се нарушават геометричните връзки, които са в основата на чертежа. Смисълът е в това, да се наблюдава какво се случва при това движение.

Решаването на задачата включва:

- построяване на динамичен чертеж;
- движение на точка *C* и проверка на случаите а) $\alpha < \beta$; б) $\alpha > \beta$; в) $\alpha = \beta$;
- формулиране на предположение;
- доказателство;
- извод.

Разгледаната задача може да се използва за решаване на задачи от вида:

Задача 1. *Намерете мярката на ъгъла между височината и медианата ако:*

а) $\alpha = 25^\circ$; *б)* $\alpha = 55^\circ$.

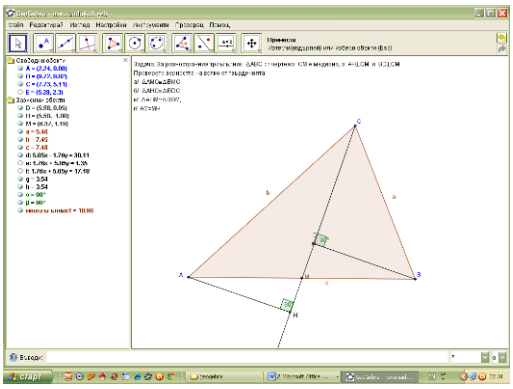
Задача 2. *Докажете, че в правоъгълен триъгълник с остър ъгъл 15˚ височината към хипотенузата е* $\frac{1}{4}$ *от хипотенузата*.

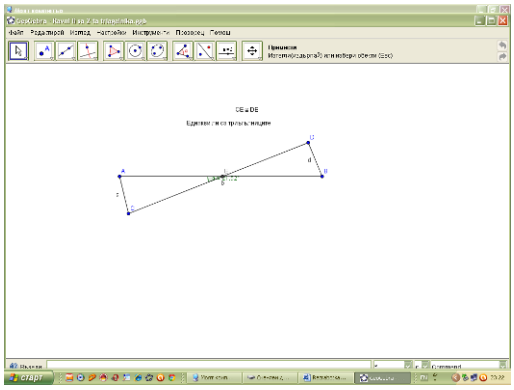
Ако учениците се насочат да направят предположение каква фигура се образува при движението на точка *C* и го докажат, задачата може да се използва за преход към знания, предвидени за усвояване в осми клас - геометрично място на точки. Хипотезите им могат да се проверят чрез използване на опцията „Включи режим следа”.

Още по-интересна ще стане задачата, ако на учениците след това се зададе въпросът: *Как може, с помощта на разгледаната задача, да се построи произволен правоъгълен триъгълник*.

Това, което постигнаха учениците в учебните часове, е ценно, но не по-малко ценно е да се научат учениците да използват ИТ самостоятелно за изследване на математически задачи както в клас, така и при самостоятелната им подготовка. Ето защо и у дома продължава работата по конструиране на динамични чертежи, които да се използват в следващите учебни часове.

Ето какви задачи изпратиха по електронната поща моите ученици:





При движение на точка *C* могат да се направят най-различни предположения за различните видове триъгълници и да се проверят.

Съвсем тенденциозно задачите, разгледани в разработката, са взети от учебника по математика за седми клас [4], по който се провежда обучението в нашето училище. Целта е, ако учениците ползват учебника самостоятелно, да могат да продължат работата у дома, както и да се покаже, че известни и класически задачи могат да се формулират по малко по-нестандартен начин, за да привлекат вниманието на учениците.

3. Изводи

1. Чрез използване на динамични конструкции, предполагащи изследователски подход в обучението по математика, се постигат много важни цели за учениците:
   - задълбочено разбиране на математическите понятия;
   - ключови компетентности за: умения за учене през целия живот; умение за използване на ИТ, особено на динамичен софтуер; умения за групово и индивидуално учене.
2. При решаване на задачи с динамични конструкции може да се премине през всичките етапи на изследователския подход: откриване на проблем; предлагане на хипотези; разработване на експерименти за проверка на хипотезите; анализ на резултатите. Обикновено е достатъчно учениците да бъдат насочени към няколко ситуации, а после да продължат самостоятелно с откритията си.
3. Използването на компютър в обучението по математика внася положителни изменения не само в организацията на учебния процес, но и в структурата на урока.

В същото време, съществуват основателни опасения, че съвременните програми за компютърна геометрия могат да доведат до това, че ученикът да не умее да борави с чертожни инструменти. Смятам, че винаги е необходимо да се търси баланс между използването на компютъра при решаването на геометрични задачи и чертането с чертожни инструменти. Проблем (за мен) се оказва и учебната среда – необходимо е наличието на добре оборудвани компютърни кабинети с поне 26 компютъра (за осигуряване на индивидуална работа на всеки ученик), както и на добра подредба на работните места в кабинета. Смятам, че все още е слаба координацията между учебните програми по математика и ИТ, както по тематика, така и във времето. Липсват също достатъчно разработени електронни учебни материали по математика. Ефективността на обучението по математика с ИТ зависи на първо място от компетентното им използване от учителя. Ако един учител по математика иска с учениците си да изследва и експериментира, но не е ИТ специалист, кога и как трябва да се запознава с новите софтуерни продукти? Необходими са такива квалификационни форми, в които учителите да се обучават в използване на компютърни методи.

4. Заключение

Компютърните програми могат да намерят своето място във всички етапи на урока – при първоначалното представяне на новия материал, при неговото осмисляне и затвърждаване, при изграждането на компетенции за практическото му приложение в примери и задачи, както и при констатирането на равнището на знания.

Не трябва да се забравя обаче, че:

- използването на ИТ в обучението по математика не е с цел да се преподава технология, а с цел да се подобри преподаването по математика и ученето с помощта на технологиите.
- ИТ могат да дадат механизми в подкрепа на учителите по математика, като се използват за реформиране на обучението по математика в клас.
- ИТ помагат за извършването на реформа в обучението по математика, но самите те не гарантират реформа.

Литература

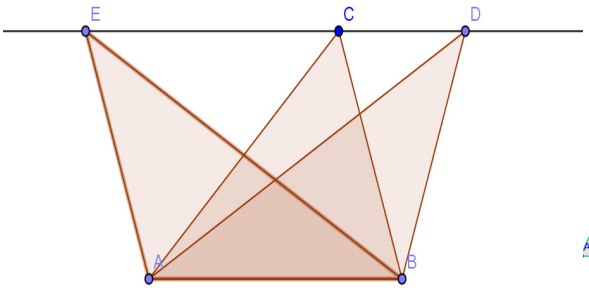
1. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*. Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39 пролетна конференция на СМБ, 2010.
2. Рааб, Д. *Към нов стил на преподаване на математиката или Как да осъществим изследователския и проблемно-ориентирания подход в часовете по математика*, Математика и информатика, 2011, кн. 3, с. 25-32
3. Чехларова, Т. *Геометрични фигури – изследвания с динамични конструкции*. Макрос. 2012. http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/book-geom_figuri.pdf
4. Петкова, С. и колектив, *Математика за 7. клас*, Просвета, С. 2008

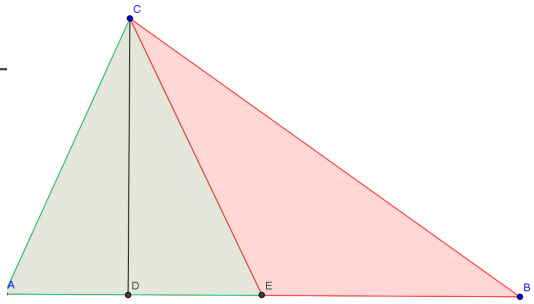
Няколко равнолицеви фигури, приготвени с GeoGebra и поднесени на петокласници за ... забавление (едно занимание в школата)

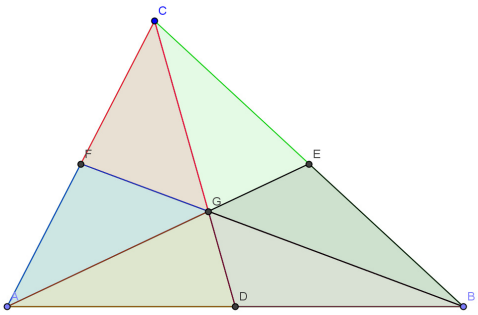
Звездалина Ганчева
zvezda_g@yahoo.com
Обединен детски комплекс - Шумен

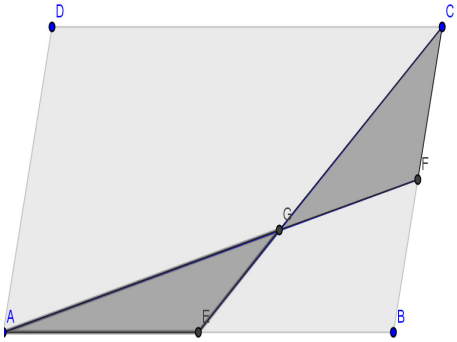
Резюме

Представено е едно занимание в школата по математика в 5. клас в Обединения детски комплекс. Школата съществува от 22 години и има хорариум от 4 часа седмично. В заниманието участваха 10 деца от 5 клас от ПМГ „Нанчо Попович" и СОУ „Сава Доброплодни". Стартирането бе със задача за разрязване и получаване на нова, но равнолицева фигура. За следващите задачи се използваха динамични конструкции, реализирани в GeoGebra. Изключително впечатляващо за учениците беше и онагледяването, и възможността за изследване.









В процеса на работа се изследваха различните възможности за положение на точките, стигна се до нови формулировки на условията, до нови задачи. Лесно се премина и към олимпийски задачи.

Ключови думи

равнолицевост, динамична фигура, математическо изследване, проект Fibonacci

1. Увод

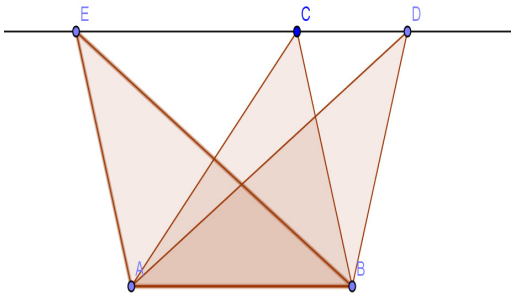
От 22 години към Обединения детски комплекс съществува школа по математика. В нея по утвърдени авторски програми се подготвят деца с подчертан интерес към математиката за състезания и олимпиади. Едно такова занимание с използване на динамичния софтуер *GeoGebra* предизвика написването на този материал и представянето му на Практическия семинар по проект *Fibonacci* „Изследователски подход в образованието по математика" в рамките на 41. Конференция на СМБ– Боровец, 9-12.04.2012 [2].

2. Началото

Заниманието стартира с разглеждането на задача за разрязване и получаване на нова, но равнолицева фигура.

Въвеждаща задача *Да се разреже правоъгълник с размери 9 cm на 4 cm на две части, така че да се сглоби квадрат от тях.*

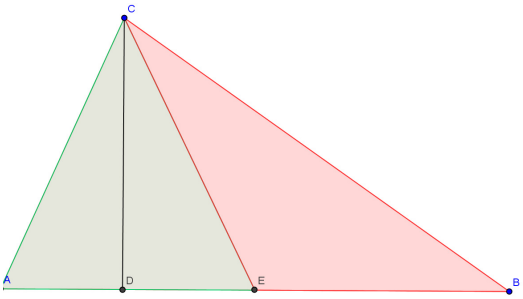
С тази задача се целеше учениците да достигнат до извода, че двете фигури трябва са бъдат равнолицеви.

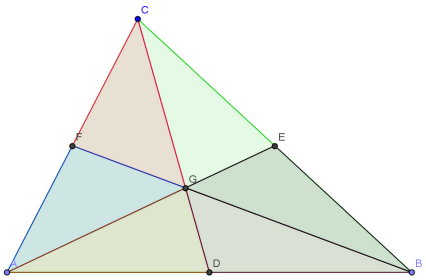


По нататък учениците доказаха три основни задачи:

O1 *Ако върхът C на триъгълника ABC "пробягва" права* ***a,*** *която е успоредна на основата AB, то получените триъгълници са равнолицеви.*

O2 *Всяка медиана в триъгълника го разделя на два равнолицеви триъгълника.*

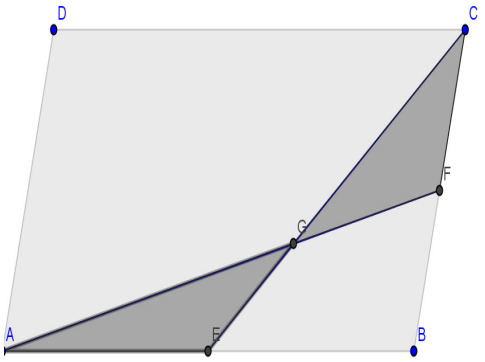




O3 *Трите медиани в триъгълника го разделят на шест равнолицеви триъгълника.*

Заниманието продължи със задачата от Национална олимпиада по математика за 5 от 2002г.

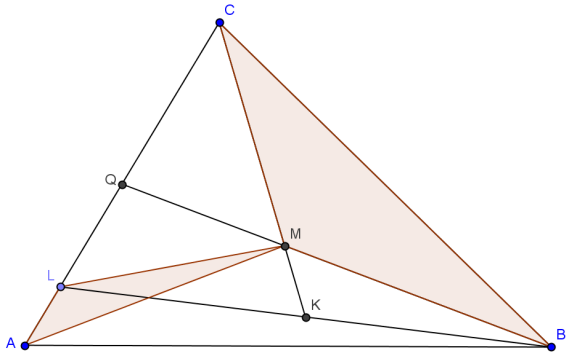
Задача 1 *В успоредника ABCD точката E е средата на AB, F – средата на BC. Колко пъти лицето на защрихованата част е по-малко от лицето на бялата част?*



Решение: Построяваме диагонала *AC* и прилагаме **O3** за триъгълника *ABC.*

Разгледано беше и различното положение на точките *E* и *F* върху страните на успоредника: точка *E* – среда на *AB*, а точка *F* – среда на *DC* или точка *E* – среда на *DC*, а точка *F* – среда на *BC*. Във втория случай учениците видяха, че затъмнена част не съществува, и направиха извода, че изследването с чертеж е важно за решението на една задача.

Задача 2 *Нека Q е средата на страната AC в триъгълника ABC и L е от отсечката AQ. През върха C и средата K на BL е прекарана права, която пресича BQ в M. Намерете* S_{ABC}, *ако* $S_{BMC} = 42\ cm^2$ *и* $S_{ALM} = 9\ cm^2$.



Решение: От *BQ* – медиана в ΔABC и *MQ* – медиана в $\Delta AMC \Rightarrow$

$$S_{ABC} = 2S_{BMC} + 2S_{QMC} = 84 + 2S_{ALM} + 2S_{LQM} = 102 + 2S_{LQM}$$

От *MK* – медиана в ΔLBM и *CK* – медиана в $\Delta CLB \Rightarrow S_{CLM} = S_{BMC} = 42\ cm^2$ След преобразования се получава $2S_{LQM} = 33\ cm^2$ и $S_{ABC} = 103 + 33 = 135\ cm^2$. С решението на тази задача се затвърди ***O2***.

Учениците бяха изключително впечатлени от динамичната конструкция на следващата задача от ЗМС от 2009 година

Задача 3. *Дадени са 66 точки, които са върхове на квадратчета със страна 1 см. Избрани са точки A и B. Колко от останалите 64 точки могат да се означат с C така, че лицето на триъгълника ABC да е 2 см^2?*

Изследвано беше положението на точката C и различните варианти на триъгълници. С лекота учениците откриха първите три точки, но построяването на останалите върхове определено ги затрудни.

Следващата задача провокира мисленето на децата, като ги постави в ситуация на разсъждение на въпроса: Кога лицето на триъгълника е най-голямо? Движението на точките онагледи и подкрепи техните разсъждения.

Задача 4. *Върху страните на правоъгълник с лице S са избрани три точки MNP. Намерете максималното лице на триъгълник MNP.*

3. Заключение (което не е край)

Заниманието завърши, като остави след себе си много въпроси „Как се правят тези картинки?", „Мога ли и аз да ги правя?" „Къде се учи тази програма и в кой клас ще го учим?".

Всички бяха изключително удовлетворени и доволни, че нещо ново са научили и видели.

Литература

1. Рангелова, П., И. Старибратов, (2011) *111 задачи за сравняване лица на равнинни фигури,* изд. Коала прес, Пловдив.
2. Кендеров, П., Е. Сендова, (2012) *Изследователският подход в образованието по математика и информатика*, Практически семинар в рамките на европейския проект „Фибоначи", 40. Пролетна конференция на СМБ, Боровец, 9-12 април 2012 г.

Изложбата – стимул за работа

Катерина Марчева, Еленко Велков, Владимир Стоиловски
kmarcheva@gmail.com, velkov_e@abv.bg, peel@abv.bg
СОУ с изучаване на чужди езици „Св. Климент Охридски”, Благоевград

Резюме

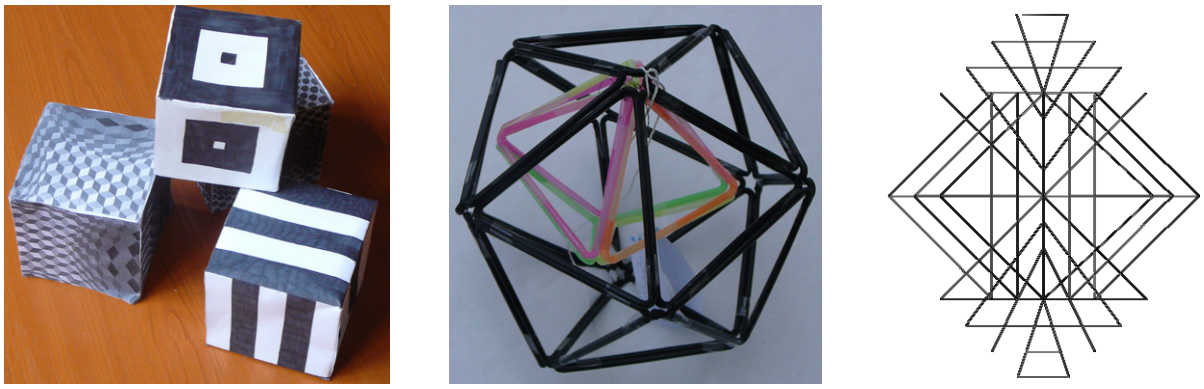
В предложения материал е представена малка част от работа по проект „Да учим математика заедно” по програма „Учене през целия живот”, секторна програма Коменски. Координатор на проекта е Средно общообразователно училище с изучаване на чужди езици „Св. Климент Охридски” и споделеният в тази статия опит се отнася само за българското училище (Договор № LLP-2011-COM-MP-004).

Основната цел на проекта е да се повиши спадналият интерес към обучението по математика.

Фокусът на представения опит е работата с учениците, при която те трябва да изработят краен продукт. Водещата идея е учениците да почувстват приложимостта на изучавания материал. Това се постига чрез комбиниране на традиционните методи и форми на обучение с използването на динамичен софтуер. Дейностите са реализирани в часовете по математика, информационни технологии и изобразително изкуство и в хода на работа са търсени междупредметни връзки. Сред разгледаните въпроси са елементи от темите транслация, осева симетрия, централна симетрия, ротация, хомотетия, златно сечение, платонови тела, правилни и полуправилни модулни мрежи [1].

Уводът в темите се разглежда в часовете за задължителна подготовка и част от по-малките задачи се реализират в часа. Съществена част от дейностите за изработване на експонатите за изложбата се реализира в часове за СИП или с работа извън часовете с част от ученици под ръководството на учители.

Условно изработените продукти могат да се разделят на два вида (Фиг. 1).



Фиг. 1. Тела, изработени с традиционните методи, и фигури — с използване на динамичен софтуер

С част от изработените от учениците материали на 28.02.2012 г. се откри изложба в Арт-салона на Радио Благоевград, която бе на разположение на посетителите през месец март 2012.

Ключови думи

проектно-ориентиран подход, междупредметни връзки, еднаквости, платонови тела

1. Увод

В предложения материал е представена малка част от работа по проект „Да учим математика заедно” по програма „Учене през целия живот”, секторна програма *Коменски*. В проекта участват по едно училище от България, Полша, Словакия, Литва, Румъния и Турция. Координатор е Средно общообразователно училище с изучаване на чужди езици „Св. Климент Охридски”. Проектът стартира на 26.08.2011 г с подписване на договор № LLP-2011-COM-MP-004 с Центъра за развитие на човешките ресурси. Продължителността му е 24 месеца. Към настоящия момент в дейностите по проекта участват около 200 ученици основно между 10 до 15 години, макар че има и един второкласник и няколко дванадесетокласници. Тенденцията е възрастовата група на учениците да се разшири за в бъдеще. Въвлечените в проектните дейности са 17 представители на училището (14 от тях са назначени на педагогически длъжности и 3 на непедагогически щатни бройки).

Споделеният опит в тази статия се отнася само за българското училище и е свързан само с организиране на първата изложба. Представената гледна точка е на трима автори (представящи съответно учебните дисциплини - математика, изобразително изкуство, информатика и информационни технологии), но ние сме работили върху част от „експонатите” заедно с още 6 учители (от тях трима учители по математика, двама по информационни технологии и един по изобразително изкуство). Всички те са преминали тридневен курс на обучение по проект „Фибоначи” [1], през м. август 2011 г в Благоевград под ръководството на доц. Евгения Сендова [2].

2. Цели и задачи

Основната цел на проекта „Да учим математика заедно” е да се повиши спадналият интерес към обучението по математика. Проектните дейности са насочени към създаване на условия, които да стимулират любопитството на учащите и да свързват теорията с практически задачи.

Една от задачите, които сме си поставили, е подготовката, организирането и провеждането на изложба с красиви експонати, които да са сътворени от учениците и да представят знанията им за правилните изпъкнали многостени (платоновите тела) и геометричните преобразования.

Работата с учениците е организирана така, че те да изработват краен продукт. Водещата идея е децата да почувстват приложимостта на изучавания материал. Това се постига чрез комбиниране на традиционните методи и форми на обучение с използването на динамичен софтуер.

Днес ние обучаваме нов тип поколение, свързано с възможностите на Интернет, а свободното му време често преминава пред компютъра. Стремежът ни е да използваме желанието на учащите за работа с информационните технологии. Дейността им е организирана така, че чрез използване на динамичен софтуер като *Geogebra* и *Geonext* да се запознаят с различните

геометрични преобразования. Разглежданите преобразования са *транслация*, *осева симетрия*, *централна симетрия*, *ротация* и *хомотетия*. Желанието ни е от една страна учениците да научат повече за зависимостите и намиране на периметър и лице на различни фигури наред с дължина на ръбове, повърхнина и обем на тела. От друга страна учениците се насочват да създадат интересни фигури, които могат да се използват в интериора на дома или офиса, в модния дизайн и естествено да бъдат част от нашата изложба.

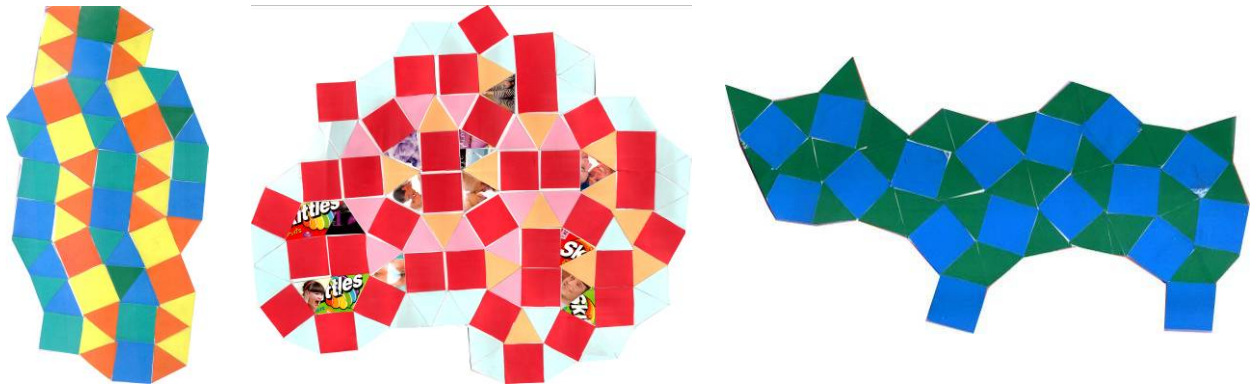
Важен елемент от цялостната работа за изложбата е учениците да видят връзката между различните учебни дисциплини и единния подход при организиране и подготовка на изложбата, но с различни средства [3, 4].

3. Организация на работата

Дейностите са реализирани в часовете по математика, информационни технологии и изобразително изкуство и в хода на работа са търсени междупредметни връзки. Сред разгледаните въпроси са елементи от темите *транслация*, *осева симетрия*, *централна симетрия*, ротация, *хомотетия*, *златно сечение*, *платонови тела*, *правилни и полуправилни модулни мрежи.*

Уводът в темите се разглежда в часовете за задължителна подготовка и част от по-малките задачи се реализират в часа. Съществена част от дейностите за изработване на експонатите за изложбата се реализира в часове за СИП или с работа извън часовете с част от ученици под ръководството на учители.

В часовете по изобразително изкуство в 8. клас бяха разгледани подробно правилните и полуправилни модулни мрежи, като учениците получиха знания за тях и реално построиха както правилни мрежи (триъгълна, квадратна и шестоъгълна), така и полуправилни. По-подробно бяха разгледани системите, изградени от еднакви равностранни триъгълници и квадрати – общо четири вида. Акцентът беше поставен не върху самото построяване, а в търсенето на приложимия характер на тези системи в интериора и екстериора – проектиране на подови настилки, преградни стени и декоративни пана, като се търси художествен ефект.



Фиг.2. Изработени от учениците мрежи

С учениците от 9. клас подробно бяха разгледани пространствените мрежи и конкретно – правилни изпъкнали многостени: куб, тетраедър, октоедър, икосаедър и додекаедър, наричани *платонови тела*. И тук беше използвана междупредметна връзка - учениците се запознаха с приложението на теоремата на Ойлер (без да се дава точното доказателство) в часовете по математика, която доказва съществуването на точно пет типа правилни многостестени, а в часовете по изобразително изкуство моделите бяха изработени от кадастрон или като се използват сламки. Бяха разгледани техните

закономерности и свойства. Учениците с голямо желание работиха по време на часовете и извън тях, като търсеха оригиналност и художествено въздействие.

Изпълнението на задачите, подготовката и организирането на изложба оказа положително въздействие върху учениците. Бяха изградени не само знания за двумерните и пространствени мрежи, умения за проектиране, за търсене на различни пространствени решения в интериора и екстериора, а и учениците бяха допълнително мотивирани.

Учителят по математика подбира сред изработените материали подходящи тела и фигури и поставя задачи с математическо съдържание. Ето примери:

Задача 1. *Дължината на всеки ръб е една мерна единица. Намерете дължините на сламките с дължина също една мерната единица, които са необходими за изработването на един тетраедър, един куб и един октоедър, ако при свързването им не се губи дължина. Сравнете дължините на различните тела*.

Задача 2. *Композиция се състои от икосаедър, куб и додекаедър без общи части. Всички ръбове на телата са по 60 см. Телата от композицията трябва да бъдат оцветени в бяло и синьо, като оцветените повърхности с различни цветове да бъдат с равни лица. Предложете различни начини за оцветяването им. Кой от начините е най-лесен за реализация и кой според вас дава най-интересна композиция? Пресметнете колко тубички от всяка боя трябва да бъдат осигурени, ако 1 тубичка бяла боя покрива 65 квадратни сантиметра, а синята тубичка – 80 кв.* см.

Задача 3. *С възможно най-малко измервания в GeoGebra намерете колко единици стоманена тел са необходими, за да се изпълни пано с дизайн от фигура 1, ако на екрана виждате паното в реални размери*.

Но реално само малка част от качествено изработените крайни продукти са направени само в часовете за задължителна подготовка. Сред причините са

- Изключително натоварените учебни програми;
- Изискващият повече време за работа динамичен софтуер, особено в началото на изучаването му. Ако учителят не им е дал готова конструкция и те само да мерят или променят един елемент, учащите правят много различни чертежи (нямащи нищо общо помежду си), от които е трудно да се направят обобщения и изводи;
- Липсата на часове, в които учителят да може работи по теми, които той избира.

Важен елемент от работата е създаването на плакат и покани за изложбата. Подреждането на създадените материали върху таблата и тяхното разполагане в изложбената зала е следващ етап, в който трябва да въвлечем учениците.

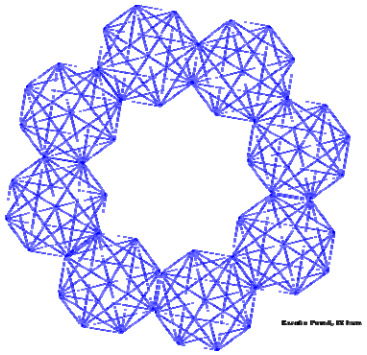
Да се организира придвижването на материали и ученици, присъствието и поведението им по време на откриване са също немаловажни дейности, които отнемат доста усилия и време, но обикновено остават незабелязнани.

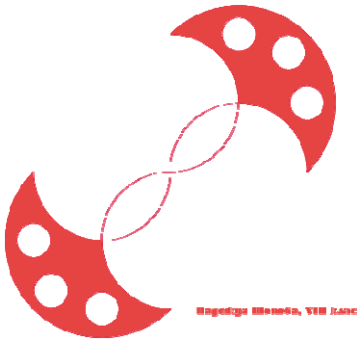
4. Резултати

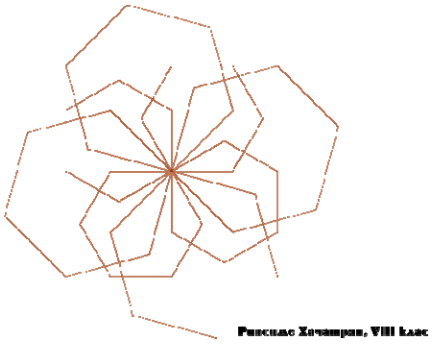
Работа по подготовката и провеждането на изложба е специфична. Крайните продукти трябва да бъдат прецизно изработени и представени подходящо пред публиката.

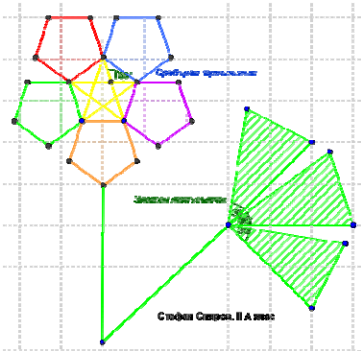
Прилагаме снимки или картинки на някои от изработените от учениците експонати. Изработените продукти могат да се разделят условно на два вида:

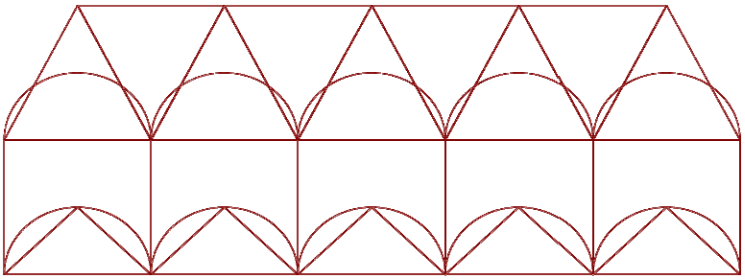
- Създадени с използването на динамичен софтуер

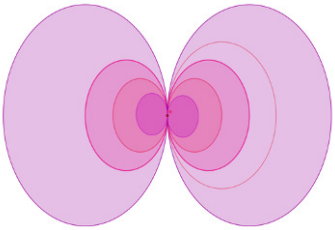


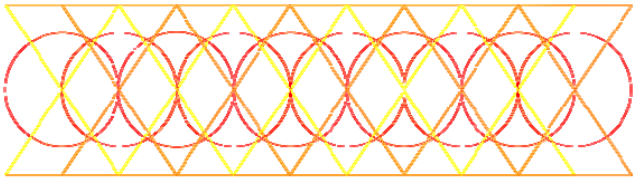






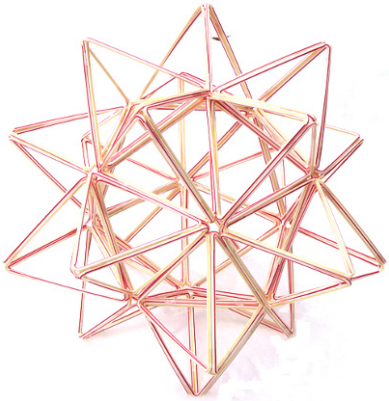






Фигурите са използвани освен като експонати за изложбата и за съставяне на задачи за намиране на периметър и лице.

- Създадени с използване на традиционни материали – хартия и сламки.



Подготовката и провеждането на изложбата влияе ползотворно, защото прави видими резултатите от обучението. В хода на работа се появяват нови идеи и приложения на теми от учебното съдържание по математика. Умението на учителя да използва приповдигнатото емоционално състояние на учениците за решаването на нови задачи е от много важно значение за стимулирането на изследователската дейност на учениците и съставянето и решаването на творчески задачи.

5. Заключение

Натрупаният опит в работата по проекта „Фибоначи" изигра решаваща роля при работа ни по проект „Да учим математика заедно". Изследователският подход бе основен при организиране на дейностите с учениците. Изработването на голям брой експонати дава възможност за прилагането му. Учениците имат възможност да виждат и сравняват различните резултатати. По естествен начин се формулират хипотези. Изследователският подход дава възможност за поставяне на диференцирани задачи и индивидуално отношение и има положително въздействие върху някои ученици, които са отрицателно настроени към традиционните форми на обучение.

Организирането и провеждането на изложби с ученически работи е стимул за активна работа на ученици, учители, ръководство на училището. Това е един от начините част от родителите и от обществеността да станат съпричастни на дейностите, които се реализират в училище. В това отношение ние бяхме подпомогнати в значителна степен от Радио Благоевград. Сърдечна благодарност към целия екип на Радио Благоевград не само за предоставения безплатно Арт-салон за повече от месец, но и разпрстранената информация за изложбата чрез интервюта с участниците в проекта – ученици, учители и ръководството на училището.

Литература

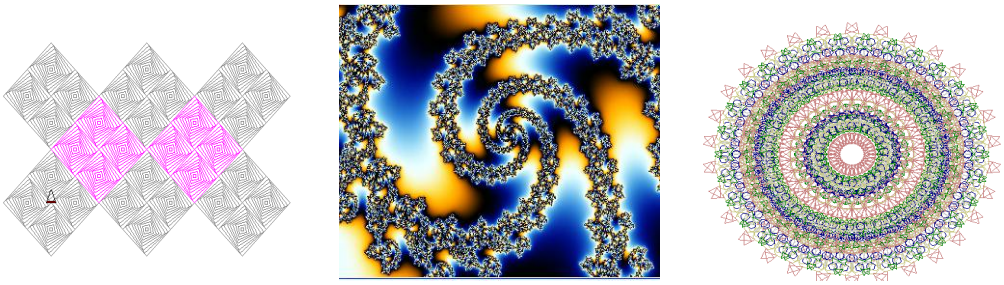
1. Райчев, Р.(1995) *Структурна комбинаторика*, изд. Терзиев и синове ЕДЕМ-21, София
2. Чехларова, Т., Е. Сендова. *Разнообразие в еднаквостите*. сп. Математика и информатика, бр.4, 2010. с. 3-14
3. Чехларова, Т., Е. Сендова. *Практически задачи и упражнения по информационни технологии*. *Развий въображението си с развивки*. Анубис. 2010. 64 с. ISBN 978-954-426-890-9
4. Chehlarova, T., E. Sendova. *Stimulating different intelligences in a congruence context*. In: Constructionist approaches to creative learning, thinking and education: Lessons for the 21st century. Proceedings for Constructionism 2010. The 12th EuroLogo conference. 16-20 August, Paris, France. 2010. ISBN 978-80-89186-65-5

Моят опит в изследователския подход в часовете по информатика и информационни технологии – 5. – 12. клас

Кремлина Черкезова
Krem_lina@mail.bg
34 ОУ „Стою Шишков” – София

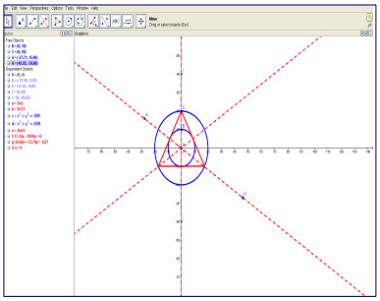
Резюме

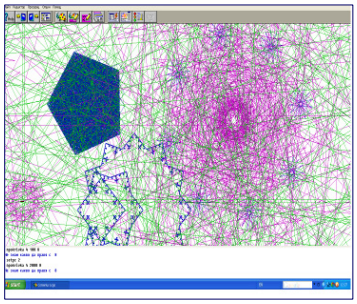
Компютърът навлезе трайно в живота на съвременните деца не само с мултимедийните си възможности, но и с това, че им дава възможност да експериментират, да проверяват, да доказват себе си, да го управляват, като прилагат новите технологии в ежедневието си. В многогодишната ми работа като учител по информатика и ИТ в 34 ОУ „Стою Шишков” и СЕГ съм прилагала изследователски подход в преподаването си, свързан с динамичната математика и приложението й в ИТ. През годините съм работила със софтуерните технологии – Геомландия, Comenius logo, Imagine – розетки, фрактали и паркети, Geonext, Graph, Elica, Geogebra. Целите на обучението, които си поставих, бяха свързани с интегриране на ИТ в обучението по математика с цел повишаване активността на учениците, затвърждаване на знанията им, формирането на умения и навици за индивидуална и екипна работа.



Фиг. 1. Ето какво сътвориха моите ученици по темата „Паркети, фрактали, розетки”

Резултати: *Учениците конструират и описват процеса на създаване на геометрични конструкции, удобни за изследване; правят предположения върху основата на тези изследвания; проверяват ги експериментално; учениците се насърчават сами да правят математически открития.*





Ключови думи

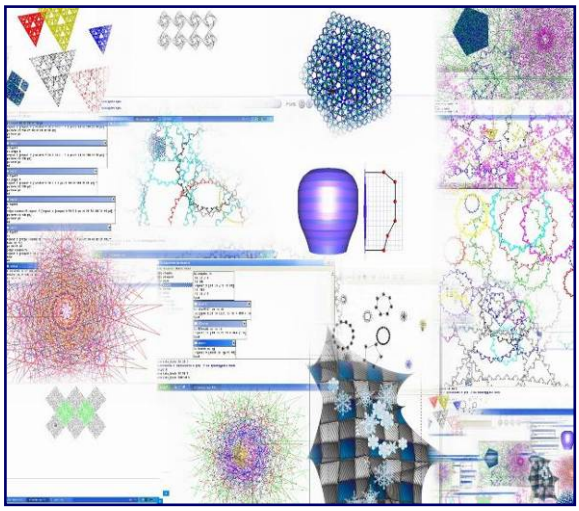
изследователски подход, проект Fibonacci, динамичен софтуер, розетки, паркетиране, рекурсия, фрактали, GeoGebra

1. Увод

Основна и актуална задача на обучението по математика и информационни технологии е да подготви учениците за знания и решаване на задачи, които възникват във всекидневната им учебна дейност, а впоследствие – и в живота, и на работното място. Тази задача произтича и от новите образователни изисквания, според които образованието трябва да представлява: "…един непрекъснат процес на формиране на индивида – на неговото знание и интереси, на правото му да променя и на възможността му да действа." ([1], стр. 19). Това предполага създаване на навици и умения за учене. Промените, настъпили в българското образование, имат за задача децата ни да не изостават от своите връстници от Обединена Европа, а да бъдат напълно конкурентно способни. Конкретен израз са единните държавни стандарти за учебно съдържание, преподаване и оценяване. Компютризирането на училищата и достъпът на всички ученици до съвременните информационни технологии е приоритетна грижа на обществото.

2. Някои примери на добри практики

Работата с компютри в прогимназиалния етап осигурява безпроблемно и смислено навлизане в света на модерните технологии. Тя е етап в цялостния процес на обучение по информационни технологии в българското училище. Основна цел е придобиване на базисни знания, умения и отношения в съответствие с изискванията на информационното общество. Постигането на знанията, уменията и отношенията, дефинирани в стандартите, гарантира възможността за решаване на практически задачи и активно използване на компютъра от учениците при усвояване на учебното съдържание по различни учебни предмети.



В многогодишната ми работа като учител по информатика и ИТ в 34 ОУ „Стою Шишков” и Софийска езикова гимназия съм прилагала интерактивен изследователски подход в преподаването си, свързан с динамичната математика и приложението й в ИТ. През годините съм работила със софтуерните технологии – Геомландия, Comenius logo, Imagine – розетки, фрактали и паркети, Geonext, Graph, Elica, Geogebra. Целите на обучението, които си поставих през годините, са свързани с интегриране на ИТ в обучението по математика с цел:

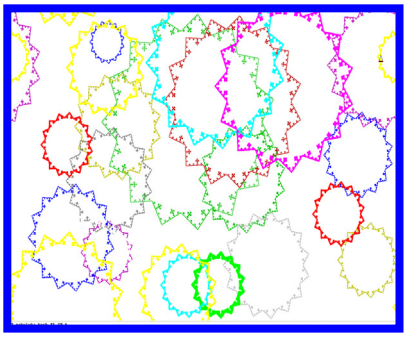
- интегриране на ИТ в обучението по математика, за да се повиши активността на учениците, да се затвърдят знанията им, да се формират умения и навици за индивидуална и екипна работа**;**
- осъществяване на възможност за междупредметни връзки;
- ефективно се използват съвременните информационни технологии за повишаване на качеството на образованието, обогатяване на учебното съдържание и въвеждане на иновационните образователни технологии и методи в учебния процес.

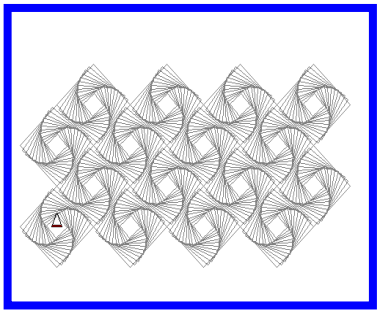
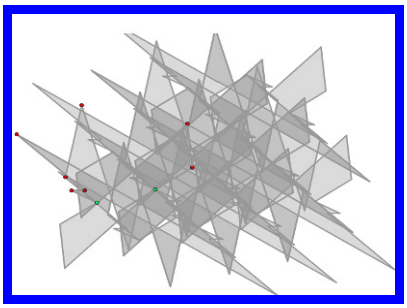
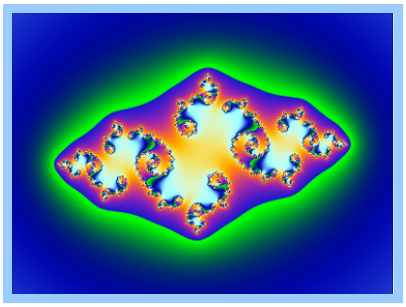
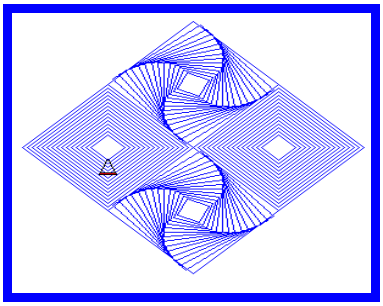
Преди четиринадесет години бях на следдипломна квалификация по информатика и ИТ в СУ – ФМИ. Тогава за пръв път видях и се обучавах със система *Геомландия*. Хареса ми динамичното изпълнение на редица интересни геометрични задачи. Поредицата от

команди дава резултат – създай обект точка, права, окръжност и т.н. Започнах и експериментирах с ученици от профилирана подготовка на СЕГ. Какво ни даде *Геомландия* – компютърна среда, математическа лаборатория за експерименти. Ние сме в математическа лаборатория – построяваме геометрични обекти, променяме ги, измерваме ги, правим експерименти с тях. Така конструираме и изследваме математически обекти. Учениците също са насърчени сами да правят математически открития – да правят предположения и да ги проверяват [2].

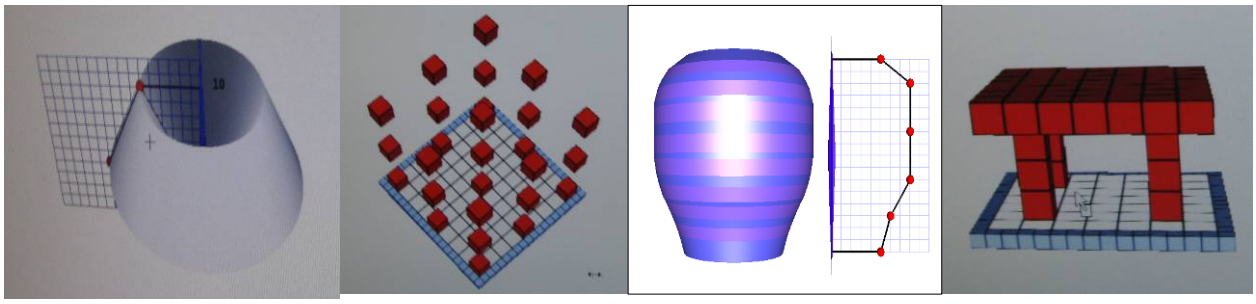
През годините след система *Геомландия* работех и с Comenius logo, Imagine – розетки, фрактали и паркети, *Geonext*, *Elica*, *GeoGebra*.

С програмирането в Comenius logo с помощта на костенурковата геометрия, а в последствие и с Imagine, с учениците създадохме много интересни процедури, свързани със създаването на правилни многоъгълници, влагане на цикли, рекурсия и др. Така експериментирахме с различни команди и параметри и те създадоха множество розетки, паркети, фрактали, спирали, звезди и др. За моите ученици проектите, които реализирахме с тях, станаха любими, те получиха удолетворение от придобитите си знания, умения и компетенции в тази нова среда и натрупаха опит в проектно-ориентирания и изследователския подход в образованието.



Друга програма, с която работим с учениците от 5. – 7. клас в модул *Интегриране на дейности по ИТ,* е системата Elica [3]. Тя може да се използва в различни контексти – анимирани виртуални модели, математически визуализации и игри. След инсталиране на Elica може да се проучат нейните приложения и хиляди примери. Предварителният преглед на тези приложения и примерите в онлайн музея й са на разположение в Elica Demos.

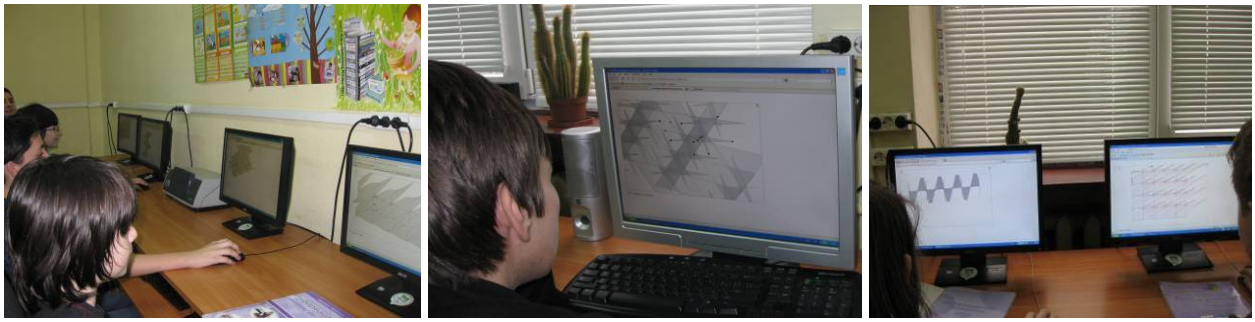


С учениците експериментирахме – „Развий въображението си с развивки”. Изследвахме и получихме много развивки на куб, паралелепипеди, призми, пирамиди, многостени, платонови и архимедови тела, ротационни тела, оригами и др. [4]. С тях установихме, че:

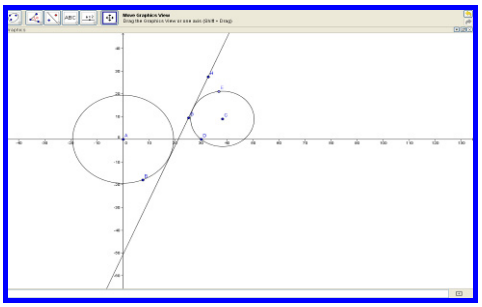
- да се забавляваш е много важно условие, когато човек учи сериозни неща;
- самопроверките са важен елемент на ученето;
- има изненадващи и красиви неща за многостените;
- много научни проблеми, възникнали от заобикалящия ни свят, могат да се атакуват с математически разсъждения или с подходяща визуализация.
- развиваме уменията си по информационни технологии;
- изследователският стил на работа с развивки в крайна сметка най-много е развило въображението на учениците.

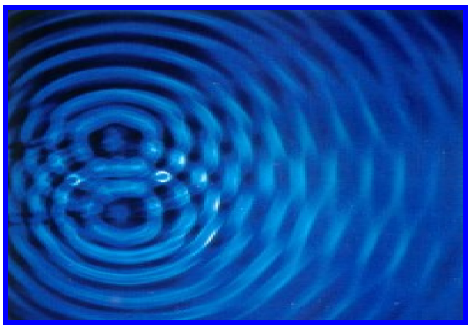
През годините също работихме с *Geonext*, *Graph* и впоследствие продължаваме с *GeoGebra*.

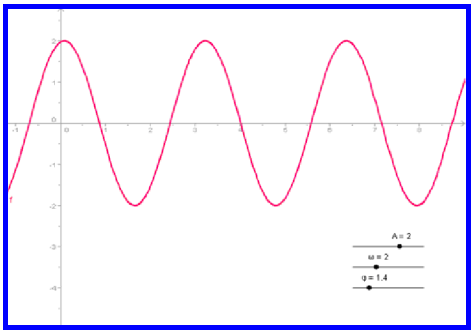
Голям интерес за учениците предизвикаха материалите, разработени от екипа на *Фибоначи* [5, 6]. Те с голямо удоволствие бързо усвоиха работата с нови динамични сценарии [7, 8]. Всички ученици се справиха безпроблемно и показаха отлични резултати. Работата в тази динамична среда значително повиши познавателната им активност.



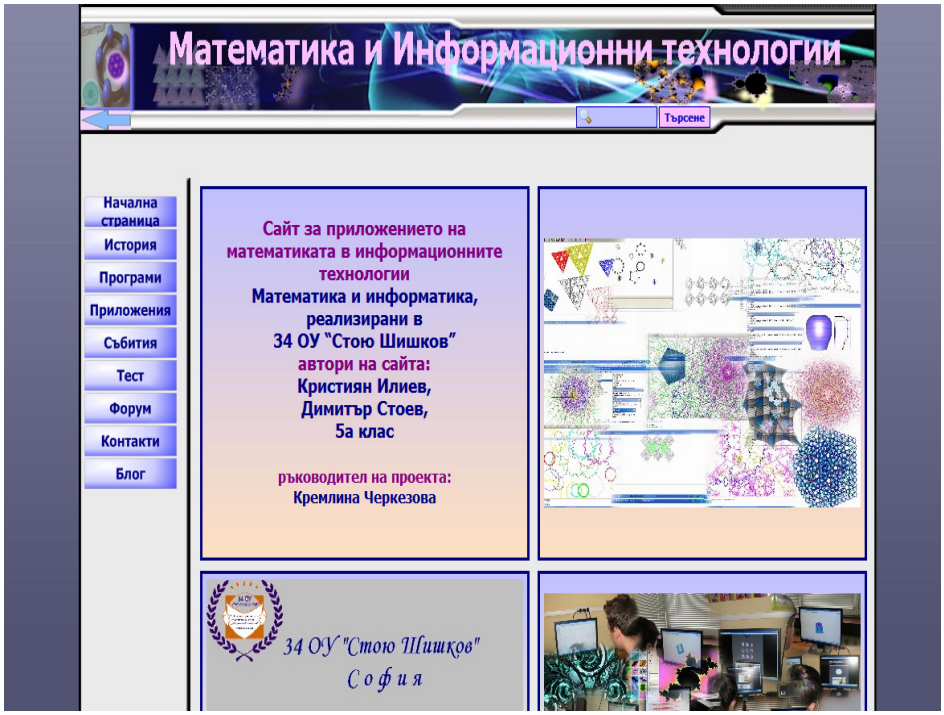
Учениците се запознаха и с идеите на бъдещето с GeoGebra:







За работата на учениците от 34 ОУ „Стою Шишков" – програми, събития, примери, идеи на за днес и бъдещето, създадохме сайт с ученици от 5 клас www.mathinit.eu5.org, с който участвахме в олимпиадата по ИТ учебна 2011/2012г. в София област и се представихме отлично.



3. Заключение

Учениците в своята работа съчетават и обработват информация, демонстрират компютъра като средство за изразяване на своите знания, умения и компетенции в областта на динамичната математика, работят в екип, като активно обменят идеи и мнения, проявяват толерантност и защитават своите. Можем да обобщим резултатите:

- Учениците конструират и описват как правят геометрични конструкции за изследване;
- Правят предположения въз основа на тези изследвания;
- Проверяват експериментално резултатите си;
- Учениците се насърчават сами да правят математически открития;
- Изграждат се социални познания;
- Интегрираният подход прилага ИКТ за изграждане у учениците на знания, умения и компетенции;

- Интерактивното обучение засилва положителната нагласа, а от нея – и мотивацията за учене – интересът към учебните предмети.

Визуализирането на задачите и тяхното оживяване води до интегриране на знанията. Новите технологии водят до по-добри резултати, до повишаване на познавателната активност и интелектуалните способности на учениците. Така интерактивните динамични технологии осъществяват развитие на мисленето, творческия потенциал и интелектуалните им способности.

Литература

1. Microsoft, *101 идеи за иновативни учители*, 2006 г.
2. Сендов, Б., С. Бойчева, *Геомландия – компютърна лаборатория за математически експерименти,* ИК „Знак”, ИК „Интела”, 1994.
3. Elica, http://www.elica.net/site/index.html, 01.02.2013 г.
4. Чехларова, Т., Е. Сендова. *Практически задачи и упражнения по информационни технологии. Развий въображението си с развивки*. Анубис. 2010. 64 с. ISBN 978-954-426-890-9
5. Чехларова, Т., Е. Сендова. Необикновено за обикновените дроби – изследвания с динамични конструкции. Макрос. 2012. ISBN 978-954-561-282-4 http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/book-drobi.pdf
6. Christou, C., Sendova, E., Matos, J.F., Jones, K., Zachariades, T., Pitta-Pantazi, D., Mousoulides, N., Pittalis, M., Boytchev, P., Mesquita, M., Chehlarova, T., & Lozanov, C. (2007). *Stereometry Activities with Dalest*. University of Cyprus: Nicosia. ISBN 978-9963-671-21-2
7. Sendova, E., T. Chehlarova. *Explorations Around the Rotational Solids. In: Mathematics Education with Technology – Experiences in Europe,* Tamara Bianco, Volker Ulm (Ed.) University of Augsburg, Augsburg, 2010. ISBN 978-3-00-032628-8
8. Чехларова, Т., Е. Сендова. *Математическият пърформанс – социална игра или образователна технология*, 42. Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2013.

Ученически проект – подготовка на състезание по математика

Лиляна Русенова, Станка Михайлова
lylymo@abv.bg

Резюме

Във всички нива на средното образование традиционно се подготвят и провеждат състезания по математика и математически празници [1, 2]. Учениците ходят по различни причини — защото им е приятно, защото искат да се докажат пред останалите, защото ще получат лично удовлетворение или под натиска на родители и учители. Развитието на съвременните технологии дава по-голяма гъвкавост и много повече възможности от техническа гледна точка. С настоящия експеримент направих опит да установя какви цели преследват и какви резултати се постигат по време на един учебен час с ученици, които имат засилен интерес към математиката. На следващ етап, като съчетах математиката с възможностите на информационните технологии, представих на учениците един начин за въвеждане на изследователския дух в часовете по математика.

Експериментът е проведен като състезание, за реализирането на което децата набелязаха следните основни моменти:

- *Подготовка на състезанието по математика – какво да включим в него и как да го проведем?*
- *В какъв вид да са реализирани състезателните материали — електронен, хартиен или друг?*
- *Как да оценим крайните резултати?*
- *Как да направим класирането — индивидуално или отборно?*
- *Кой и как ще оценява резултатите?*
- *И на последно място, но не и по важност – какви ще са наградите?*

Стартирахме подготовката, като набелязахме следните етапи [1]:

- *подбираме интересни задачи;*
- *разделяме учениците в групи: сценаристи — за подбор на задачите; програмисти — за оформянето им в електронен вид; състезатели; публика и рефер, в случай на възникване на конфликт;*
- *техническа подготовка на състезанието — осигуряване на нужната материална база и условия за провеждане;*
- *финален етап – класиране, награждаване и раздаване на грамоти за участниците.*

Съставихме два отбора, всеки с три групи, за подготовката и участието в състезанието, както и по един лидер на всеки отбор, избран от членовете му, който да има последната дума при решаване на спорните моменти в отбора. Отговорността за осигуряване на техническите средства и условията за провеждане на състезанието и награждаването единодушно бе прехвърлена на учителя.

Ключови думи

изследователски подход, проект Fibonacci, динамичен софтуер, междупредметни връзки – математика и ИТ

1. Увод

През всички етапи на състезанието – подготовка, провеждане, награждаване и анализиране на резултатите, основните въпроси, които учениците задаваха и на които търсихме отговорите заедно бяха ЗАЩО? и КАК?. Целенасочено, интуитивно или по логичен път децата търсеха решения, които да бъдат нестандартни, „красиви" и новаторски. Амбицията им бе да направят едно запомнящо се състезание, за което ще си спомнят дълго и с вълнение.

Всеки от двата отбора имаше на разположение 3 седмици за подготовка, време в което групите сценаристи и програмисти да подберат, анализират и подготвят технически състезателните материали, като разпределят между двете групи (по свое) усмотрение времето, с което разполагат.

Учителят следеше отблизо дейността на двата отбора в ролята на наблюдател и консултант при възникване на въпроси.

Основната дискусия, която предизвика бурни емоции, бе при съставянето на екипите – кои, колко и какви ученици да бъдат включени в екипа?

В първата фаза на съставянето на екипите децата се разпределиха на принципа на приятелството – всеки с другарчета си. Анализът на свършеното до момента показа, че в единия екип са изявените по математика ученици, а в другия – ученици с оценки около 4 и 5. Всички бяха на мнение, че при това разпределение крайният резултат на състезанието е предвидим.

След разпределянето на учениците в отборите започнахме триседмичната подготовка на състезанието. Всеки отбор трябваше да направи разпределение на времето за работа, като посочи колко дни ще има на разположение всяка група сценаристи за подбор на задачите и колко дена ще имат програмистите, за да ги подготвят във вида, в който ще ги представят на състезанието. Времето, в което сценаристите проучваха и избираха интересни задачи, бе използвано от програмистите за проучване на техническите възможности, базирани на ИТ, за представяне на задачите по времето на състезанието.

При подбора на задачите в единия от отборите възникна проблем при оценяване на сложността на задачите. Стигнахме до момента, в който лидерът на отбора трябваше да вземе окончателното решение – кои задачи да се включат и кои да отпаднат. След еднодневен размисъл лидерът реши, че има нужда от съдействието на преподавателя за да оформи окончателното си решение.

Групата сценаристи на първия отбор успя да подготви задачите си в по-кратък срок, с два дена по-рано от сценаристите на втория. Това им даде самочувствието да предполагат, че ще са крайният победител в състезанието. Това изказване бе контрирано веднага от децата в другата група с въпроса „ЗАЩО? Ние също сме добри, просто обмисляме нещата в детайли".

Настъпи моментът за софтуерната реализация на подбраните задачи. Групите програмисти трябваше да отговорят на няколко основни въпроса:

- Как ще бъде направено състезанието – като всеки участник получи лист със задачи и разписва решенията на други листове или се записват само крайните отговори на опрделените за целта места в листа със задачи? Идеята за пълни решения не се възприе; доводите бяха, че това изисква много време за подреждане и пълно записване на решението, така че то да бъде оценено с максимален брой точки. Като по-добър вариант учениците избраха записването само на крайния резултат върху листа със задачите, ЗАЩОТО е по-кратък, по-бърз и няма да се отнемат точки за непълно описано решение.

- Как да се оформи листът със задачи – като тест с няколко възможни отговора, като само един е верен или тест със свободен отговор за всеки въпрос? При обсъждането се получи сериозна дискусия кой вариант показва по-добре познаването на материала, върху който е тестът. Ако се използват избираеми отговори, които са близки помежду си, има възможност за грешки от прибързване или от недостатъчно познаване на материала. Допълнителните отговори се подбират така, че да отразяват най-често допусканите грешки при решаване на съответната задача.
- Как да се отбелязва верният отговор – с кръг, с хикс, със зачертаване или по друг начин.
- Как да изработим технически теста – във вариант за принтиране или в електронен вариант, който да се използва на компютър по време на самото състезание? Възможността за хартиен тест предизвика негативни реакции, защто така се правят тестове по всички прдмети и вече са много експлоатирани.

Учениците проявиха ентусиазъм да работят с електронния вариант, защото:

- е по-удобно, когато трябва да се коригира отговор, за който са открили, че са сгрешили;
- е по-лесен за работа;
- е по-съвременен начин на работа;
- могат да използват допълнителните възможности, които им предоставя компютърът.

Групата програмисти на първия отбор взе решение да изработи теста като презентация, а конкурентният реши да потърси друг вариант, който е по-добър от техническа гледна точка. Проучвайки софтуерните възможности, избраха свободна програма за създаване на тестове, която трябва да разучат и след това да използват за създаване на теста.

Тъй като двете технологии не са равностойни като възможности, трябва да намерим подход за независимо оценяване. Решението на учениците бе да се излъчат говорители, по един от всеки отбор, които да следят и записват отговора на всяка задача на противниковия отбор и след приключванегто им да обявят решенията и да ги класифицират като „вярно” или „грешно”, сравнявайки ги с предварително подготвен шаблон на верните отговори към всяка задача.

Комуникацията между учениците, обсъждането на материали и новите предложения извън учебно време се осъществява през Интернет с помощта на онлайн компютърни технологии. Успешно използваха Скайп за обмен на файлове и видеоконферентна връзка за обсъждане на идеи, Фейсбук – като платформа за споделяне на новости и разпространяване на информация в групата, както и коментари на текущи въпроси. Учениците бяха много въодушевени от възможността да проследяват развитието на даден проблем във времето чрез коментарите във Фейсбук, които използваха като текущи записки и възможност да правят справки, така че да не повтарят едни и същи пропуски.

След много емоции по подготовката на състезанието настъпи и решаващият момент на старта. Състезанието се проведе в компютърна зала, предварително подготвена за целта с тестовете в електронен вариант. Учениците предложиха нова идея – „Нека да използваме достъпа до Интернет и всичките му ресурси по време на състезанието?”. Последва контра въпрос от преподавателя: „Защо? Каква допълнителна възможност ще ви даде това?”. Мотивировката на учениците бе в посока използване на нови и модерни възможности за достъп до информация, реализиране на междупредметна връзка с изученото до момента по информационни технологии, получаване на дистанционна

помощ от друг ученик или учител в онлайн дискусии и други познати технически възможности.

За да направим състезанието учениците трябваше да подберат известен брой задачи, като се ограничат до десет, за да бъде изработен тестът. Източниците, които използваха, са сборници със забавни задачи по математика, интернет ресурси, учители по математика и родители.

Всеки участник в групата сценаристи предлага задачите, които са му харесали, след което измежду всички предложени се избират онези десет, които са най-подходящи по общо мнение. При този подбор част от предложените задачи отпадат, което води до естествената реакция на разочарование у децата. Предложиха с останалите задачи да направим повторно състезанието. Избраните за състезанието задачи трябваше да бъдат решени първо от групата състезатели в същия отбор, преди да бъдат обработени като тест. Учителят наблюдава процеса и съветва учениците при некоректни условия на задачи или пропуски в предложените решения.

Част от задачите, които децата подбраха:

Задача 1. [3] (*за умници): Доволен от работа на един селянин господарят му разпоредил да си огради правоъгълна нива с обиколка 200 м за награда. Селянинът успял да огради възможно най-много декари. Как е постъпил?*

Задача 2. *Построй правоъгълниците с лице 24 кв. ед. Кой от тях има най-малка обиколка?*

Задача 3. *Построй правоъгълници с обиколка 20 ед. Кой от тях има най-голямо лице?*

За изработването на теста единият отбор използва програма за създаване на електронни тестове, която намериха в Интернет. Вторият отбор използва Power Point, заради възможността да представят по по-интересен начин задачите чрез графични елементи и бутони, които служат като навигация за задачите с избираем отговор. При кликване върху верния отговор се зарежда слайд с текст „БРАВО! Верен отговор!”, съпроводен със звук на аплодисменти. Първия отбор, поставил задачата за селянина бе предвидил следващ слайд с графично представяне на правоъгълник с размери X и Y и голям въпросителен знак в срдата на правоъгълника. Останалите задачи, които позволяваха графично представяне, също бяха съпроводени от такова. Вторият отбор нямаше възможност да използва графични елементи, защото софтурът, който използваха, не позволяваше. Така при оценяването на компонента изработка на тестовете, групата програмисти на първия отбор получи категорична преднина.

Крайното класиране на участниците се получава от следните три компонента: оценка за подбора на задачите за група сценаристи, оценка за изработванто на теста за група

програмисти и оценка за представяне на състезанието за група състезатели. Оценяването става, като за всяка група се гласува с пляскане, подсвиркане и вдигане на шум, така че която от двете събере повече аплодисменти и овации получава една точка. След сумиране на резултатите на трите групи получаваме крайното класиране на двата отбора.

По време на подготовката и провеждането на състезанието учениците много активно използваха компютрите и ресурсите на Интернет. Много лесно и безпроблемно се справиха онези от тях, които познаваха по-добре възможностите на програмите, изучавани в учебното съдържание по ИТ и възможностите на глобалната мрежа. Така учениците осмислиха ползата от прилагането на ИТ в практиката и практически неограничените възможности на Интернет. Стигнаха до заключението, че колкото по-добри познания имат в тази област, толкова повече възможности ще имат на свое разположение.

4. Заключение

Вместо заключение да си припомним народната мъдрост: *Лесно забравяме грешките си, ако не са известни на никого, освен на нас*.

Направеният експеримент показа, че на учениците им е интересно да използват иновативни техники в образователния процес на обучение в класната стая и в извънкласните форми. С реализиранто на междупредметните връзки отговорихме на въпроси, като:

„Къде е мястото на информационните технологии при обучението по предметите, заложени в образователната програма на МОН?”

„Как да използваме пълноценно софтуерните възможности за реализация на електронно обучение в класни и извънкласни форми?”

„Какво е мястото на социалните мрежи в образователните процеси и потока на информация при работа по проекти в екип?”

„Може ли да бъде сведена ролята на преподавателя до това, той да бъде коректор и оценител на учебния процес?”

„Възможно ли е да реализираме методичните единици и да ги надградим с изследователски подход в процеса на обучение?”

На всички тези въпроси можем да отговорим с ДА.

Добър от стратегическа гледна точка е подходът преподавателят да използва по възможност повече мултимедийни средства и ресурсите на Интернет при обучението по математика, съчетавайки познатия метод на обучение с иновативния. Наблюденията върху работата на децата дадоха възможност да систематизираме следните изводи:

- Полезно е използването на електронни тестове в обучението и проверката на способностите на учениците;
- За предпочитане е организиране на самостоятелна работа с помощта на електронни ресурси, файлове, които биват предоставяни на децата за работа в къщи, изпращани по електронна поща или споделяни в социалните мрежи и Интернет. За целта може да се създаде страница на класа във Фейсбук, както и самостоятелен сайт.
- И няколко причини, които могат да попречат на протичането на учебният процес по гореописания начин, са: недостатъчното познаване на техническите възможности и електронни ресурси от преподавателите по съответните предмети, реализиращи

междупредметните връзки; липса на достатъчно работни места и достатъчно добра материална база, осигуряваща техническите изисквания на проекта;

При следващо провеждане на такова състезание учениците ще стъпят на вече познати за тях моменти. Очакването е времето за техническа подготовка на тестовете да бъде съкратено, подборът на задачи също да стане в по-кратки срокове, защото вече имат набор от източници и стратегия за подбор на информация в Интернет. Така по-удачно биха си разпределили времето за подготовка и работа върху тестовете, тъй като ще се елиминира времето за проучване на техническите възможности. Учениците единодушно предложиха да се проведе следващо такова състезание, в което да включим задачите, останали извън тестовте на проведеното.

Тази практика би била полезна в квалификационни и преквалификационни форми за учители, които ще реализират междупредметни връзки по различни учебни предмети и ИТ. Акцент за учителите може да се постави на възможностите за представяне на информация пред публика посредством електронни презентации.

Учениците, веднъж проследили етапите по подготовка на състезанието, вече имат опит в тази посока, което им дава самочувствието и възможностите да направят подобно състезание и по други предмети.

Литература

1. Чехларова, Т. (2005) *Възраждане на празниците на математиката*. Пловдив, Научни трудове на СУБ, т.V,. с. 145 – 150, ISSN 1311-9-9192
2. Чехларова, Т., Т. Накова, М. Кирева. (2007) *“Звездна математика” с мултимедия*. В: сборник Приемственост и перспективи в развитието на педагогическата теория и практика. ФНПП, София, ВЕДА СЛОВЕНА – ЖГ, 2007. с. 286 – 290, ISBN 978-954-8846-02-8
3. Тужаров, Х. *Етапи при разработка на тестове,* http://tuj.asenevtsi.com/EL09/EL51.htm (19.02.2013).
4. Чехларова, Т. *Геометрични фигури – изследвания с динамични конструкции*. Макрос. 2012.

Как да създадем динамичен учебен материал най-лесно технически?

Мария Браухле
brauchle21@yahoo.de
Обл. Благоевград, с. Добърско

Резюме

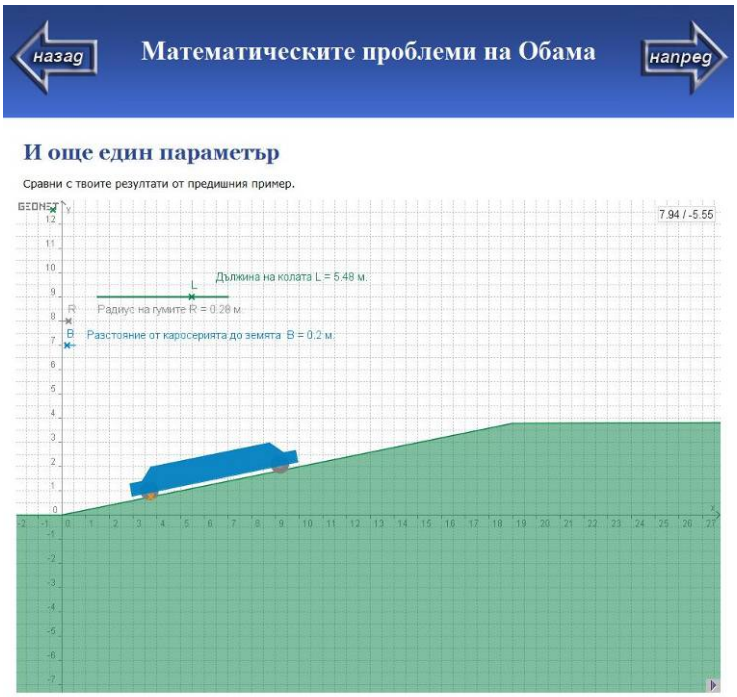
В статията е представена авторска разработка на уеб-приложение за създаване на динамични учебни материали с помощта на динамичен софтуер. Дадени са кратки практически указания за използването му в преподавателската практика.

Ключови думи

уеб-приложение за създаване на динамични учебни материали, динамичен софтуер, GEONExT, GeoGebra

1. „Динамична презентация“

С появата на GEONExT и GeoGebra стана възможно създаването на динамични учебни материали в подкрепа на изследователския подход в математическото образование [1–4]. Съчетаването на динамични графики с текстове във формат HTML открива нови възможности за организиране на учебния процес в часовете по математика. Чрез уеб-приложението „Помагало 1.1” динамичните учебни материали се създават бързо и лесно от техническа гледна точка, без да са необходими познания по HTML.



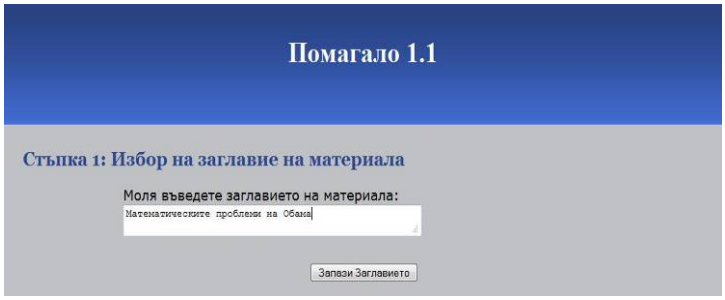
Фиг. 1. Динамичен учебен материал, създаден с „Помагало 1.1“

2. Подготовка на динамичния учебен материал

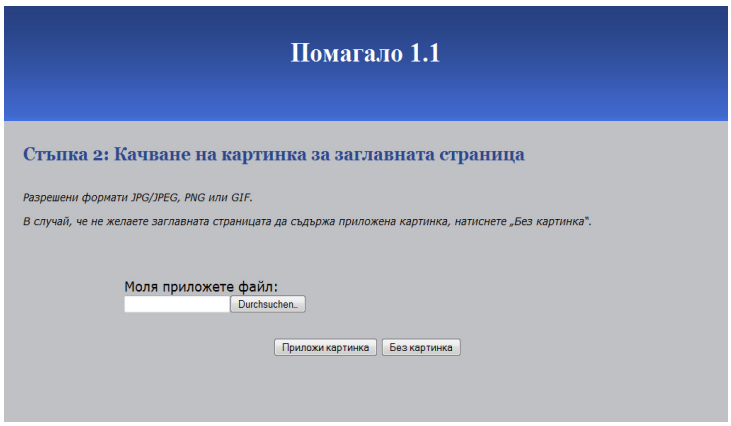
Преди да стартирате приложението „Помагало 1.1”, е необходимо да създадете динамични графики с GeoGebra или GEONExT, съобразени с вашите идеи и с целите на учебния материал. Иновацията, произлизаща от динамичния математически софтуер, е възможността да използваме изследователския подход в обучението по математика. Целта на динамичните учебни материали не е те да заместят учебника по математика и единствено да онагледят математическите зависимости, а е преди всичко в това, да дадем възможност на учениците да експериментират и да се превърнат в изследователи. Последното изисква както качествени динамични графики, така и доброто им съчетаване с текст и картинки в самия динамичен учебен материал.

3. Уеб-приложението „Помагало 1.1“ само ви води

На принципа на попълване на формуляри, уеб-приложението „Помагало 1.1” ви води стъпка по стъпка към създаването на динамичен учебен материал.

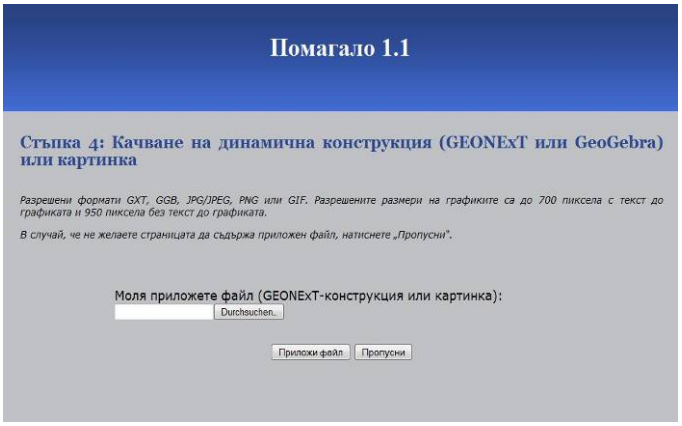


Заглавието се въвежда в бялото поле и се натиска бутонът „Запази Заглавието“.



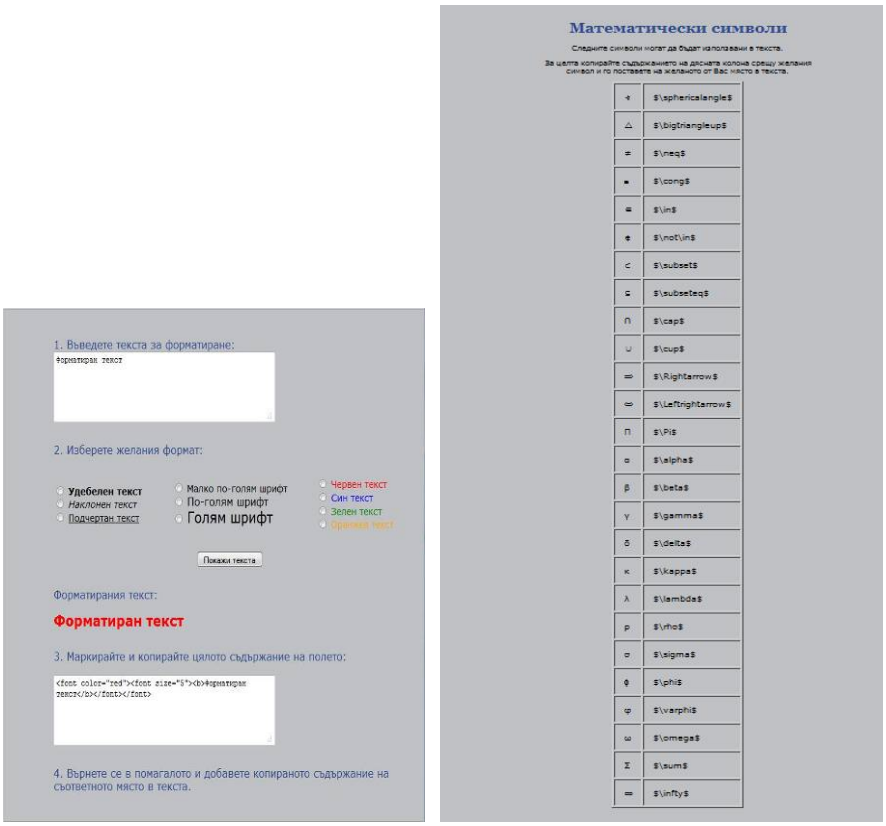
На тази стъпка имате възможност да качите картинка, която да се показва на заглавната страница на динамичния учебен материал.

Името на автора (ако е въведено) се показва в долния ляв ъгъл на готовия учебен материал.

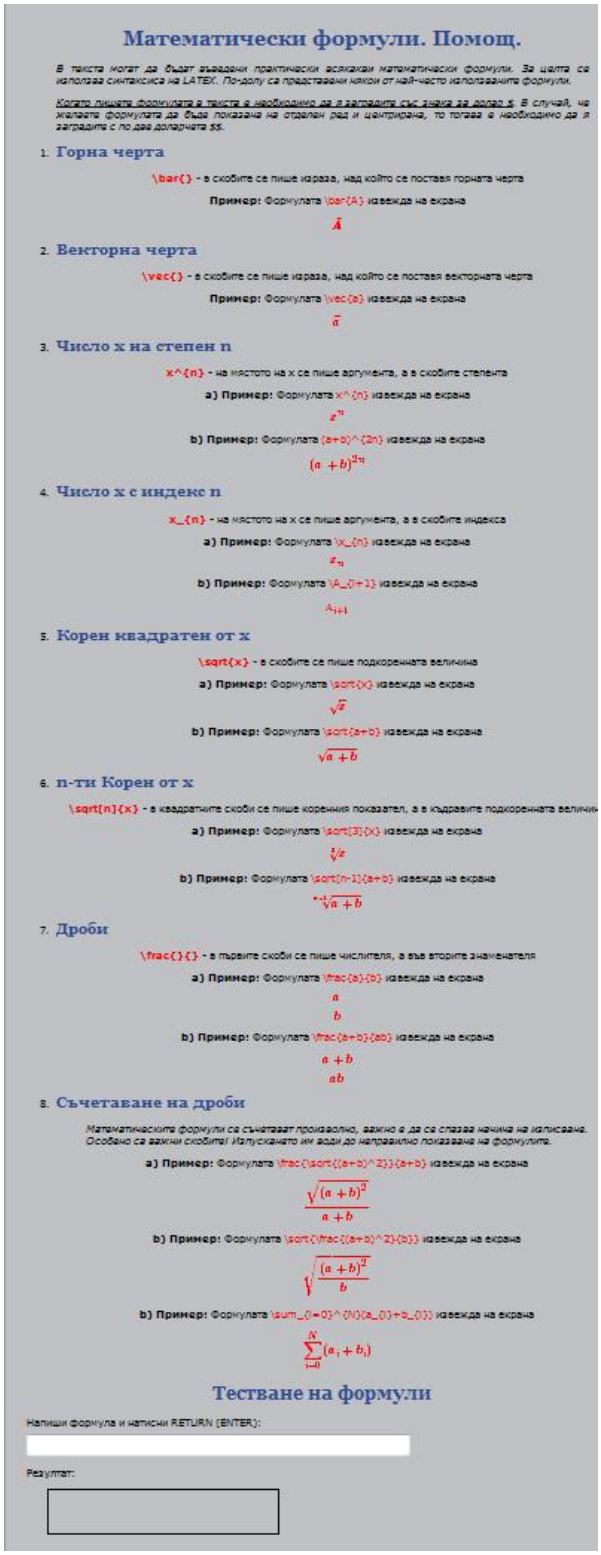


В помагалото е заложена идеята на всяка отделна страница от динамичния учебен материал да има само по една динамична конструкция или картинка, придружена с текст. Но имате възможност да включите във Вашия материал и страници, съдържащи само текст, т.е. на „Стъпка 4“ можете да направите Вашия избор, дали следващата страница на материала ще съдържа само текст или ще е комбинация от графика и текст. Заредената графика се появява във формуляра на следващата стъпка.

На „Стъпка 5“ се осъществява същинското оформяне на отделните страници на учебния материал. Тук се добавят заглавие на страницата, текстове над, до и под графиката. Текстът може да бъде форматиран или могат да бъдат добавени формули към него с помощта на линковете **„Добавяне на форматиран текст“**, **„Добавяне на математически знак“** (Фиг.2) и **„Добавяне на формули“** (Фиг. 3). При натискане на тези линкове се отварят отделни прозорци с подробни инструкции за ползване.



Фиг. 2. Помощни прозорци „Добавяне на форматиран текст“ и „Добавяне на математически знак“



Математически формули. Помощ.

В текста могат да бъдат въведени практически всякакви математически формули. За целта се използва синтаксиса на LATEX. По-долу са представени някои от най-често използваните формули.

Когато липсата формулата в текста е необходимо да я заградите със знака за долар $. В случай, че желаната формулата да бъде показана на отделен ред и центрирана, то тогава е необходимо да я заградите с по два доларчета $$.

1. **Горна черта**

\bar{} - в скобите се пише израза, над който се поставя горната черта

Пример: Формулата \bar{A} извежда на екрана

$\bar{A}$

2. **Векторна черта**

\vec{} - в скобите се пише израза, над който се поставя векторната черта

Пример: Формулата \vec{a} извежда на екрана

$\vec{a}$

3. **Число x на степен n**

x^{n} - на мястото на x се пише аргумента, а в скобите степента

a) Пример: Формулата x^{n} извежда на екрана

x^{n}

b) Пример: Формулата (a+b)^{2n} извежда на екрана

$(a+b)^{2n}$

4. **Число x с индекс n**

x_{n} - на мястото на x се пише аргумента, а в скобите индекса

a) Пример: Формулата \x_{n} извежда на екрана

x_{n}

b) Пример: Формулата \A_{i+1} извежда на екрана

A_{i+1}

5. **Корен квадратен от x**

\sqrt{x} - в скобите се пише подкоренната величина

a) Пример: Формулата \sqrt{x} извежда на екрана

$\sqrt{x}$

b) Пример: Формулата \sqrt{a+b} извежда на екрана

$\sqrt{a+b}$

6. **n-ти Корен от x**

\sqrt[n]{x} - в квадратните скоби се пише корения показател, а в кръглите подкоренната величи

a) Пример: Формулата \sqrt[3]{x} извежда на екрана

$\sqrt[3]{x}$

b) Пример: Формулата \sqrt[n-1]{a+b} извежда на екрана

$\sqrt[n-1]{a+b}$

7. **Дроби**

\frac{}{} - в първите скоби се пише числителя, а във вторите знаменателя

a) Пример: Формулата \frac{a}{b} извежда на екрана

$\frac{a}{b}$

b) Пример: Формулата \frac{a+b}{ab} извежда на екрана

$\frac{a+b}{ab}$

8. **Съчетаване на дроби**

Математическите формули са съчетават произволно, важно е да са спазва начина на написване. Особено са важни скобите! Изпускането им води до направилно показване на формулите.

a) Пример: Формулата \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{a+b} извежда на екрана

$\frac{\sqrt{(a+b)^2}}{a+b}$

b) Пример: Формулата \sqrt{\frac{(a+b)^2}{b}} извежда на екрана

$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{b}}$

b) Пример: Формулата \sum_{i=0}^{N}{a_{i}+b_{i}} извежда на екрана

$\sum_{i=0}^{N}{a_{i}+b_{i}}$

Тестване на формули

Напиши формула и натисни RETURN (ENTER):

Резултат:

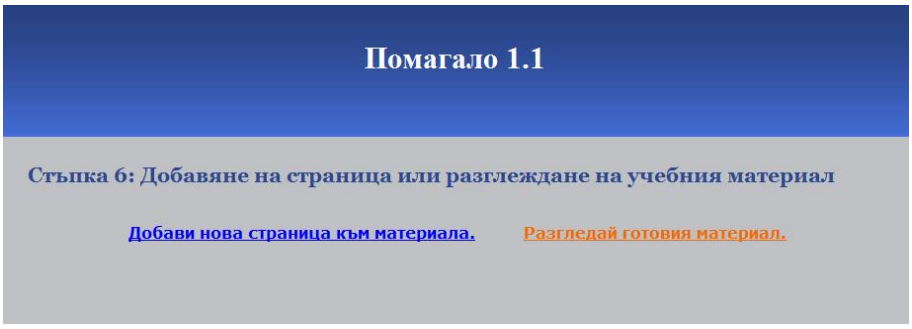
Фиг. 3. Помощен прозорец „Добавяне на формули“

В Табл. 1 са дадени примерите от помощния прозорец **„Математически формули. Помощ”,** чрез съчетаването на които могат да се напишат всякакъв вид математически изрази. В помощния прозорец е вградено и поле, даващо възможност за тестване на формулите, преди те да бъдат копирани в текста на съответната страница.

Горна черта	$\bar{A}$
Векторна черта	$\vec{a}$
Число на степен *n*	x^n, $(a+b)^{2n}$
Число с индекс *n*	x_n, A_{i+1}
Корен квадратен	$\sqrt{x}$, $\sqrt{a+b}$
n-ти Корен	$\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[n-1]{a+b}$
Дроби	$\frac{a}{b}$, $\frac{a+b}{ab}$
Съчетаване на формули	$\frac{\sqrt{(a+b)^2}}{a+b}$, $\sqrt{\frac{(a+b)^2}{b}}$, $\sum_{i=0}^{N}(a_i+b_i)$

Табл. 1 Примерни формули от помощния прозорец „Математически формули. Помощ".

Последната „Стъпка 6" Ви дава възможност да разгледате създаденото до този момент и да добавите нови страници към материала, т.е. да се върнете на Стъпка 4.



4. Достъп до уеб-приложението „Помагало 1.1"

„Помагало 1.1" е достъпно на сайта http://fibomath.swu.bg/begin/. Ползването му е безплатно, но изисква еднократна регистрация. Създадените от Вас динамични учебни материали се показват като списък на страницата, от която стартирате приложението. Вие имате възможност да редактирате вече готовите материали, да ги разглеждате или да ги сваляте на Вашия компютър. Обърнете внимание, че при използване на формули в текста Ви е необходим достъп до Интернет.

5. Добър помощник

Изучаването на динамичните софтуери и създаването на динамични конструкции първоначално изискват време. Поради тази причина, водещата идея на „Помагало 1.1 е за простота и достъпност на ползване. С негова помощ имате възможност бързо и лесно да създадете интересен и увлекателен динамичен учебен материал, с помощта на който учениците да влязат в ролята на изследователи.

Литература

1. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*. 39 Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2010.
2. Kenderov, P., Sendova, E., Chehlarova, T. *IBME and ICT – the experience in Bulgaria*. В: Baptist, P. and Raab D. (eds.): Implementing Inquiry in Mathematics Education, Bayreuth 2012. pp. 47-54, ISBN 978-3-00-040752-9
3. Kenderov, P., E. Sendova. *Towards enhancing the inquiry based mathematics education*. In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies - Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information tehnologies. 2012. pp.56-70 ISBN 978-954-2946-19-9
4. Chehlarova, T., D. Dimkova, P. Kenderov, E. Sendova. *Seeing the innovations as an opportunity, not a threat: lessons from the InnoMathEd European project*. 40. Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2011. с.347-355, ISSN 1313-3330

Паркетирането в часовете по изобразително изкуство – 8. клас

Мариана Данкова
m_dankowa@abv.bg
10 СОУ „Теодор Траянов”, София

Резюме

В статията са разгледани добри практики на обогатяване на традиционното обучение по изобразително изкуство с динамични конструкции в контекста на паркетиране на равнината.

Ключови думи

изследователски подход, паркетиране, междупредметни връзки, проект Fibonacci, динамичен софтуер

Понякога в часовете по изобразително изкуство математиката присъства доста осезателно. Всички уроци от комбинаториката [1] са базирани на някои основни математически понятия, геометрични форми и тела и техните свойства. Нашият урок е за правилните квадратни мрежи и свойството им да запълват плътно равнината. Работното заглавие на материала беше – „Как се загубиха моите осмокласници между две точки и няколко прави линии в равнината”. Обикновено тези часове са от типа на „тихите” и любими часове, защото децата са силно ангажирани от новата и доста трудна задача. Материалът се изучава в седми и при желание – в осми клас. Аз избрах да експериментирам с 8а клас, защото са по-малко деца в паралелката и имаше възможност да поработят последователно на единствения компютър в кабинета по изобразително изкуство. Запознах се с програмата GeoGebra месец преди занятието в рамките на проекта *Фибоначи* [2] и затова урокът беше експеримент както за децата, така и за мен.

Задачата на учениците беше да построят от изходна основа квадрат нова фигура, „модул”, която да запазва свойството паркетиране на квадрата, но да има променени линии. Какво се случва когато работим с традиционните изразни средства – черна дъска и тебешири? Възможностите за демонстрация са силно ограничени. В началото на урока си припомняме видовете линии: права, начупена, вълнообразна, частите на окръжността – дъга. Децата разчертават квадратна мрежа от 9 квадратчета, по която създават шаблон за собствени модули. Обикновено при първите им опити е особено трудно да си представят как да извършат трансформацията на правите линии на квадрата до получаването на новата фигура, но със запазени свойства да паркетира. Затова те рисуват в тетрадки с квадратчета, от тези за първи клас. В началото има бурни протести, че не са „бебета”, но в процеса на проектирането са доволни от възможността да работят без чертожни инструменти и да се ръководят от по-малките квадратчета, за да променят линиите и да следят за последователното отнемане от едната фигура и прибавянето към съседната огледално еднакви елементи. Стремежът за създаване на нови и оригинални модули е свързан с много грешки. Откриването и анализът им са един от начините за осмисляне на идеите и тънкостите при създаване на квадратен модул (паркетираща плочка и паркет с нея).

Виждайки движението на линиите и промяната на формите, децата не винаги разбират как точно да проектират своя модул. Най-често те правят украса вътре във фигурата, без да променят нейната форма. Работят с много малки детайли, които правят новата фигура твърде сложна за изпълнение. Проблем в тези часове е постигането на продължителна концентрация, необходима при създаване на картините, защото се работи с шаблон и фигурите се рисуват една по една. Често се получава разминаване при подреждането и обикновено се използва само транслацията, и от там – неточно паркетиране.

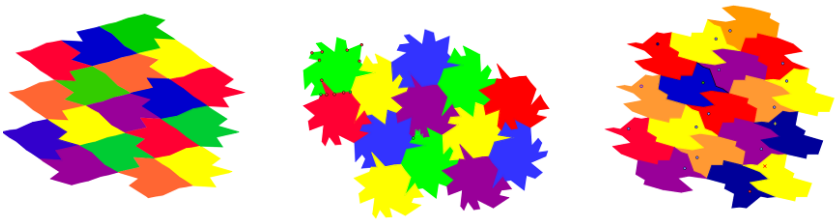
Фиг. 1. Добре проектирани, но разместени при подреждането модули

Оцветяването също се оказва доста труден процес, защото се следи за точното попълване на модулите и равномерното полагане на тона, като почти няма възможност за корекции.

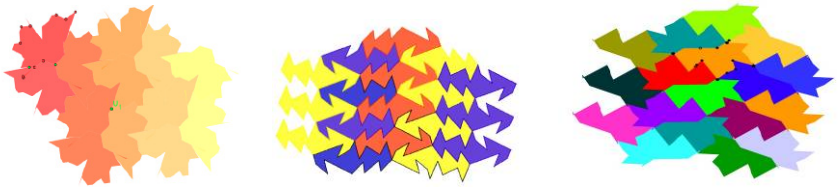
Фиг. 2. Добре подредени, но погрешно оцветени модули

Задачите по изобразително изкуство са не само да построим „паркетната плочка". Понякога темата е проект за опаковъчна хартия или десен за плат, като модулите са само средство, с което изграждаме декоративната композиция. Модулите се оцветяват в различни цветове, но често се групират по няколко, заедно с част от фона, когато подреждането не е плътно и се оцветяват еднакво.

След като децата се измъчиха достатъчно с ръчното проектиране, решихме, че е време техниката да поработи в помощ на човека. В нашите часове ползвахме готова динамична решетка от GeoGebra, тъй като времето за запознаване с програмата беше много малко. Учениците бяха изненадани от едновременното изменение на фигурите и възможността бързо и лесно да променят оцветяването. Когато видяха на екрана движението на линиите, някои от децата казаха, че чак сега са разбрали за какво всъщност става въпрос! Използването на динамичен софтуер [3, 4] доведе до скок в резултатите, интересът им силно се повиши, опитаха самостоятелно разширяване на познанията по темата. Работата по проектирането продължи и като резултат – множество от модули, които запълват равнината плътно.



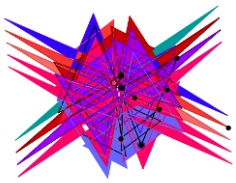
Фиг. 2. С динамично компютърно приложение



Фиг. 3. Различни начини на оцветяване – с преливане на тоновете; контрастно и отново не съвсем точно

Въображението на тийнейджърите е безгранично, когато става дума за нов софтуер. Сериозни затруднения с програмата нямаше, само бързината на децата се оказа в повече и отново имаше грешки в проектите и оцветяването.

4. С динамично компютърно приложение



Фиг. 5. Конфигурация тип звезда

Тъй като в кабинета по изобразително изкуство се редуваме на един компютър, разчитах, че децата ще продължат да работят самостоятелно в къщи. Очакванията ми не се оправдаха, вероятно защото учениците по-трудно се самомотивират и независимо, че това е нов и (както се оказа в началото) интересен за тях продукт, липсата на директен контрол се почувства.

При по-сериозни междупредметни връзки биха се получили много по-добри резултати. Ако до всеки художник има по един информатик, ех...! В часовете по информационни технологии, където всяко дете разполага с компютър и може да работи самостоятелно, могат да се разработват динамичните структури и по тях да се правят моделите, които после да използваме за часовете по рисуване. На екрана могат да се видят веднага множество варианти било то за трансформациите или за оцветяването и така да се получат по-точни и правилни паркети.

Литература

1. Чехларова, Т. *Геометрични фигури - изследвания с динамични конструкции.* Макрос. 2012. ISBN 978-954-561-279-4.
2. *Кендеров, П. Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*. 39. Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2010.
3. Чехларова, Т., Е. Сендова. *Динамично паркетиране*. сп. Математика и информатика, бр.6, 2011. С. 5-17, ISSN 1310-2230
4. Chehlarova, T., Sendova, E., Stefanova, E. (2012) *Dynamic tessellations in support of the inquiry-based learning of mathematics and arts*, in Theory, Practice and Impact – Proceedings of Constructionism 2012, Athens, Kynigos, C., Clayson, J., Yiannoutsou, N. (Eds) August 21-25, pp.570-574

Как да формулираме задачите, за да стимулираме изследователския подход

Недялка Христозова
nhristozova@abv.bg
VI ОУ "Свети Никола", Стара Загора

Резюме
В статията е споделен опит в търсене на нови формулировки на някои геометрични задачи, отнасящи се до видове триъгълници в 7. клас. Целта ни е да стимулираме изследователския подход на децата в обучението им по математика.

Ключови думи
Геометрия, преформулиране на задачи, динамичен софтуер, изследователски подход

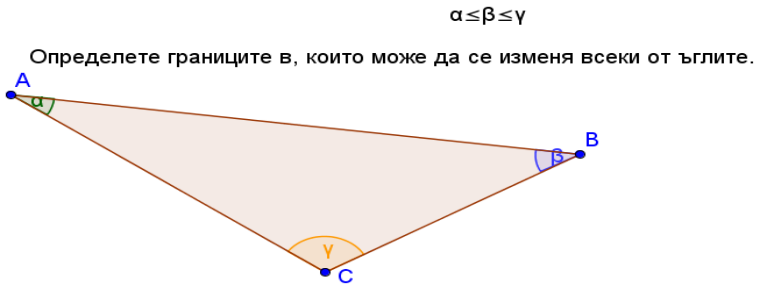
Изследователският подход не е новост в българското образование. Но с бързото развитие на техническите средства за обучение той придобива нови измерения. Използването на компютрите за търсене на закономерности между величини и обекти, проследяване на различни процеси, създаване на динамични среди отново го актуализират сред най-добрите подходи за развитие на децата. В тази връзка обучението по математиката е добра възможност за развитие на творческото и нестандартното мислене на учениците.

В традиционния начин на преподаване на математика срещаме най-често ключовите думи: *докажи, намери, пресметни, построй фигура* [1]. Тези основни видове задачи имат своето определено място в обучението. Но има моменти, когато преформулирането на една такава задача може да стимулира в по-голяма степен изследователското търсене на ученика [2]. По-долу ще споделим нашия опит в търсене на нови формулировки на някои геометрични задачи, отнасящи се до видове триъгълници в 7. клас. Целта ни е да стимулираме изследователския подход на децата в обучението им по математика.

Например тривиалната задача за намиране на един от ъглите на триъгълника, ако знаем другите два, ние формулирахме така:

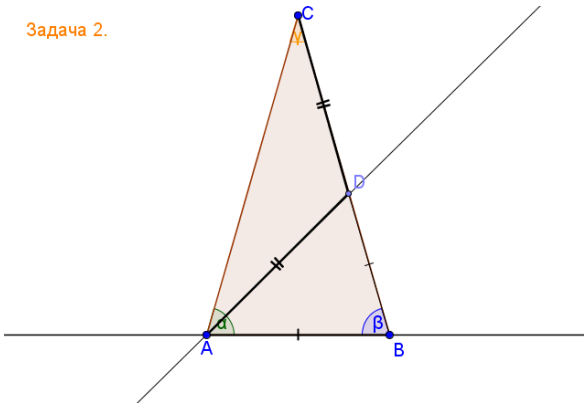
Задача 1. *За ъглите α, β, γ на триъгълника ABC предполагаме, че $\alpha \le \beta \le \gamma$. Изследвайте в какви граници се изменя всеки от ъглите α, β, γ, като сами си направите динамичен модел с помощта на ГеоГебра.*

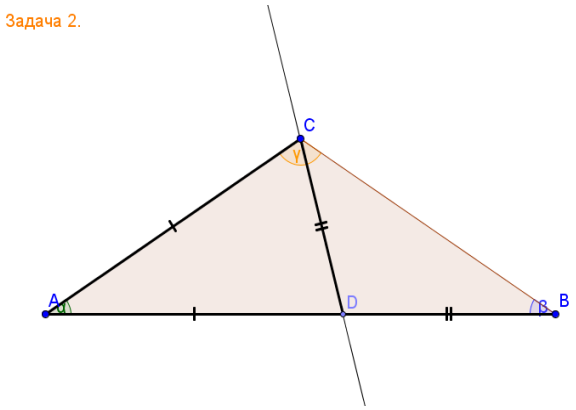
Ето и динамичната конструкция (в чийто текст запетайката също се е придвижила ☺):



Отговор. *0< α ≤ 60º, 0 < β ≤ 90º, 60º ≤ γ < 180º*

При изучаване на равнобедрен триъгълник поставих на учениците следната задача:



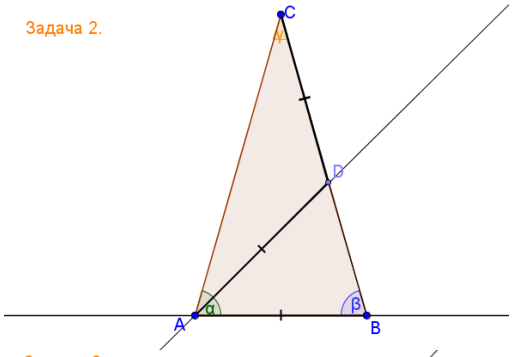


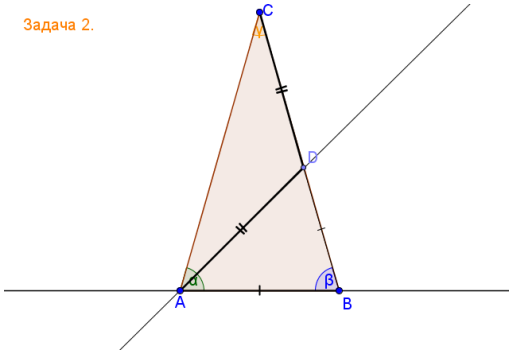
Задача 2. *Права линия разделя равнобедрен триъгълник на два равнобедрени триъгълника. Да се намерят ъглите на изходния триъгълник.*

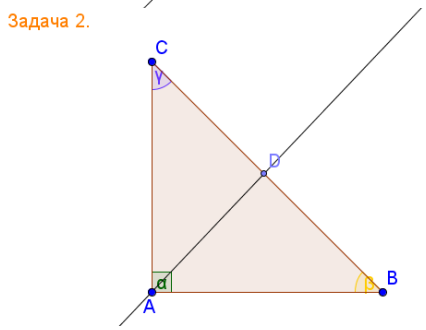
90% от учениците направиха чертеж на остроъгълен равнобедрен триъгълник, останалите – на тъпоъгълен, разделен на два равнобедрени триъгълника. Всеки реши задачата по своя вариант и при коментара на решенията се установи, че дотук има 2 начина на чертеж и решение и в двата случая отговорите са различни. Непълнотата в мисленето на децата ме провокира да помисля как да формулирам условието, че то да ги стимулира към пълно изследване на проблема. Предложих им следното условие:

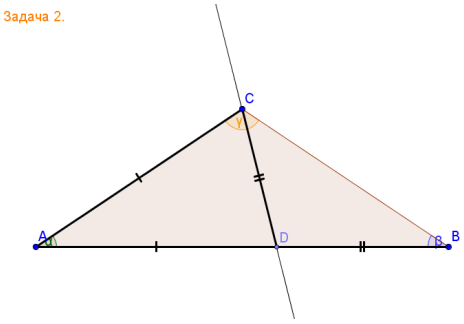
Задача 2.1. *Изследвайте възможностите, при които една права разделя равнобедрен триъгълник на два равнобедрени и определете ъглите на всички триъгълници.*

Ето какви възможности се получиха:





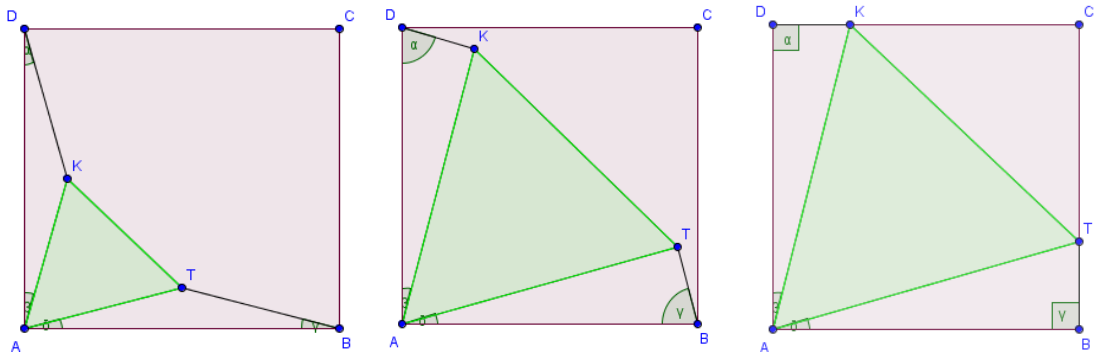




Установихме 4 възможности и след решаване на задачата се оказа, че всеки случай има различен отговор.

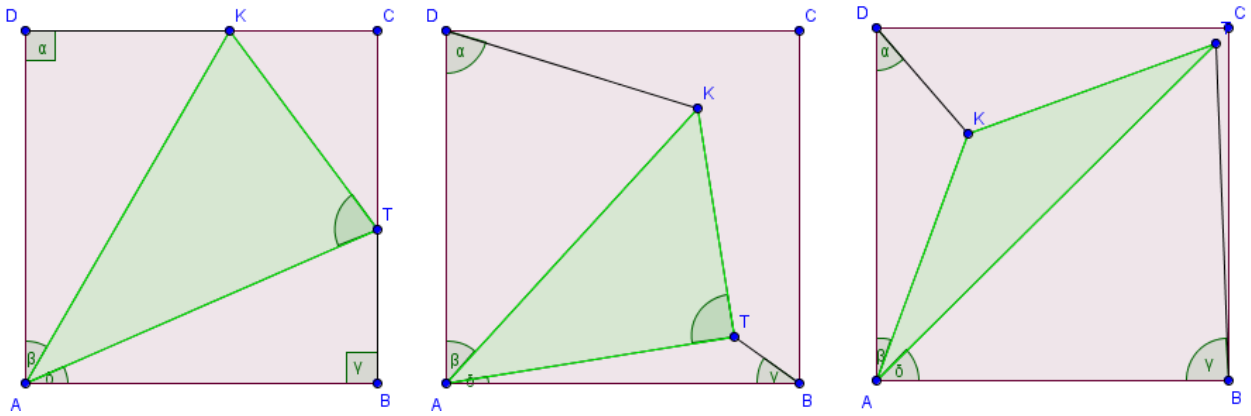
Подобна беше ситуацията и със задача 3. Зададох я стандартно:

Задача 3. *Даден е квадратът ABCD с единствени вътрешни точки K и T, такива, че* $\sphericalangle DAK = \sphericalangle BAT = 15^\circ$. *Какъв е видът на Δ AKT, ако а)* $\sphericalangle ABT = \sphericalangle ADK = 15^\circ$; *б)* $\sphericalangle ADK = \sphericalangle ABT = 75^\circ$; *в) Точките K и T са вътрешни съответно за страните DC и CB?*



Оставих децата сами да направят чертежа на условие а) в тетрадките си. Справиха се, но това им отне не малко време. Нямаха желание да начертаят втория чертеж. Тогава някой предложи да използваме ГеоГебра, за да разгледаме цялото условие на задачата динамично. Сами направиха чертежа, установиха и доказаха общото решение на задачата, а именно, че триъгълникът *AKT* е винаги равностранен. По-любопитните ученици започнаха да движат точките *K* и *T* не само по правите *AK* и *AT*. Започнаха да получават различни интересни за тях други видове триъгълници и любопитството им нарасна. Тогава формулирах задачата така:

Задача 3.1. *Изследвайте многообразието на видовете триъгълници, които се получават при: а) динамика на K и T; б) динамика на самия квадрат.*

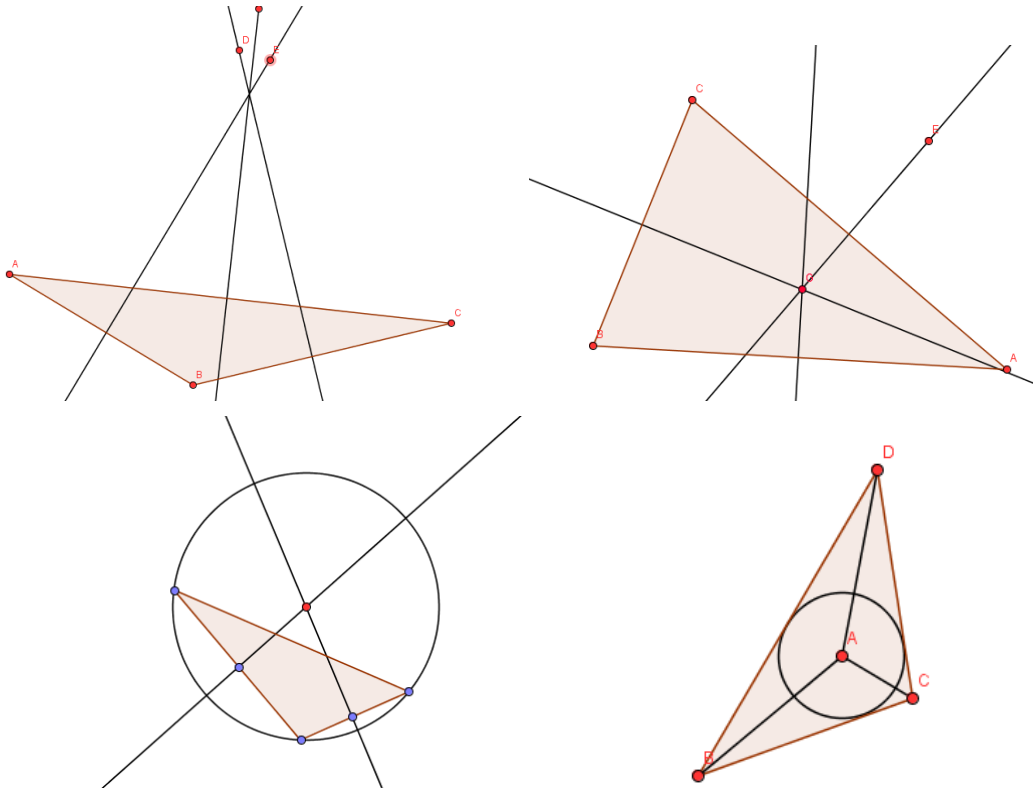


Отделните ученици получиха различни видове триъгълници. При обобщаване на решенията определихме вида на триъгълниците, условията при които те се получават, възможни варианти на взаимни положения на различни видове триъгълници в равнината на квадрата. Така с динамичната система ГеоГебра обобщихме целия дял триъгълници при нестандарти условия. Самите деца бяха откриватели.

Друга интересна ситуация се получи при изучаване на симетралата и ъглополовящата в триъгълника. Поставих задачата така:

Задача 4. *Начертайте: а) височините, б) симетралите, в) медианите, г) ъглополовящите на един триъгълник.*

80% от децата разгледаха задачата само в остроъгълен триъгълник. Няколко отличника се сетиха за тъпоъгълен триъгълник и решиха задачата чрез него. Видя се, че не всички решения съвпадат.



След уточняване на разсъжденията самите ученици си зададоха въпроса: *Къде ще се намират тези пресечни точки в правоъгълния триъгълник?* И отново почувстваха необходимостта от ГеоГебра. За да задоволя любопитството им, зададох следната

Задача 4.1. *Изследвайте забележителните точки на триъгълника и установете техни свойства.*

Учениците сами установиха, че пресечните точки на симетралите и ъглополовящите са съответно център на описаната около триъгълника окръжност и на вписаната в него. Определиха отношението 2:1, в което медицентърът разделя медианата в триъгълника.

Децата се почувстваха много удовлетворени от труда и знанията си, като разбраха, че техните „открития" ще се изучават в 8. клас по математика. Използваната динамична система ГеоГебра дава възможност за формулиране дори на тривиалните задачи, така че те в по-голяма степен да стимулират изследователския подход на учениците [3] при обучението им по геометрия в 7. клас. В този случай ключовите думи са: *изследвай, открий зависимост, как се изменят дадени величини и обекти*. Това разкрепостява мисленето на учениците, води до по-голямо творчество и вариативност. Мотивира ги да учат, като задоволява техните търсения. Води до удовлетвореност от знания и труд.

Литература:

1. Кючуков, А. *Избрани задачи по математика за 5. – 8. клас,* АИ „Проф. Марин Дринов", 1995 г.
2. Chehlarova, T., E. Sendova. *Enhancing the inquiry-based learning via reformulating classical problems and dynamic software*. Годишник на НПУ "М. П. Драгоманов", Киев, Украйна, бр. 8, серия 3, 2011, с. 125-132.
3. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*. 39 Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2010.

Практическо приложение на математиката

Недялка Христозова, Румен Кънчев
nhristozova@abv.bg, rkanchev@gmail.com
VI ОУ „Свети Никола" – гр. Стара Загора

Резюме

В статията са представени примери на преживяване на математиката като вид действие, с ученици от шести клас. Споделени са впечатления от прилагане на изследователския подход по два начина: без компютър и с използване на компютър.

Ключови думи

Учене чрез действие, изследователски подход, проектно-ориентиран подход, Елика, ГеоГебра

Динамиката на съвременния живот изисква от всеки човек проява на определена доза креативност. Тя води до създаване на нови идеи, до по-добро решаване на проблеми, дори и до по-добър личен живот.

Според Едуард де Боно творческото мислене не е вродено качество за малцина избраници, а универсално умение, на което всеки може да се научи – също като математиката. Това умение се създава и развива в училищна възраст. Един от най-добрите подходи за това е изследователският. Чрез него може да се покаже експерименталното приложение на математиката в практиката.

Проектът Фибоначи със своите динамични системи за изследване на зависимости между различни обекти дава възможност и на учителите, и на учениците да развият своята креативност, иновация и творчество [1]. Като преподаватели по математика и по информатика ние почерпихме идеи от материалите на Евгения Сендова и Тони Чехларова [2, 3] за конструиране на модели на шишенца за парфюм. Коментирахме ги с нашите ученици от 6 клас. След това дообогатихме опита си и предложихме на децата да изработят проекти за ученическа раница, като ползват динамичните системи ГеоГебра и Елика [4-6].

Нашата цел е да се преживее математиката като вид действие, т. е. не да се повтаря теоретичното съдържание, а да се извърви процесът на търсенето на идеи. Самостоятелното учене да води до креативност и иновация.

Ще представим няколко примера на реализация на тези идеи от учениците в 6.клас – учене чрез действие. Приложихме изследователския подход по два начина: без компютър и с използване на компютър.



След изучаване на дял „Рационални числа” поставихме на учениците задачи за решаване на проблема с оптимизация на покупки с ограничени средства. Учениците сами се разделиха на работни екипи. Всяка група получи по равна сума пари, с която трябваше да закупи определена почерпка за целия клас по повод Коледното тържество: едната група – сладки, другата – соленки, третата – плодове и четвъртата – безалкохолни напитки. Трябваше да разкажат за вариантите на разпределение на парите, да покажат касовите бележки като най-добър начин на оптимизиране на средствата и да изразят емоцията си от преживяното.

Оказа се, че на една от групите не достигат парите пред касата в магазина, което автоматично насочва учениците от групата към търсене на ново, по-добро решение. На друга група остават повече от предварително разпределените пари и те купуват допълнително още лакомства.

Най-добро разпределение е направила групата за плодове, на която са останали стотинки, достатъчни за закупуване на салфетки.

След това на учениците им бе поставена следната задача: *Да подредят почерпката така, че тя да е достъпна за всички на определена площ в кабинета по математика.* Така те трябваше да оптимизират и мястото, и площта, така че да се получат рационални комбинации на различните продукти, съчетани с нужната естетичност.



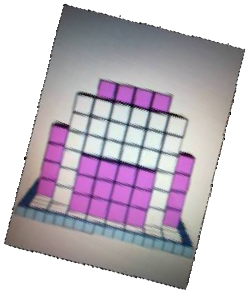
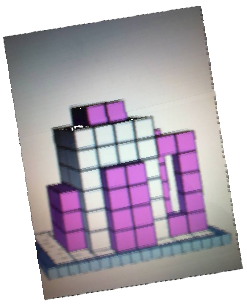
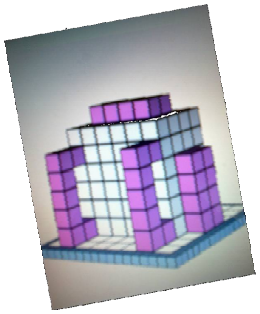
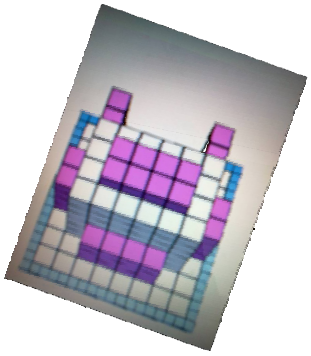
По този начин децата развиха своите качества за предприемчивост, съобразителност, креативност при решаване на една ежедневна практическа задача, водеща до развитие на тяхната иновативност, като приложиха знанията си за рационални числа. А и запазиха спомена за едно чудесно преживяване!

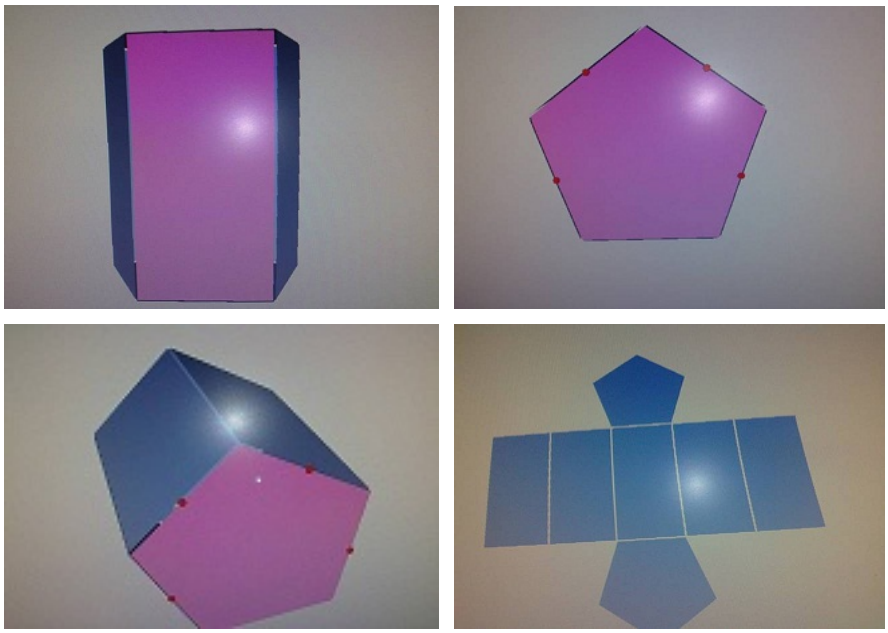
***

Втората творческа задача поставихме след изучаване на дял „Стереометрия”. Тя изискваше от учениците да създадат проект за изработване на ученическа раница, като използват програмата Елика.



От тях се искаше след това да я изработят, да пресметнат колко учебника най-много може да събере раницата, както и колко тежи със и без учебници и каква цена биха й сложили. Тези проекти се демонстрираха на математическия празник „Моята ученическа раница”.



Критериите за оценка на журито бяха:

- многообразие на геометрични тела
- качествена презентация с видимо използване на програмата „Елика“
- артистичност при представянето на раницата и на нейната функционалност.

Получиха се много интересни решения.

Журито присъди две първи награди, една трета и една поощрителна – за оптимално използване на материал за ушиване на раницата.

Учениците творчески приложиха на практика не само знанията си за геометрични тела, но и получиха самочувствие и вяра в собствените си математически способности, прилагайки ги на практика за решаване на нематематически проблеми. Фокусите бяха поставени не само към резултатите, но и към процесите и стратегиите за постигането им.

Този подход – учене чрез действие – прилагаме от години. Отначало родителите и децата гледаха скептично на това. Възприемаха нашите идеи като допълнително и излишно натоварване. Учениците, свикнали само да свеждат математиката до решаване на определен набор от задачи, не проявяваха видимо желание за участие в тези обобщаващи уроци.

Нашата практика показа, че не е необходимо да заставяме децата да участват насила в тези инициативи. След преживяване на математиката в действие още на първото занятие учениците се активираха и започнаха с нетърпение да очакват следващата проява. Вече не беше нужно да обясняваме организацията на дейността. Децата сами си сформираха групи, сами си разпределяха задачите, проявяваха критичност към изпълнението на отделните елементи и така сами усетиха, че развиват себе си и другите. Те почувстваха математиката като способност за общуване и себеутвърждаване, с по-малко сметки – повече разбиране. С течение на времето родителите също се убедиха в креативността и потребността от нашите идеи за обучение на децата им и ни станаха съдружници. Трудно повярваха, че знанието не е достатъчно за развитието на децата им. По-важни са прилагането им в реалния живот и усещането за пълноценно преживяване, което съпътства всеки математически празник и което оставя у децата незабравим спомен за дълго време.

И така, получили подкрепа от ученици и родители, ние оптимистично гледаме напред. Изследователският подход е един от вариантите за развитие на иновативното мислене у децата. В максимална степен за израстването на учениците съдейства и доброто съчетаване на теоретичните знания с динамичните системи на проекта Фибоначи. Чрез тях по-бързо и в по-голяма степен се постигат желаните резултати.

Литература

1. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*. 39 Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2010.
2. Чехларова, Т., Е. Сендова, *Да се завъртим около ротационните тела* http://www.math.bas.bg/omi/docs/rot-kompozBG.pdf.
3. Sendova, E., T. Chehlarova. *Explorations Around the Rotational Solids. In: Mathematics Education with Technology – Experiences in Europe*, Tamara Bianco, Volker Ulm (Ed.) University of Augsburg, Augsburg, 2010. ISBN 978-3-00-032628-8.
4. Chehlarova, T., E. Sendova. *Unity and Variety in the Context of Symmetry – a Dynamic Approach. In: Mathematics Education with Technology – Experiences in Europe*, Tamara Bianco, Volker Ulm (Eds.) University of Augsburg, Augsburg, 2010. ISBN 978-3-00-032628-8.
5. Чехларова, Т., Е. Сендова. *Практически задачи и упражнения по информационни технологии. Развий въображението си с развивки*. Анубис. 2010. 64 с. ISBN 978-954-426-890-9.
6. Sendova, E., T. Chehlarova, P. Boytchev. *Words are silver, mouse-clicks are gold? (or how to optimize the level of language formalization of young students in a Logo-based cubics world)*. Informatics in education, Vilnius, vol. 6, №2, 2007, pp. 411– 428.

Предизвикателствата на изследователския подход

Николина Николова, Елиза Стефанова
nnikolova@fmi.uni-sofia.bg, eliza@fmi.uni-sofia.bg
Факултет по математика и информатика, Софийски университет „Св. Климент Охридски”

Резюме

Настоящата статия представя прилагане на изследователския подход в обучението по информатика, профилирана подготовка, при изучаване на езика Java в 11. клас. В нея се разглежда работата с ученици от две математически гимназии в две последователни години.

Описани са основните нива на приложение на подхода в обучението и изгражданите у учениците чрез него изследователски умения на мета-ниво, както и контекста на прилагане.

На тази база са разгледани двата различни варианта, в които е приложен подхода – отворено изследване и ръководено изследване. Демонстрирани са продуктите, разработени от учениците в резултат на изследванията.

Специално място в статията заема анализът на предизвикателствата пред учениците и учителите при прилагане на изследователския подход в обучението.

В заключение прилагането на изследователския подход в собствената практика е анализирано от гледна точка на повишаване на ефективността на обучението и дългосрочния ефект от него.

Ключови думи

Изследователски подход, дизайн на обучение, надградени с ИКТ умения

1. Увод

Основните усилия в обучението по информатика в профилирана подготовка са насочени към формиране на базови знания за език за програмиране, познания за основни структури от данни, алгоритмично мислене, умения и стил на програмиране. В практиката често акцентът е върху преподаване на езиковите конструкции и прилагането им в еднотипни и не дотам значещи нещо за учениците примери. Личният опит на авторите води до заключение, че резултатът при прилагане на този широко използван подход е ниска мотивация и нетрайни знания и умения

Конструкционисти по дух, решихме да променим практиката, като приложим кредото, че е *по-важно да програмираш, за да научиш нещо, отколкото да се научиш да програмираш* [1].

В стремежа си да отстраним недостатъците на традиционния подход в преподаване на програмиране, опитахме да приложим проектния и изследователския подходи в профилираното обучение по информатика [2]. Ефективността на този тип обучение ни окуражи, но постави и нови предизвикателства. Първото от тях е как да се направи такъв дизайн на процеса на обучение, че едновременно да се постигат поставените основни образователни цели и в същото време да се увеличава мотивацията на обучаемите.

В отговор на това предизвикателство решихме да направим дизайн на обучението, като приложим методологията *I*Teach* [3]. Тя е създадена в рамките на проект Учителят-новатор (I*Teach) [4] по програмата *Леонардо да Винчи*. Характерните ѝ особености са:

- От учениците се извличат интересите им.
- Пред тях се поставят предизвикателства, които ги *зарибяват* да участват активно в процеса на обучение.
- Учениците работят в екип върху проект, чиито цели набелязват сами.
- Пътят за достигането им следва сценарий с набелязани междинни цели, за постигането на които учителят направлява учениците, следвайки своите педагогически цели както за определено учебно съдържание, така и за изграждане на умения за работа в екип, работа по проект, боравене с информация и представяне.

Ефективността на методологията бяхме доказали чрез редица обучения по информационни технологии на учители [5] и студенти [6], но до момента на експеримента тя не беше прилагана в обучението по информатика в училище. Освен това трябваше да си дадем сметка за нивото на изследователски подход, по който ще работят учениците, в зависимост от уменията, които желаем да постигнем.

2. Нива и умения, изграждани чрез изследователския подход в обучението

Според Тафоя [7] при прилагане на изследователския подход в обучението можем да разграничим следните нива на изследване (*Фигура 1*):

Фигура 1. Нива на изследване

Тези нива се различават по отговорностите, които трябва да се поемат съответно от учителя и ученика (Таблица 1).

Таблица 1: Отговорности според нивото на изследване

Ниво на изследване	Проблем	Процедура	Решение
Отворено	**Ученикът**	**Ученикът**	**Ученикът**
Ръководено	Учителят	**Ученикът**	**Ученикът**
Структурирано	Учителят	Учителят	**Ученикът**
Потвърждаващо/Верифициращо	Учителят	Учителят	Учителят

Както се вижда, колкото по-високо е нивото, толкова по-голяма част от отговорността се поема от учениците, а това предполага, че за преминаването от едно ниво в по-горно те трябва да имат развити необходимите когнитивни и социални умения. Отговорност на учителят е да оцени зрелостта на своите ученици преди да направи избор на ниво изследване и дизайн на изследователски учебен проект.

В зависимост от нивото на изследване могат да бъдат дефинирани 5 групи изследователски умения, които могат да бъдат изградени на мета-ниво (Таблица. 2)

Таблица 2: Изследователски умения на мета ниво

Ниво на изследване	1. Научно ориентирани въпроси	2. Приоритет на данните	3. Обясняване на фактите	4. Обяснение на база знания	5. Комуникиране и доказване
4 Отворено	Поставя научни въпроси	Разграничава какви данни е необходимо да бъдат събрани	Формулира обяснения след събиране на доказателства	Изследва самостоятелно други източници и ресурси и прави връзки, за да обясни	Формира смислени и логични аргументи, за да обясни
3 Ръководено	Избира между дадени въпроси и поставя нови научни въпроси с насочваща помощ	Събира на определени данни с помощ	Формулира обяснения с насочваща помощ	Свързва области и източници на научно знание, за да обясни	Обяснява на базата на научно мислене с насочваща помощ
2 Структурирано	Изяснява въпроси, предложени от учител	Анализира данни за събиране на доказателства	Избира измежду възможни начини за формулиране на обяснения	Избира между възможни връзки, за да обясни	Избира измежду възможни насоки за по-точно комуникиране
1 Потвърждаващо/ Верифициращо	Включва се в задаването на въпроси	Анализира дадени данни за събиране на доказателства с помощ	Прилага предложени доказателства за формулиране на обяснения	Избира измежду възможни връзки, за да обясни с насочваща помощ	Прилага дадени стъпки и процедури за научно комуникиране

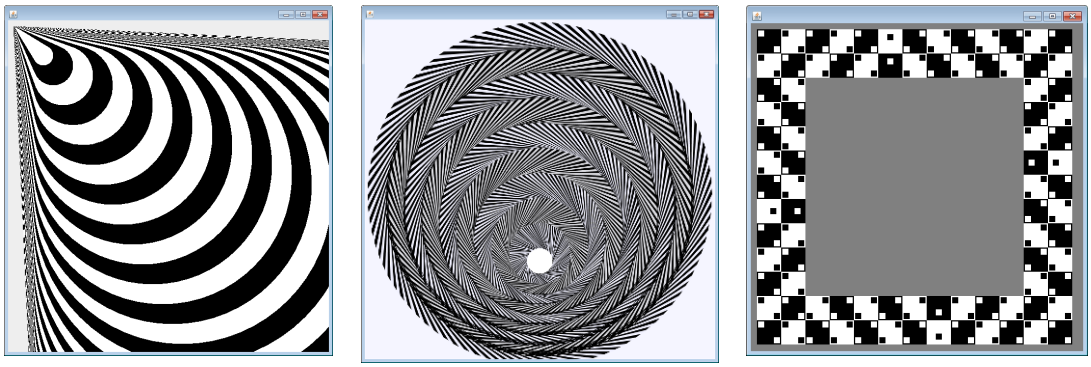
3. Контекст на приложението на подхода в обучението по информатика

Методологията *I*Teach* и изследователският подход бяха приложени в две последователни години в обучението на ученици от 11. клас, профилираща подготовка по информатика при изучаване на език за програмиране Java.

Първото изследване [2] бе от тип **отворено изследване**. То се проведе в две математически гимназии паралелно (Националната природо-математическа гимназия – НПМГ и Първа частна математическа гимназия – ПЧМГ) и бе базирано основно на проект-проучване, свързано с течението Оп Арт в съвременното изкуство. Учениците трябваше не само да се запознаят с изкуството и негови известни представители, а и да проучат технологиите, чрез които се създават такива творби – как се постигат оптични илюзии и какви видове оптични илюзии има – въпроси, свързани с явления от физиката, биологията, психологията и други науки.

Работейки по проекта, от учениците се изискваше да открият, проучат, анализират и приложат и материали по програмиране, с чиято помощ да реализират идеите си. До момента на работа по проекта те можеха да изчертават с помощта на Java прости геометрични фигури – кръг, квадрат, правоъгълник.

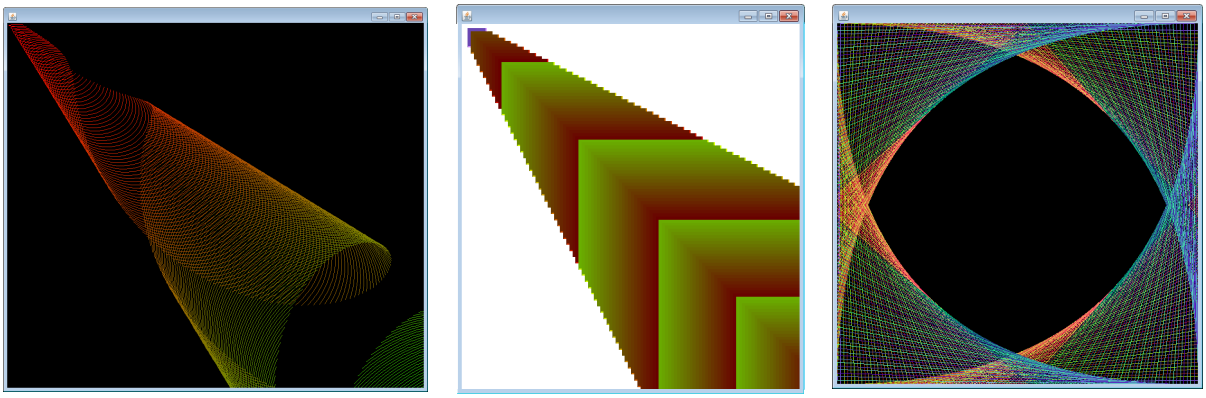
В процеса на изследванията си по проекта учениците научиха и откриха самостоятелно редица възможности на езика Java и бяха много горди да представят разработените от тях продукти (*Фигура 2*).



Фигура 2. Представени резултати след проведеното отворено изследване

В разработките им се забелязваше тенденция към следване на моделите на основателката на течението Оп Арт – Бриджет Райли, използване на познатите прости геометрични фигури, работа в черно-бялата гама или с изчистени семпли цветове.

След първото прилагане беше направен извода, че дизайнът на обучение с отворено изследване изисква по-голяма зрялост от учениците по отношение на опита им с изследователски подход в обучението от тази, която имат. Затова при второто прилагане бе избрано **ръководено изследване**. Целта му беше учениците да бъдат ръководени в процеса на *откриване* на методите на клас Graphics2D и по този начин да стъпят по-сигурна основа по отношение на езика за програмиране.



Фиг. 3. Представени резултати след проведеното ръководено изследване

Резултатите (*Фиг. 3*) показаха, че действително учениците се чувстват по-уверени. Освен използването на познатите прости геометрични фигури, сега се опитваха да експериментират повече с настройките и числовите зависимости, свързани с цветовете, а някои направиха и опит за моделиране чрез прилагане на афинни трансформации в равнината – математическо познание, с което самостоятелно решиха да се запознаят и експериментират.

4. Предизвикателства при прилагане на подхода

Постигането на траен и видим резултат е предизвикателство не само за учениците, но и за техния учител.

За **учениците** в едното училище бе предизвикателство самото прилагане на подхода за първи път. Във второто училище беше видно, че учениците вече са започнали да изграждат изследователски умения и в рамките на други предмети, и процесът на работа вървеше далеч по-леко.

Големи предизвикателства за учениците се оказаха и подборът на достоверни източници на информация, организацията на дейностите по проект, разпределянето на роли,

управление на времето, поемането на отговорност, както и интегрирането на знания от други учебни предмети, основно математика.

Да се научим да учим – това беше най-голямото предизвикателство пред учениците. Те обогатиха знанията си и развиха умения, свързани с математическото моделиране, различни концепции на обектно-ориентираното програмиране – осъзнаване на понятията *клас* и *обект*, *наследяване*. Но не дадени им наготово, а започвайки от анализ и оценка на източници на информация, преминавайки през *дебели* (макар и електронни) книги, и професионални форуми. В процеса на работа почувстваха естествена нужда да спазват стандартите за стил на програмиране (работеше се в екипи) и да се стремят към оптимизиране на програмния код. Неволно *откриха* подходите *Top-down* и *Bottom-up*. И не на последно място – запознаха се с допълнителна интересна и полезна за тях информация.

Предизвикателствата пред учителя обаче определено не бяха по-малко.

Дизайнът и организирането на интердисциплинарен изследователски учебен проект изисква широка обща култура и познания от различни области на науката [8]. Но има ли учител, който е *специалист по всичко?!* С колко допълнително информация трябва да се запознае учителят, преди изобщо да подходи към дизайн на такъв проект? Колко време да *жертва* за подготовката му? Има ли към кого да се обърне за помощ? Още повече, че учителят обичайно е по-възрастен от учениците си и не може да възприема, обработва и запомня нова информация със скоростта, с която те могат.

Колкото и добра да е предварителната подготовка на изследователския проект, остават и предизвикателствата, свързани с изпълнението му:

- Какви въпроси ще възникнат? Ще успее ли да намери отговори?
- Как се управляват във времето няколко екипа, работещи паралелно по различни проекти? Какво ще стане, ако не успеят да завършат проектите си на време? Ще има ли резерв? А редно ли е да им се отпуска такъв?
- Може да не успее да реагира на време при възникването на множество разностранни въпроси, за някои от които самият той да се окаже съвършено неподготвен.
- Как да **ръководи процеса**, а **не да преподава**, както е свикнал?
- Как да организира диференцирано обучение така, че да бъде максимално полезен на всички ученици, независимо от сложността на проекта, с който са се заели и текущото им ниво и възможности.
- Какви методи и инструменти за оценка да използва така, че те да стимулира учениците да се развиват, вместо да им *поставя диагноза*.

Най-непознатото предизвикателство пред учителя е **дизайнът на изследователски проект**. То изисква първо учителят да подбере атрактивна за учениците тема, след което да направи предварителна подготовка, в това число подбор на източници, ресурси и дейности, да формулира ясно постановката на проекта и критериите за оценка, да маркира ключови контролни точки и да се намесва само при нужда (в процеса на експеримента често се появяваше въпроса *Да помогна или да не преча?!*)

5. *Толкова е сложно! Заслужава ли си?*

Опитът с прилагането на подхода не само при последния експеримент, но и с малки групи ученици или индивидуално през последните 15 години убедително доказва устойчивостта на резултатите във времето.

Само една година по-късно при учениците, с които беше направен експеримента, се наблюдава по-високо ниво на отговорност, самостоятелно поемане на проекти, зрялост при организация и управление. Например, миналогодищните единадесетокласници от ПЧМГ, сега вече дванадесетокласници, сами предложиха да направят оценка и

подобрения в уеб-сайта на училището, самостоятелно дефинираха заданието, разпределиха ролите си, изпълняваха задачите, които си възложиха, и контролираха процеса.

При поставянето на следващия им проект по информатика, те изявиха желание да участват при формулиране на заданията и в резултат се появиха и реализираха няколко проекта, продиктувани от интересите и мотивацията на учениците:

- проект, обслужващ процеса на ценообразуване във фирмата на бащата на един от учениците;
- проект, доразвиващ Оп Арт идеите на един от предходните екипи с добавяне на нов интерфейс и функционалности;
- приложение за комбинаторни игри, базирано на по-рано учени алгоритми
- приложение за подпомагане на подготовката на самите автори по други предмети (в случая - физика).

Двама от учениците от НПМГ, приети вече за студенти в Кеймбридж, със самочувствие споделиха, че по време на интервюто, разказвайки за изследванията си в тези проекти, са се радвали на специално отношение: *Приеха ни така, сякаш вече сме изследователи.*

Свидетелство да трайността на резултатите от подхода дават и по-отдавна завършили ученици от НПМГ, обучавани в същия стил. Например, Калоян Славов (завършил вече и докторантура в Масачузетския технологичен институт), споделя: *Почти нищо не помня от това, което съм учил в училище, но вие ни научихте да учим и да знаем как да се доказваме!*

Но най-трогателната награда беше предложението на Руслан Русев (завършил НПМГ преди 15 години, собственик на софтуерна фирма): *Искам да създам такава среда за обучение по програмираме, че да можеш да учиш учениците по най-добрия начин*!

Резултатите от прилагане на подхода, погледнати от дистанцията на времето, дават основание да заключим, че усилията си заслужават!

Литература

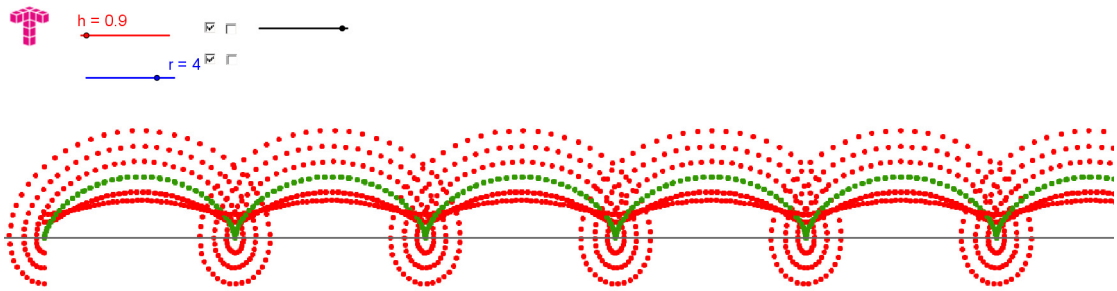
1. Papert, S. (1999) Introduction: *What is Logo? And Who Needs It?*, Papert, S. (1999). In Logo philosophy and implementation. Highgate Springs, Vermont: LCSI
2. Н. Николова, Е. Стефанова (2011) *ОпАрт или ОпИТ за Арт-програмиране*, Списание на Софийския Университет за електронно обучение, 2011/1 (http://journal.e-center.uni-sofia.bg/f/downloads/2011/Broi%201/N.Nikolova_E.Stefanova.pdf)
3. Стефанова Е., Сендова Е., Ван Дийпен Н., Форчери П., Додеро Г., Миранович М., Брут М. (2007) *Учителят-новатор - Методическо ръководство за надграждане на умения с ИКТ*, Faleza-Office 2000, София, 2007, ISBN: 978-954-92146-1-1
4. Сайт на проекта Учителят-новатор (I*Teach), http://i-teach.fmi.uni-sofia.bg (01.02.2013)
5. Е. Стефанова, Е. Сендова, Илиана Николова, Н. Николова (2007)*Обучавам = Уча?* (или как да надграждаме „стари" умения с нови технологии), списание „Математика и информатика", бр.4, ISSN 1310-2230, стр. 3-13
6. Е. Стефанова, Н. Николова, Е. Ковачева, Е. Сендова, Е. Пелтекова, Н. Хубенова, М. Миладинова, Е. Кантарджиева (2011) *От „пеперудения полъх" до „вятъра на промяната" – поглед към училището на бъдещето*, Доклад в сборник от статии на 40-тата пролетна конференция на СМБ, с. 444-453
7. Tafoya, E, Sunal D, Knecht, P (1980). *Assessing Inquiry Potential: A Tool For Curriculum Decision Makers*, School Science and Mathematics, Volume 80, Issue 1, pages 43–48, January 1980
8. Кендеров, П. (2010) *Иновации в математическото образование*: *европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*. 39. Пролетна математическа конференция на СМБ

От колелото към калоферската дантела – уъркшоп и още нещо...

Румяна Ангелова
antika_rumi@abv.bg
Клуб „Процент и половина”, ПГИМ, Пазарджик

Резюме

След откриването на новата творческа година и обявяването на старта на изследователския проект по математика секцията от девети клас на клуб „Процент и половина” проведе уъркшоп „От колелото към калоферската дантела”. След като се запознах с основните идеи за моделиране на циклоида с помощта на компютърната среда Elica [1], поставих на учениците задачата да реализират модела използвайки динамичния софтуер Geo Gebra. Те получаваха и изследваха пътя на точка, свързана с окръжността - неща, които не биха могли преди. Сравняваха, изказваха хипотези, обосноваха защо трохоидата се нарича скъсена циклоида, когато h < r и защо е удължена при h > r, където r е радиусът на окръжността, а h е разстоянието на точката до центъра на окръжността След онлайн проучване занятието приключи с работа по екипи за извайване на „калоферска дантела“. Творческото жужене бе съпроводено с бурни възклицания на учудване, одобрение и удовлетворение от крайния резултат.



Ключови думи

динамичен софтуер, изследователски подход, геометрично място на точки

1. Увод

Конфуций и Аристотел са най-ранните привърженици на *учене чрез действие*, а Джон Дюи посочва, че *образованието не е подготовка за живота, образованието е самият живот*. С такъв тип активност и ангажираност учениците са вдъхновени да получат по-задълбочени познания по темите, които изучават. Когато формите на дейност се съчетаят и с постиженията на дигиталната образователна революция, се изграждат нерутинни интерактивни умения.

Важен момент в работата по математика е фокусиране вниманието на учителя върху възможността за повишаване мотивацията на учениците. Въпроса, който си задаваме е: *Как промяната в работата на учителя повлиява върху формиране на изследователски умения у учениците, необходими за 21 век?*

Идеята: Пътят на точката при движението на окръжността по права линия. Колелото и еволюцията – уъркшоп на секцията от 9 клас на клуб „Процент и половина".

Опорни понятия: Геометрично място на точки (ГМТ), окръжност, крива линия

Цел на проекта: Да се повиши мотивацията на учениците, да се насърчи изследователският дух и любопитство чрез комбиниране на учебното съдържание по математика с аспекти от историята, заобикалящата ни среда и ежедневието.

За да се преодолеят техническите трудности, използваме GeoGebra за изследване на движението без плъзгане на окръжност по права линия.

2. Учейки се от реалния живот

„Задачи, взети от живота, а не схематично смятане; индивидуално обучение, а не затрупване с формули с еднакво за всички темпо. Това е реформата в обучението по математика [3]. Формата нарекохме *уъркшоп*, защото включва представяне на конкретни казуси и реална работа на участниците по време на събитието.

Да започнем с образ – колелото. В сравнение с текстовете, образите често предават по-ярко идеите. Затова те могат да служат като възможност за по-задълбочено изследване. Учителят умело води беседата: Изобретяването на колелото е пряко свързано с прогреса, дало е тласък на развитието на занаятите, на развитието на науката като цяло.

- *Коя е геометричната фигура, чиито свойства са изучени в осми клас – аналог на колелото?*
- *Окръжността*
- *А как дефинираме окръжност?*
- *Геометрично място на точки в равнината, равноотдалечени от една точка. Тази точка се нарича център на окръжността, а разстоянието – радиус.*
- *Наблюдавали сме движението на велосипедно колело със светлинен рефлектор върху него. Нарисувайте линията, която описва една точка от окръжността при търкаляне без плъзгане върху права линия.*

Учениците рисуват в дневниците си различни криви линии – някои рисуват окръжности.

- *Опишете вербално „пътя" на точката.*
- *Точката „се издига" нагоре, след това „се спуска" надолу.*
- *Колко най-високо?*
- *Колкото е диаметърът на окръжността.*
- *Колко най-ниско ?*
- *Най-ниското положение е върху правата, върху която се „движи" окръжността и „не се връща назад". Следователно не може нейният път да е окръжност.*
- *Опитайте още веднъж да си представите и да нарисувате „пътя " на точката.*

Учениците рисуват и вече има верни модели на линията.

- *Да видим каква крива описва точката от окръжност, която се търкаля по права линия.*

Учителят стартира динамичния файл и демонстрира чрез мултимедиен проектор линията, която генерира точка, неподвижно свързана с окръжност при търкаляне на окръжността по права линия. Обяснява, че тази крива линия се нарича *циклоида*. През всички етапи на развитие на математиката изучаването на кривите линии е представлявало интерес. Математиците през всички епохи са се опитвали да обобщят понятието, като на преден план изведат общите характеристики и свойства на кривите.

- *Какви криви линии сме „срещали" в часовете по математика?*
- *Крива затворена линия ... окръжност.*
- *Каква дефиниция можем да дадем за циклоидата?*
- *Като геометрични места на точка, неподвижно свързана с окръжността, когато тя се търкаля без плъзгане по права линия.*

Да разгледаме някои снимки от статията „Единство чрез многообразие” [1].

По-нататък учителят обяснява методиката на изследване – той знае до какво може да достигне и поставя проблемната ситуация: *Как изглежда линията, която описва точка, вътрешна за колелото? Ако h е разстоянието на точката до центъра на окръжността (т. е. при h < r) „какво се случва”?*

- *Точката прави по-малки отклонения нагоре и надолу и „изминава” по-кратък път.*
- *А ако точката е външна за окръжността?*
- *При h > r, „размахът” на линията е по-голям, „пътят на точката слиза” под правата, по която се движи окръжността, и „се издига” по-високо.*
- *Колко по-високо?*
- *На разстояние h – r над нивото на циклоидата.*

Основни дейности по проекта:	
Учител	**Ученици**
Задава въпрос: *Как изглежда линията, която описва точка от окръжността при търкалянето си без плъзгане по права линия?*	Рисуват криви линии, разсъждават, обясняват
Обяснява, демонстрира чрез динамичен софтуер	Наблюдават „търкалянето” на колелото и „пътя” на точки, свързани с окръжността
Запознава с готовия файл	Експериментират чрез динамичния софтуер при различни стойности на *h* и r
Насочва вниманието	Откриват зависимости между *h* и *r* и вида и формата на линиите
Води дискусията	Обясняват, описват и се аргументират, дефинират нови понятия
„Подава” ключови думи	Извършват онлайн проучване
Консултира, поощрява	Работят в екипи, конструират „дантели”
Запознава с интерфейса на GeoGebra	Експортират снимки на създадените модели като картинка
Систематизира опита чрез въпроси и дискусия	Правят изводи и обобщения
Провокира с подходящи въпроси продължение и надстройване на темата	Дават идеи за нови проекти

Всеки участник работи индивидуално на компютър, опитва, построява циклоида, генерирана от точка върху окръжност с произволен радиус r.

- *Нека сега разгледаме „пътя” на точка от вътрешността на кръга (колелото), намираща се на разстояние h от центъра на окръжността.*
- *Значи на разстояние h < r. Готово – получаваме я!*
- *А сега да проследим „пътя”, когато точката е извън колелото.*
- *Трохоидата е крива, описвана от точка, неизменно свързана с окръжност – търкаляща се по права без плъзгане. Получава се когато кривата се описва от точка M, лежаща вън или вътре в окръжността с център O и радиус r.*
- *Как ще дефинираме трохоида?*
- *Геометрично място на точка от вътрешността (или извън колелото), когато имаме движение без хлъзгане по права.*

3. От колелото към калоферската дантела, екипната работа и още нещо

„Издигането” и „снижаването” на точката вае красиви линии подобно на дантела. Пътят на точката е ту стръмен, ту полегат, като пътя на дантелата – с приливи и отливи. След проведеното онлайн проучване участниците в уъркшопа споделиха защо дантелата е уникална и привлекателна, разказаха, че тя е диалог между минало и настояще, ръцете на поколения българки я извайват с невероятно творческо въображение. Калоферската дантела сполучливо допълва блясъка на европейската совалкова дантела. Началото ѝ поставя будна калоферка, която през 1909 г. учи в класа за изработка на прочутата брюкселска дантела в Индустриалното училище в София, а когато се връща в родния град, вече е добавила свои мотиви към нея и успява да наложи свой стил, дал началото на калоферската дантела [4].

Можем да получим различни линии, като променяме по подходящ начин стойностите на *h* през определена стъпка спрямо *r*. *Как да го осъществим в екип? Групирайте се по двама на компютър. Обмислете с колко линии ще „изградите” дантелата. Пресметнете при какви стойности на r и h ще се получат естетически конфигурации от линии, свързани с окръжността?* Участниците оформят екипи по двама. Започва творческо жужене, пресмятане, изводи*: h* и *r* да са кратни на едно и също число. Получават дантели от седем, от осем линии.

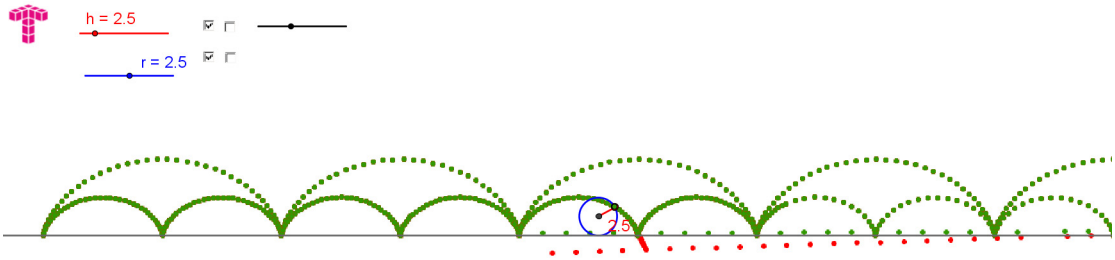
4. Изводи

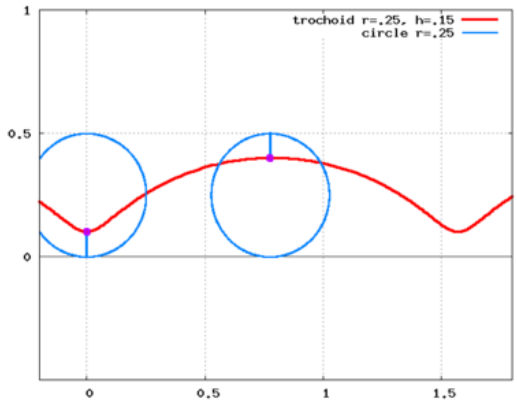
Чрез анализа „колко най-високо” и „колко най-ниско”, учениците интуитивно достигат до идеята за най-голяма и най-малка стойност на функция. Ето изследването, което проведоха учениците:

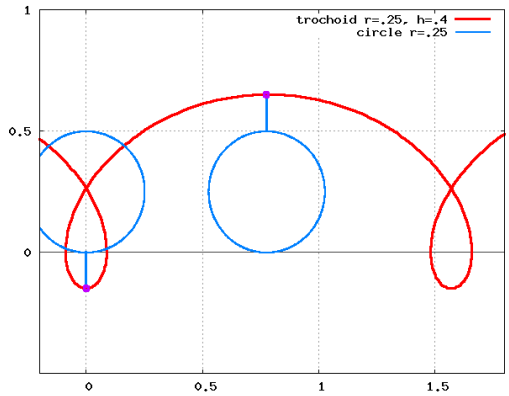
- *Линията, която описва точката от окръжността, е циклоида. Линията на точка в колелото е скъсена циклоида (трохоида), а на точката извън колелото – удължена циклоида.*
- *Дължината на един цикъл е равен на дължината на окръжността, защото той представлява едно нейно цяло търкулване.*
- *Когато се намали радиусът на окръжността два пъти, пътят, който изминава точката при едно завъртане се намалява два пъти и в един цикъл на циклоидата се „поместват” два цикъла от новата циклоида и т. н.*
- *Кривата е пътят, траекторията на движеща се точка, свързана с окръжността.*
- *Обща характеристика на тези три криви линии:*
  - *това е пътят на точки, свързани с окръжността;*
  - *при h = r трохоидата преминава в циклоида;*
  - *при h > r трохоидата се нарича „удължена циклоида”;*
  - *при h < r трохоидата се нарича „скъсена циклоида”.*
- *При умело конфигуриране на линиите се получава магическа феерия – аналог на калоферската дантела.*

Учителят в ролята на медиатор провокира и поддържа диалога у ученика за явленията и тяхното обяснение, описание и изследване. Учителят знае до какво може да се достигне, поставя въпроси и създава проблемни ситуации: *Може ли да говорим за единство и многообразие при тези линии?* – единството се подчертава чрез анализ на общите характеристики на тези криви, многообразието – чрез изследване, начертаване на линиите, при разглеждане на различни стойности на r и h (при $h > r$, $h < r$).

Много важно е да се отбележи, че доказателство за единството е фактът, че при $h = r$ трохоидата преминава в циклоида [2].







В края на уъркшопа учителят прави обобщение, оценява постигнатите резултати и дава допълнителни примери за задачи със сродно математическо съдържание.

5. Резултати от проведения уъркшоп

След проведена анкета за резултати от уъркшопа установихме:

1. Всички ученици са задали въпроса: *Какъв е пътят на точката от окръжността при търкалянето ѝ по права линия?* на свои съученици и на своите родители и след това са използвали обяснението със светлинния рефлектор на велосипедното колело;
2. Голяма част от учениците (75%) са търсили самостоятелно в Интернет исторически сведения за изучаване на кривите и за видовете криви, свързани с окръжността;
3. Всички ученици „изработиха” самостоятелно и изпратиха „дантели”;
4. Половината участници са търсили материали за калоферската дантела в Интернет.

6. Перспективи

Работата по изследователския проект ще продължи в следните направления: разглеждане и изследване на пътя на фиксирана върху окръжност точка при търкаляне без плъзгане на окръжността по окръжност вътрешно и външно:

- изучаване на геометрични места на точки чрез динамичен софтуер и
- систематизиране на задачи за тях от реалния живот.

7. Заключение

Динамичният софтуер GeoGebra е иновативна учебна среда, която провокира и мотивира учащите за задълбочени изследвания. След проведения уъркшоп всички ученици споделиха, че имат нужда от повече приложни изследователски задачи, от анализи, а не от механични изчисления. Те определиха математиката като експериментална наука, свързана с реалния живот. Чрез такива наблюдения и практики у учениците се формира философско отношение към заобикалящата ни действителност относно единството и многообразието на явления, повишава се мотивацията им и се изграждат нерутинни интерактивни умения.

Литература

1. Boytchev. P. *Unity via diversity*. Meeting in mathematics. 2008. p.81-98
2. *Циклоида*, http://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid, 21-11-2012
3. Баптист, П., К. Милер, Д. Рааб. *Към нов подход в математическото* образование. http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/SINUS_Bg-ver4.pdf
4. *Trochoid*, http://en.wikipedia.org/wiki/Trochoid, 21-11-2012
5. *Калоферска дантела* http://handmade-bg.com/wp-content/uploads/2010/04/kal6.jpg, 21-11-2012

Динамична геометрия в 5. клас – постижения и предизвикателства

Светлана Илионова
Училище 119 СОУ „Акад. Михаил Арнаудов”

Резюме

В статията споделям моя опит и впечатления от използването на динамични уроци, разработени по проект „Фибоначи” [1] в часовете по математика за 5. клас. Приложих ги при преподаване на геометричен материал от 5. клас, като в час използвах един компютър и проектор, така че урокът да се следи активно от всички ученици. Установих, че тези уроци могат да улеснят много работата на учителя в час. Спестява се време, правят се бързо точни чертежи на дъската, провокира се интересът на учениците към преподавания материал, стимулира се тяхното въображение.

В динамична среда учителят може на момента да създава нови задачи съобразно нивото на усвояване от учениците. Най-важното предимство е, че учениците могат сами да си изграждат хипотези, да експериментират, да доказват математически твърдения и дори да създават собствени задачи [2]. Така те участват активно в учебния процес.

Още по-ефективна би била работата с уроците, ако всеки ученик разполага с компютър по време на часа и може да работи самостоятелно.

Ако разполагаме и с интернет, богатството от теми, разработени за 5. клас [1, 3, 4] е толкова голямо, че бихме използвали ежедневно сайта на екипа на Фибоначи за много по-динамични и интересни уроци.

Ключови думи

изследователски подход, проект Fibonacci, динамичен софтуер

1. Увод

За програмата GeoGebra и нейните възможности за пръв път научих от г-жа Стелиана Атанасова, главен учител по математика в нашето училище. След като беше посетила курс, тя запозна колегите по математика и информатика с тази програма и организира обучението ни по основните възможности на нейното приложение в часовете по математика. Аз бях много впечатлена и реших да я използвам при преподаването на геометричния материал в 5. и 6. клас. В полезността на програмата се убедих и след като през юни 2011 г. посетихме заедно с г-жа Атанасова и нейни ученици, ползващи вече GeoGebra в часовете по математика, семинар на екипа на проект *Фибоначи,* съпътстващ работна среща на Юнеско за образованието, проведена в България [5, 6]. На него се запознах с опита на колеги от цялата страна и чужбина. Още повече се убедих в ползата от използването на динамични среди след съвместното ни участие с г-жа Атанасова, нейни и мои ученици в Националния семинар по математическо образование в Института по математика и информатика към БАН през декември, 2011г.

2. Изложение

Когато споменах пред моите ученици от математическата паралелка в 5. клас за GeoGebra, се оказа, че има ученик, познаващ тази динамична среда. Беше научил за нея от своя баща, който я използва в работата си. Това събуди любопитството на останалите и още в следващия час по информационни технологии учителката г-жа Николина Георгиева ги е запознала с GeoGebra. Така, че когато започнах да използвам динамичните уроци, разработени по проект *Fibonacci*, учениците вече имаха известен опит.

Тези уроци улесняват работата на учителя в час, защото онагледяват много успешно доказателствата на формулите, например за лица на геометрични фигури, дават възможност за конструиране на много задачи в самия час, в зависимост от степента на усвояване на материала. Най-важното предимство обаче е възможността учениците сами да чертаят фигури, да създават собствени примери, да изследват и анализират геометрични ситуации и по този начин да усвояват знанията активно. Така например в урока „Видове четириъгълници" [7] те дискутираха много оживено връзките между видовете четириъгълници, докато един от тях се опитваше да подреди правилно имената им на дъската. Учениците използваха много правилно понятията *подмножество* и *сечение на множества*. Интересна им беше и задачата, в която чрез преместване на връх на четириъгълник в квадратна мрежа могат да получат успоредник, трапец и особено — равнобедрен трапец. Така те затвърдяват знанията си за успоредност, а при равнобедрения трапец интуитивно използваха някои от свойствата му, които ще изучават чак в 7. клас. Много им хареса задачата „Направи математическа пантомима", която им даде възможност да развихрят въображението си и да покажат дори артистични способности.

В урока за лице на триъгълник [8] използвах задача 1, чрез която в динамична ситуация учениците виждат как триъгълникът се преобразува до правоъгълник и могат да направят предположение за това, каква е формулата. Още по-интересно им беше при лице на трапец, където имат възможност да наблюдават реконструиране на трапец до правоъгълник, допълване до успоредник и реконструкция до триъгълник. Разбира се в тези уроци използвах компютъра само за да онагледя формулите, след което е нужно учениците да решат задачите от учебника, за да се научат да използват означенията за страни, съответните им височини и да могат да подреждат решението на задачата. Те получиха за домашна работа задачата да начертаят с линия и молив различните видове триъгълници според ъглите и техните височини. Според мен е важно учениците да могат да направят чертеж собственоръчно, защото това развива техни лични качества, а компютъра ползваме, за да улесним работата в часа, а понякога и да се забавляваме. Истинска провокация за тях беше урокът „Танграм" [9]. Когато е разработена в динамичен урок, учителят лесно може да запознае учениците си с тази японска игра. Ние я играхме по няколко минути в различни уроци за разнообразие и отмора.

Използвах и урока за лице на четириъгълник. Твърде много време отнема на учителя в час да покаже на всеки ученик как би могъл да раздели четириъгълника на триъгълници, чиито лица може да намери или пък да го „опакова" в правоъгълник, когато работи в квадратна мрежа. С динамичния урок това става много бързо, защото мрежата е проектирана на дъската и учителят показва на всички, като чертае направо върху чертежа. Това хареса много на моите ученици. Още по-въодушевени бяха обаче от възможността сами да си направят задачи, като чертаят собствени четириъгълници. Почувстваха се истински творци и се състезаваха, кой ще измисли по-сложен пример.

Но най-интересен им беше урокът „Формула на Пик за лице" [10], който разработихме в час по ЗИП. Урокът започна с преговор на това как можем да намерим лице на четириъгълник в квадратна мрежа. Учениците познаваха вече много добре и двата метода – чрез разделяне на фигури, чиито лица можем да изчислим, или чрез

„пакетиране". След което поставих проблема за намиране на лице на по-сложни фигури в квадратна мрежа с дължина на страната на квадратчето 1. Запознах учениците с кратки исторически данни за австрийския математик Георг Александър Пик и за това, че той е намерил формула за намиране на лице на такива фигури, като използва броя на възлите по контура *k* и броя на възлите *v* във вътрешността на фигурата. След това им предложих да опитат сами да открият формулата. Това ги въодушеви, но и смути, защото те знаят, че *откритията се правят от велики учени*. Тук е много важна ролята на учителя, който трябва да ги насърчи, да ги ръководи през цялото време, но някак от дистанция, за да не им отнеме удоволствието, че са се справили сами. На дъската беше проектирана квадратна мрежа с четириъгълник и таблица, в която да нанасят стойностите на *k*, *v* и *S*. Учениците попитаха дали ще трябва да попълнят цялата таблица. Аз им обясних, че всъщност откритията са резултат от много труд, последователност и амбиция да доведеш нещата докрай и работата започна. Те предложиха да изчисляват лицата чрез пакетиране. Сами променяха четириъгълника, така че да отговаря на стойностите на *k* и *v*, зададени в таблицата. Хареса ми това, че откриха по какъв начин да променят четириъгълника, за да използват изчисленията от предишния пример.

k	*v*	*S*
4	11	12
4	10	11
5	7	8,5
5	6	7,5

След като попълниха част от таблицата по мои указания, ги накарах да огледат резултатите. Те забелязаха, че част от лицата са дробни числа. Попитах ги имат ли предположение защо, а те на базата на изчисленията си дадоха отговор, че дробните числа се получават от изчисляването на лицата на правоъгълните триъгълници, които изваждат от лицето на пакетиращия правоъгълник. Тези дробни стойности се получават след деление с 2. Насочих ги да разгледат стойностите на *k* и *v* и да помислят как могат да получат съответната стойност на *S*. Хипотезата, че трябва да делим на 2, се появи бързо, но коя от двете стойности? Предложих им компютърът да ни помогне, като изчисли още няколко примера по тяхно предложение, и ги оставих по двойки да стигнат до отговора. И не след малко се появи предложението: на 2 ще делим *k*. До откритието на формулата $S = \frac{k}{2} + v - 1$ се стигна след бурни обсъждания и спорове, но първи успяха да я открият в екип двама ученици. По предложение на останалите тази формула ще носи техните имена за нас.

След като имаме вече нова формула, преминахме към нейното използване в задача 2 от динамичния урок. Там я приложихме първо за изчисляването на лица на познати геометрични фигури, като направихме проверка и чрез стандартните формули, които знаем. Но учениците пожелаха да преминем към по-сложни фигури, за които нямаме формули, а пък разделянето или пакетирането са свързани с много изчисления. Приложението на формулата на Пик ме накара да насоча учениците и към това, да си изградят някаква система на броене на възлите, защото при по-сложни фигури броенето вече е проблем. След като се справихме и с него, използването на формулата се превърна в удоволствие.

В края на часа един ученик възкликна: *Госпожо, това е най- хубавата формула!*. Аз бях принудена да отбележа, че тя има и някои недостатъци като това, че се прилага само за

фигури в квадратна мрежа и то със страна на квадратчето 1 мерна единица. Веднага обаче те ме попитаха какво ще стане, ако страната е 2 мерни единици. Часът беше вече свършил и този въпрос остана да чака своя отговор. Това бе новото предизвикателство, което застана пред нас.

3. Заключение

Предизвикателството много скоро беше разрешено – с едно зареждане на GeoGebra и малко експерименти с мащабиране. А за няколко ученици от клуб „Млад приложник" – и чрез хомотетия.

Литература

1. Ресурси, разработени по проект *Фибоначи* http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm, 1.02.2012
2. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*. 39 Пролетна математическа конференция на СМБ, С., 2010.
3. Чехларова, Т. *Геометрични фигури - изследвания с динамични конструкции.* Макрос. 2012. ISBN 978-954-561-279-4
4. Чехларова, Т., Е. Сендова. *Необикновено за обикновените дроби – изследвания с динамични конструкции.* Макрос. 2012. ISBN 978-954-561-282-4 http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/book-drobi.pdf, 1.02.2012
5. Kenderov, P., E. Sendova. *Towards enhancing the inquiry based mathematics education*. In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies – Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information technologies'. 2012. pp.56-70 ISBN 978-954-2946-19-9
6. Chehlarova, T. *If only I had such a math teacher*… In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies – Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information technologies. 2012. pp.135-140 ISBN 978-954-2946-19-9
7. Чехларова, Т. *Видове четириъгълници* http://www.math.bas.bg/omi/docs/disk/book_22.11.2011/105/index.htm, 1.02.2012
8. Чехларова, Т. *Лице на триъгълник* http://www.math.bas.bg/omi/docs/disk/book_22.11.2011/106/index.htm, 1.02.2012
9. Чехларова, Т. *Танграм* http://www.math.bas.bg/omi/docs/disk/book_22.11.2011/115/index.htm, 1.02.2012
10. Чехларова, Т. *Формулата на Пик за лице* http://www.math.bas.bg/omi/docs/disk/book_22.11.2011/116/index.htm, 1.02.2012

Моят опит в изследователския подход в часовете по математика – 12. клас

Стелиана Атанасова
steliana.atanasova@gmail.com
Училище 119 СОУ „Акад. Михаил Арнаудов”, гр. София

Резюме

Задачите за геометрични места от точки са много удобни за работа с динамичен софтуер. Те съдържат два етапа: определяне вида на геометричното място и доказателство на „откритото” геометрично място. В първия етап е много полезно използване на динамичен софтуер, особено за по-сложни геометрични места, за които са необходими голям брой експерименти, за да се опознае формата на ГМТ. В този смисъл изучаването на обекта е сходно с експерименталната работа във всеки дял на науката. Така компютърът става силен инструмент за изследователска дейност. Примери за това споделяме в настоящата статия

Ключови думи

Геометрични места, геометрични орнаменти, експерименти с динамични конструкции

Задачите за геометрични места изразяват движение – нещо рядко срещано в училищния курс по математика. На екрана на компютъра може да се наблюдава *динамиката на образуване* на геометричното място, да се разбере сложният (в някои задачи) начин на натрупване на точките в ГМТ.

В тези задачи много често видът на геометричното място зависи от точния избор на данните в условието. В този смисъл една незначителна промяна на входните данни води до изменение на вида и формата на геометричното място, което позволява да се *съставят нови задачи*, близки до условието на дадената, но с различен отговор.

Ето условието на задачата, която е крайна цел на експеримента:

Да се намери геометричното място от точки, вътрешни за правилен петоъгълник, които са среди на не по-малко от три отсечки с краища върху страните на петоъгълника [1].

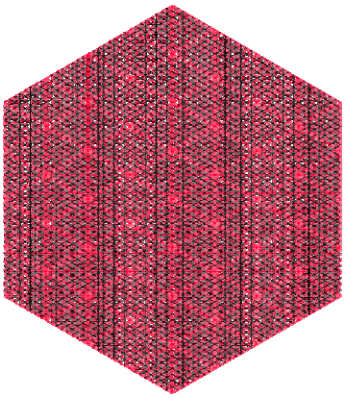
Ще споделя, че експериментът започна още миналата година. Поставих задача на учениците да разработят на групи теми от учебния материал по математика. Беше в края на годината и вече бях запознала много класове с възможностите на динамичната среда *GeoGebra* [2]. Така на двама от тях – Станислава Кичукова и Красимир Алексиев им хареса демонстрацията на теоремата на Вариньон за средите на четириъгълник. Другите ученици не се запалиха по проектите, макар че в часовете, в които работеха на компютър им беше много интересно. Е, все пак очакваха края на учебната година.

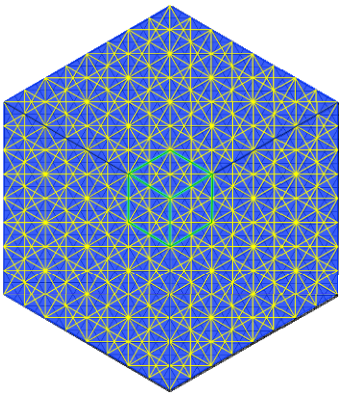
Тогава реших да разбудя духовете на двамата ентусиасти и започнах да ги провокирам с различни проблеми, свързани със средна отсечка. По-долу в изложението ще покажа част от техния проект, който беше демонстриран на националната конференция на проект *Fibonacci* – част от този проект са Задача 1 и Задача 2 в изложението.

Така се досетих за дипломната ни работа с Таня Славчева, на която научен ръководител ни бе доц. Иван Тонов. И насочих Станислава и Красимир към изследователска дейност в задачи от геометрични места от точки. И двамата се справиха отлично, а това им помогна

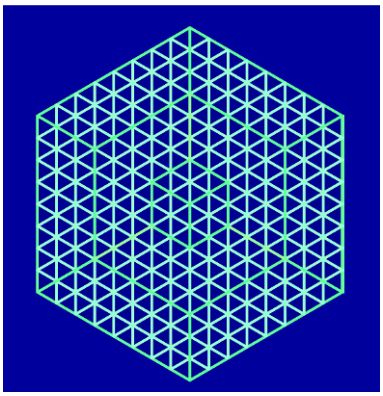
да представят труда си пред екипа на *Фибоначи* на семинара през юни 2011 г. и да споделят своя труд на работна среща на *Юнеско* за *Иновационни технологии в обучението,* която се проведе в страната ни [3, 4].

Още по-важно е, че с тези задачи се справиха и всички техни съученици тази година, малко преди коледната ваканция, когато ми се удаде възможност да замествам няколко часа учителя им по информатика. Не вярвах, че така ще ги увлека в една сериозна конкурсна задача, но се получи прекрасно. А двама от тях – Михаил-Богдан Янов и Кристиан Петров, се увлякоха дотам, че след училище в продължение на месеци измисляха и сътворяваха интересни геометрични орнаменти. И ги носеха да се похвалят, дори направиха плакати за домовете си.

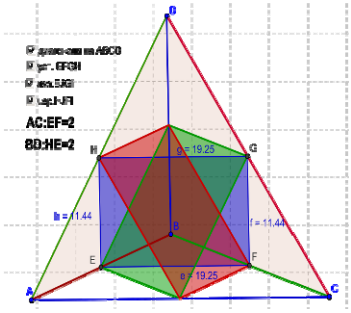




Орнаменти на Михаил-Богдан



Орнамент на Кристиан

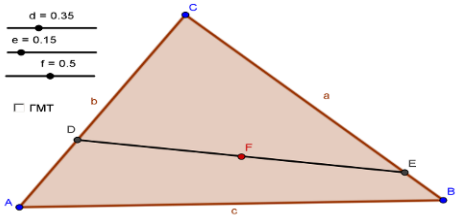


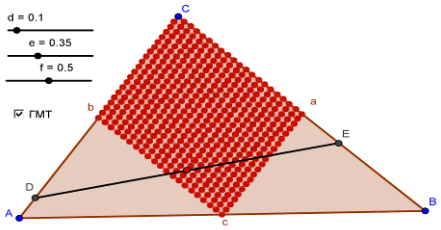
Експеримент на Красимир

Красимир Алексиев и Станислава Кичукова от 12[а] клас вече бяха изследвали геометричното място от точки от Задача 1 и Задача 2, описани по- долу, когато взеха участие в семинар на Фибоначи през юни 2011 г., където ги демонстрираха [3]. Към Задача 2 Станислава изследва ГМТ на точки с различни отношения, а Красимир достигна в експериментите си до завидна ситуация за неизпъкнал четириъгълник – и задача от учебника им за 11. клас – равнина, минаваща през средите на два срещуположни кръстосани ръба на триъгълна пирамида и успоредна на друга двойка срещуположни ръбове. На чертежа са изобразени и трите равнини, които притежават това свойство.

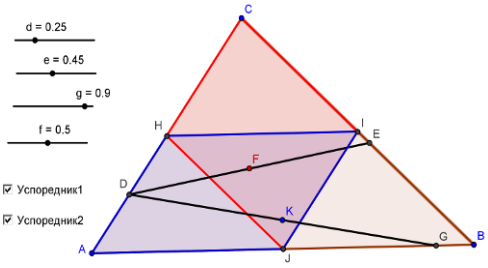
За да достигнем до основната задача започваме с две помощни задачи:

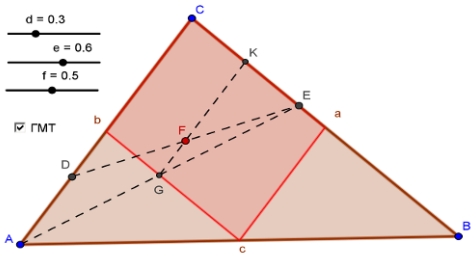
Задача 1. *Да се намери геометричното място от точки, които са среди на всички отсечки с краища върху две от страните на триъгълник.*





Точка *F* е среда на отсечка *DE* с краища върху страните *AC* и *BC* съответно. Промяната на положението на *D* и *E* се реализира с помощта на плъзгачи *d* и *e*. Геометричното място от търсените среди е успоредник с върхове средите на трите страни и общия връх за двете отсечки и всички вътрешни точки за успоредника.



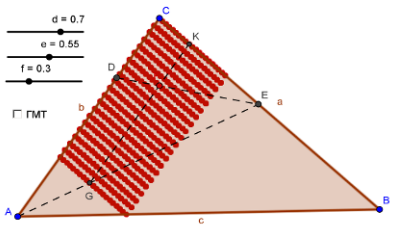


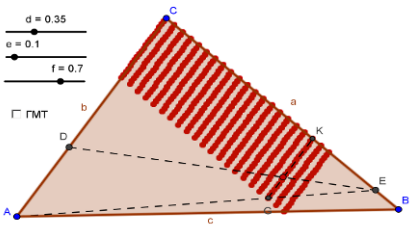
Наистина, нека *F* е вътрешна точка за успоредника и *GK* минава през *F* и е успоредна на *AC*. Свързваме *A* с *G* и пресичаме с *BC* в *E*. Свързваме *E* с *F* и пресичаме с *AC* вточка *D*. Точка *G* е среда на *AE*, защото лежи на средна отсечка. От това, че *GF* е успоредна на *AD*, следва, че *F* е среда на *DE* с краища върху страните *AC* и *BC*.

Да провокираме изследване на геометричното място от точки, които са среди едновременно на две отсечки, с краища върху страните на триъгълника. Добре е да използваме нов плъзгач *g* за средата *K* на отсечката *DG*.

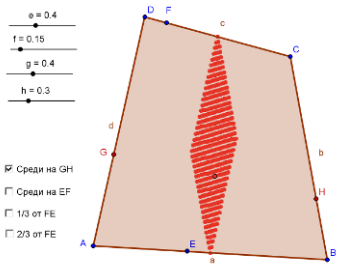
Полученото геометрично място от точки е триъгълник с върхове средите на страните му и всички негови вътрешни точки.

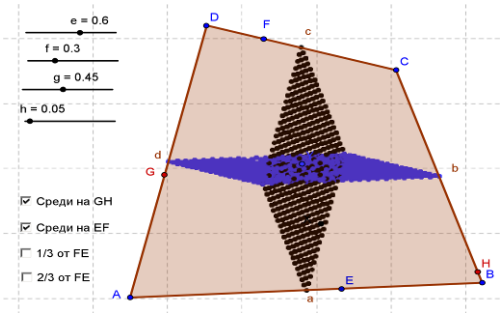
Ученикът е любознателен по природа – веднага започва изследователска дейност (поне така постъпи Станислава - въведе нов плъзгач *f* за отношение, в което точка *F* дели отсечка *DE*). Отговорът не закъсня – геометричното място от точки отново е успоредник. И доказателството не я затрудни – използва теореми на Талес.





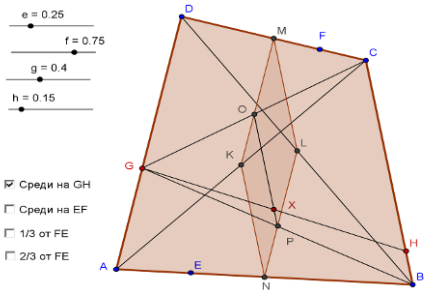
Задача 2. *Да се намери геометричното място от точки, които са среди на всички отсечки с краища върху две срещуположни страни на изпъкнал четириъгълник.*

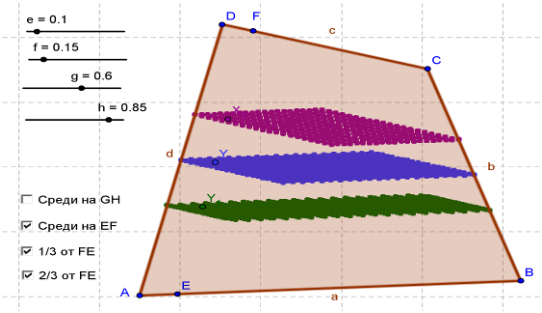




Ако вземем средите на отсечките с краища само върху *AD* и *BC,* се получава успоредник с върхове средите на другите две страни и средите на диагоналите и всички неговите вътрешни точки. Разбира се, в частния случай, в който *AD* е успоредна на *BC*, или ако даденият четириъгълник е успоредник, ще получим отсечка, с краища средите на другите две срещуположни страни. Аналогичен е резултатът, ако изследваме средите за другите две срещулежащи страни.

Това ни дава основание да съставим нова задача, а именно – за геометричното място от точки, които са среди едновременно на две отсечки с краища върху срещуположни страни на изпъкналия четириъгълник. Резултатът е очевиден – това е успоредникът, който е сечение на двата успоредника от предишната Задача 2 и всички негови вътрешни точки.





Кратко доказателство на Задача 2:

Нека *G* е произволна точка от *AD.* Пресичаме *GC* и *GB* съответно с *KM* и *LN* в точки *O* и *P*. Тогава *OP* е средна отсечка и щом *H* описва *BC*, то *X* ще описва *OP.*

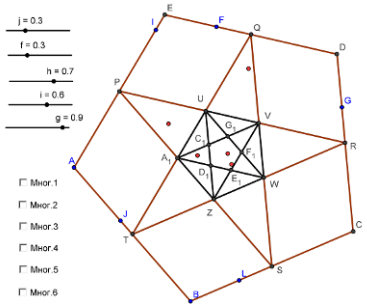
Обратно: ако *X* е от вътрешността на успоредника *KNLM*, през *X* построяваме *OP,* успоредна на *KN* . Но *X* е среда, следователно *O* и *P* са среди.

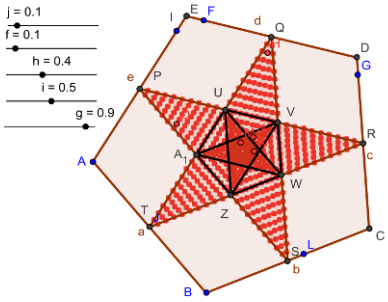
Нещо повече, защо да не изследваме геометричното място не от средите в Задача 2, а от точки, делящи отсечките в други отношения? Идеята бе отново на Станислава и тя я реализира за минута – въведе още един плъзгач. Това е естественият въпрос, който може да си зададе всеки ученик. А резултатите са аналогични – това отново са успоредници и техните вътрешни точки. Доказателството се извършва отново с теореми на Талес.

Забележка: Ако изпъкналият четириъгълник е успоредник или трапец, търсеното геометрично място се изражда в отсечка, което се доказва с елементарни разсъждения.

Дали е лесно да провокираме ученика да експериментира само с линия и пергел? Естествено, че не – или поне не всеки ученик. Докато в подходяща динамична среда не е нужно всеки път да ги насочваме към открития – те сами предлагат нови експерименти.

Но все пак да се върнем на основната задача.



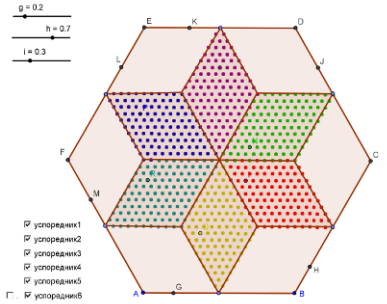


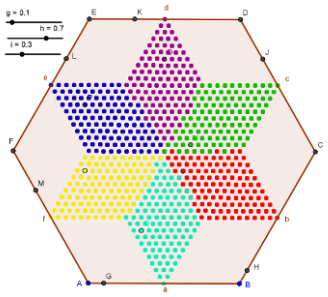
Точно тук искам да споделя за трима ученици от 12 клас, не особено привързани към математиката като наука – Михаил-Богдан Янов, Кристиан Петров и Мартин Стоянов. Същите решили, че като замествам преподавателя им по информатика, може и да пропуснат часовете. Беше почти края на първия час. Техните съученици бяха изпълнили Задачи 1. и 2. и започваха работа по оригиналната задача. Станислава вече изпълняваше поетапно приложение на Задача 2, както ги бях посъветвала – за всеки от петте последователни четириъгълника на правилния многоъгълник. Тримата приятели надникнаха любопитно в кабинета, със закуските в ръка, извиниха се, „че не са разбрали за часовете” и попитаха какви са тези точки, „които се търкалят по екрана”. Обясних им спокойно, че експериментираме и откриваме геометрични места от точки с определено свойство. Направо влетяха в кабинета, поискаха да им обясня, „ама много бързо” какво се конструира, какви инструменти използваме и се заеха направо с петоъгълника. Оставих ги сами на един компютър проверих резултатите на останалите – а те всички ми показаха своите чертежи и извода, до който бяха достигнали за четириъгълник. Похвалих ги, обсъдихме как да си докажат резултатите в къщи и ги подканих да направят изследвания за петоъгълника. Някои излязоха в полагаща им се почивка, но повечето не се откъсваха от компютрите. А тримата приятели работеха настървено, даваха си съвети, дори не бяха използвали в началото готовата конструкция за правилен многоъгълник, но бяха готови преди всички, дори след като преправиха задачата с готовата конструкция.

Станислава също бе готова. Докато тя бе използвала само три плъзгача, тримата приятели достигнаха до резултата с пет плъзгача. Е, сигурна бях, че извод ще направи само тя. Всъщност търсеното геометрично място е само вътрешността на петолъчката $UVWZA_1$, включително точките C_1, D_1, E_1, F_1 и G_1.

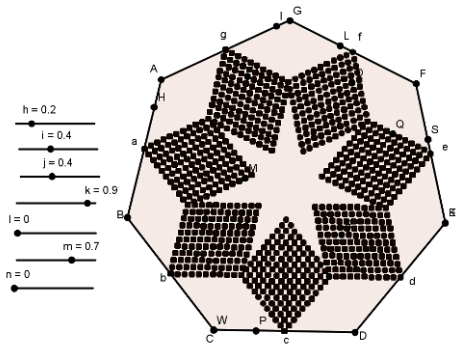
Без да ги подканям решиха да експериментират и за шестоъгълник. Станислава прие за разумна тяхната идея и се справиха почти наравно. Бях щастлива, че и на тях им хареса. Още по-голямо бе моето учудване след една седмица, когато Михаил-Богдан и Кристиан ми показаха своите орнаменти. Бяха си играли доста време, но какво пък – с нещо смислено и красиво. Те виждаха различни неща в тях – кубове, вложени един в друг, поглед от сателит, цветна градина.

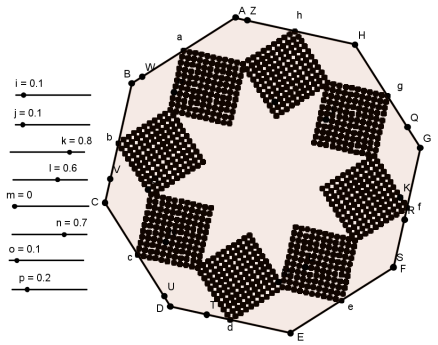
Ето резултати за шестоъгълник, които показват, че само центърът на правилния многоъгълник удовлетворява исканото свойство.





Станислава продължи да изследва за седмоъгълник и осмоъгълник, и направи извод, че очевидно няма точки с желаното свойство.





Това са само част от експериментите, които сме провели през учебната година. Методът на геометричните места от точки бе използван и в редовните часове по математика – в 12. и 11. клас, профилирано обучение. Така например елипса, хипербола и парабола бяха успешно реализирани от учениците с компютърната среда *GeoGebra,* както и още няколко задачи в този дял. Особено ценен в това отношение и споделеният опит на колеги в проект *Fibonacci* [5].

4. Заключение

В заключение ще отбележа, че в нашето училище използваме компютъра за много и разнообразни цели. Учителката по информационни технологии – Николина Георгиева запознава ученици от 5. и 6. клас с компютърната среда *GeoGebra*, а учителката по математика на 5. и 6. клас – Светлана Илионова използва много често диска, който ни предостави екипът на проект *Fibonacci* на Националната конференция през декември, 2011 в часовете си и е много благодарна на създателите на динамичните ресурси по проекта [6].

За мен не е трудно да си отговоря на въпроса „Има ли полза от компютъра в часовете по математика?" Да, особено ако е в изследователски стил!

Литература

1. Списание „Математика в школе", кн. 2, 1986 г., №2959
2. Димова, Д. *Учи и преподавай математика с GeoGebra* – изд. „Везни – 4", 2012, ISBN 9789549977509
3. Chehlarova, T. *If only I had such a math teacher…* In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies - Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information tehnologies. 2012. pp.135-140 ISBN 978-954-2946-19-9
4. Kenderov, P., E. Sendova. *Towards enhancing the inquiry based mathematics education.* In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies - Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information tehnologies. 2012. pp.56-70 ISBN 978-954-2946-19-9
5. Кокинова, С. – *Скок в неизвестното*, Математика и информатика, кн. 5 с. 13-16
6. Проект *Fibonacci* http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm, 1.02.2013

Нов скок в неизвестното в часовете по математика – 10. клас

Стелиана Кокинова
skokinova@abv.bg
Първа английска езикова гимназия, София

Резюме

Обект на разглеждане в представянето ще са свойствата на показателната и логаритмичната функции и откриването на връзка между графиките им, като се използва динамичният софтуер GeoGebra в изследователски стил.

Часовете са проведени с десетокласници от Първа английска езикова гимназия през февруари 2012г.

Ще се спрем на променената роля на учителя в учебния процес, на задачата му да поощрява и насърчава изследователския дух на децата в стил: Задавайте въпроси! Преценявайте критично всеки отговор. Не се страхувайте "да скочите" в неизвестното!. Ще отразим и съдействието, което получаваме за реализиране на тази цел в рамките на проекта Fibonacci.

Ключови думи

изследователски подход, показателна и логаритмична функции, проект Fibonacci, динамичен софтуер GeoGebra.

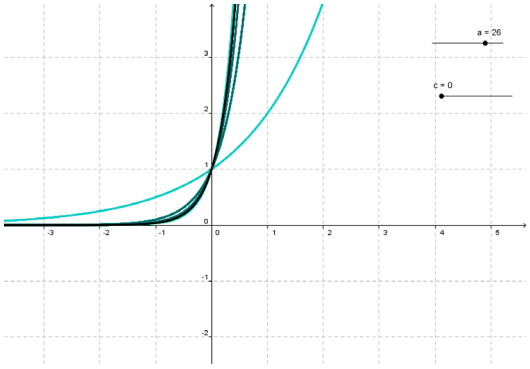
В „Скок в неизвестното" [1] разгледахме променената роля на учителя в учебния процес и изтъкнахме факта, че на него е отредена задачата да поощрява и насърчава

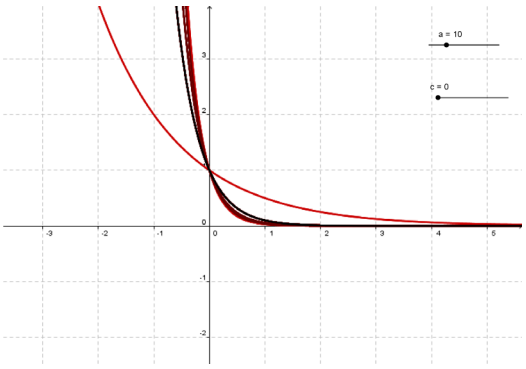
изследователския дух на децата. Споменахме и, че мотото на този преподавател е : *„Задавайте въпроси! Преценявайте критично всеки отговор. Не се страхувайте да „скочите" в неизвестното!".* Неоценима помощ при реализиране на тази цел имат разнообразните дейности по европейските проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci* [2, 3].

Тук обект на разглеждане ще са свойствата на показателната и логаритмичната функции, преподавани в 10. клас и откриването на връзка между графиките им, като се използва отново динамичният софтуер *GeoGebra*. Часовете са проведени с 10б, 10в и 10г класове от Първа английска езикова гимназия от 14 до 22 февруари 2012 г.

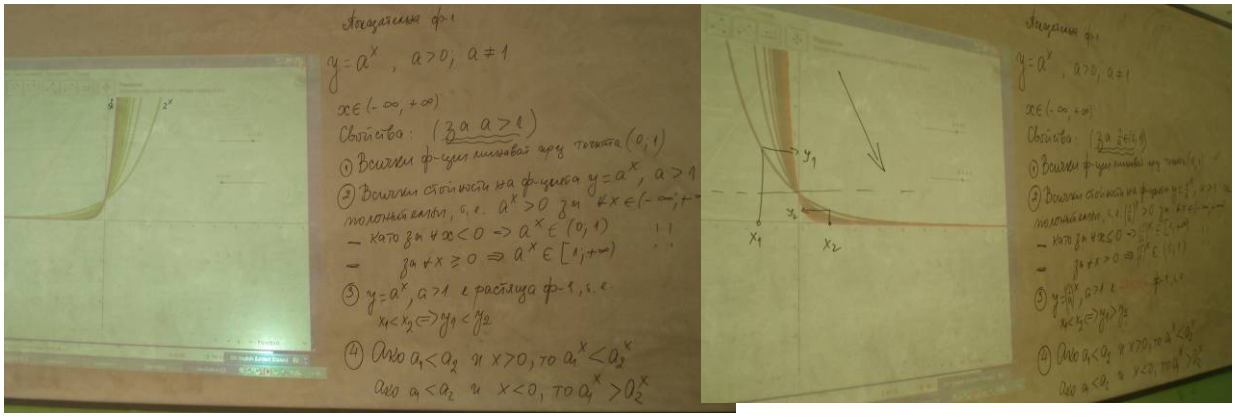
При откриването на тези свойствата и връзки между графиките им преминахме през следните етапи:

- Начертахме графиката на показателната функция $y = a^x$. Първо начертахме целия клас от функции $y = a^x$, $a > 1$, като използвахме и възможностите на *GeoGebra* за динамична смяна на цвета на различните графики при промяна на основата *a.* Аналогично постъпихме и при $y = a^x, 0 < a < 1$.



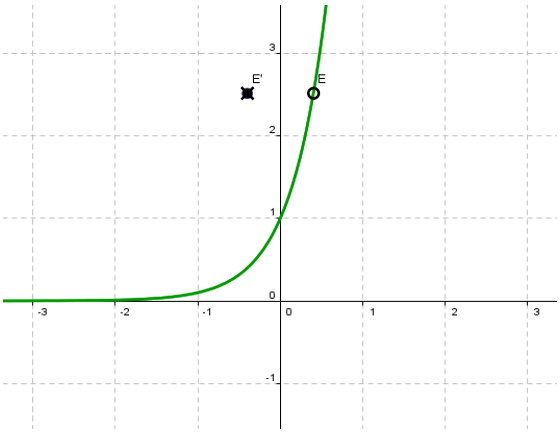


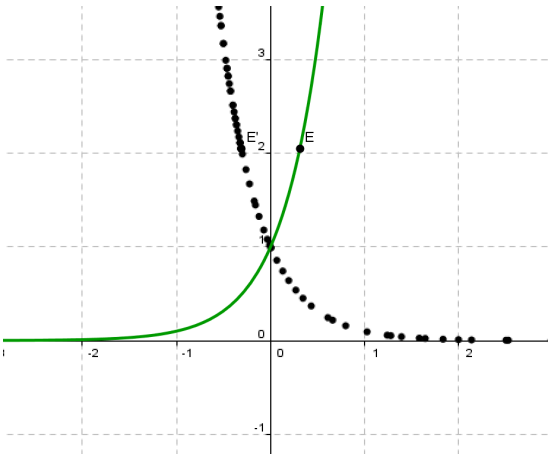
- Записахме наблюденията:

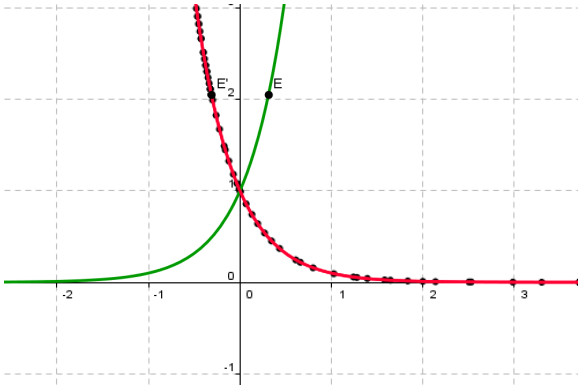


Запитахме се дали има връзка между графиките на $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, както и между $y = 5^x$ и $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, тъй като очевидно, ако едната функция е $y = f(x)$, то другата ще е $y = f(-x)$. Проверихме предположението си, че тези графики са симетрични относно оста

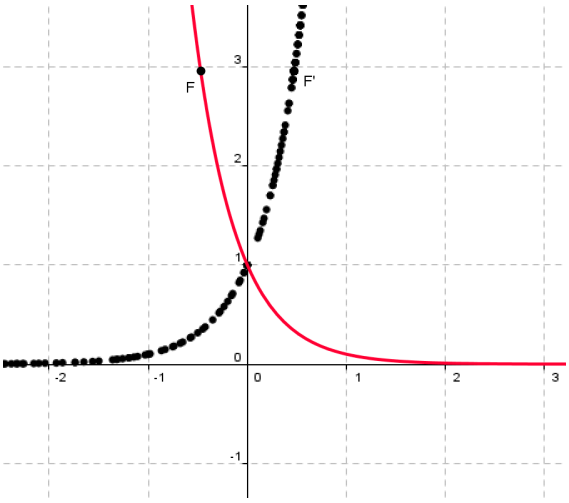
Oy, като избрахме произволна точка (*E*) от графиката на $y = 2^x$ и намерихме нейния образ (E') при осева симетрия с ос *Oy*. След това при движението на точката *E* проследихме следата, която оставя E'. Накрая установихме, че оставената следа от E' е изцяло върху графиката на $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

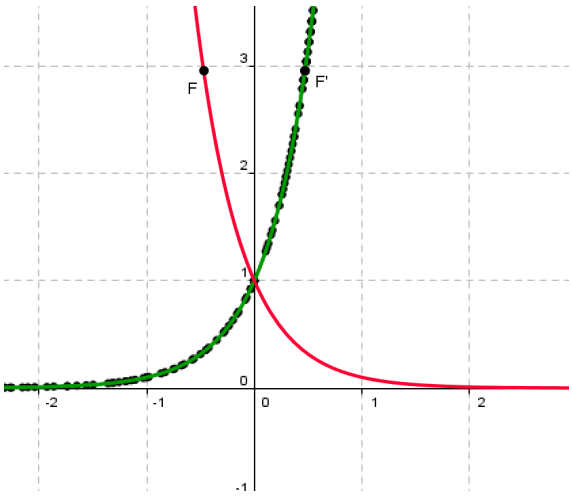




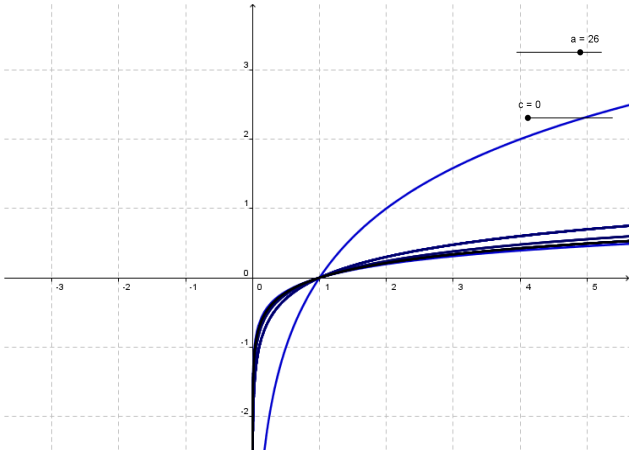


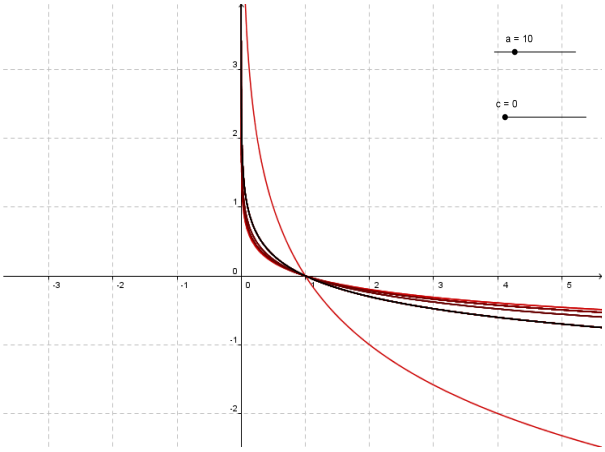
Остана да проверим само дали и следата, която ще остави образът на произволно избрана точка от графиката на $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, ще е върху графиката на $y = 2^x$.

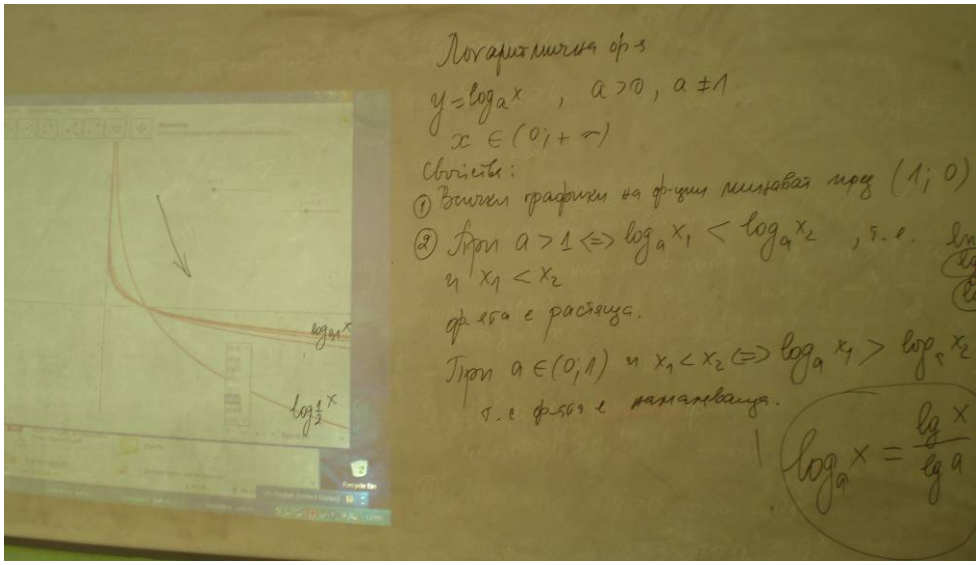




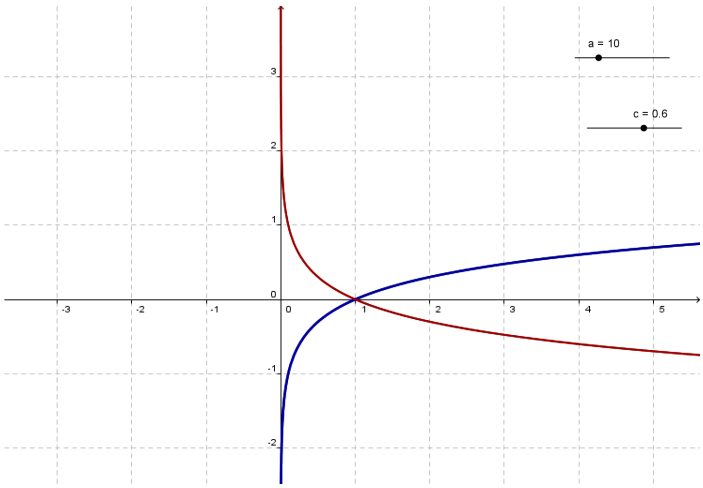
Постъпихме по подобен начин и при изследването на логаритмичната функция.



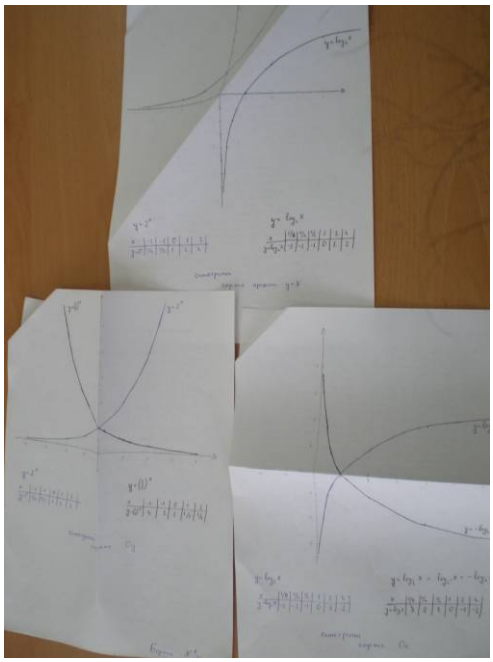


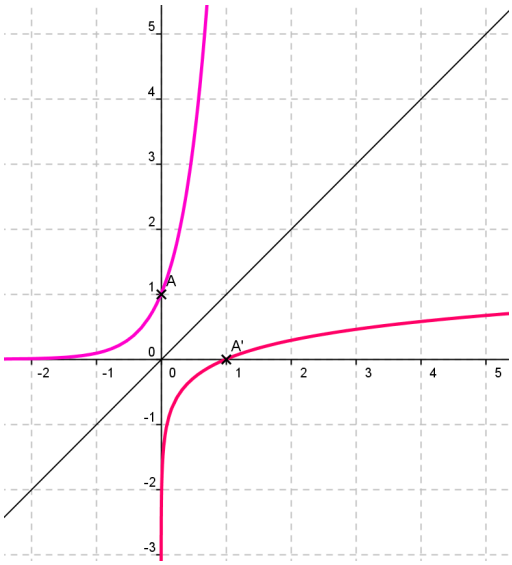


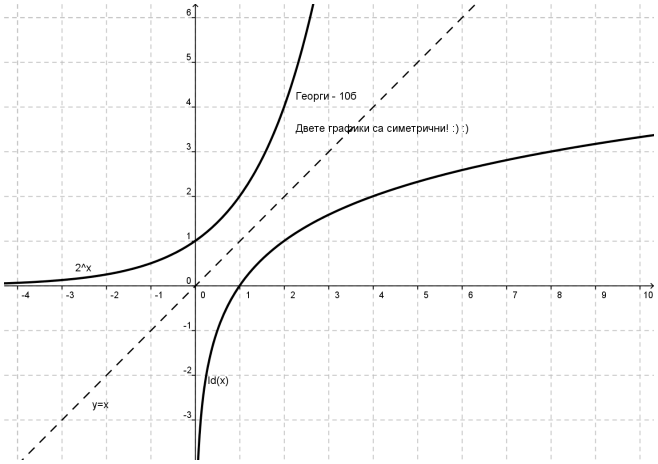
Лесно открихме и връзката между графиките на $y=\log_2 x$ и $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ (от $y=\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{2^{-1}} x=-\log_2 x$ следва, че ако $f(x)=\log_2 x$, то $\log_{\frac{1}{2}} x=-f(x)$ и двете графики са симетрични относно оста *Ox*.



За домашна работа беше поставен въпросът дали има връзка и между графиките на функциите $y = 2^x$ и $f(x) = \log_2 x$. Ето няколко домашни работи:







В заключение да отбележим, че независимо какъв тип активност беше избрана от учениците при справяне с поставената домашна работа, те се чувстваха откриватели. Тези, които бяха избрали *GeoGebra*, имаха и допълнително малко откритие – оцениха колко полезна е формулата за смяна на основата на логаритмичната функция, тъй като освен вградените функции за начертаване на $\mathrm{ld}(x) = \log_2 x$, $\ln(x) = \log_e x$ и $\lg(x) = \log_{10} x$, използвайки $\log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$, вече можеха да начертаят графиката на произволна логаритмична функция.

Литература

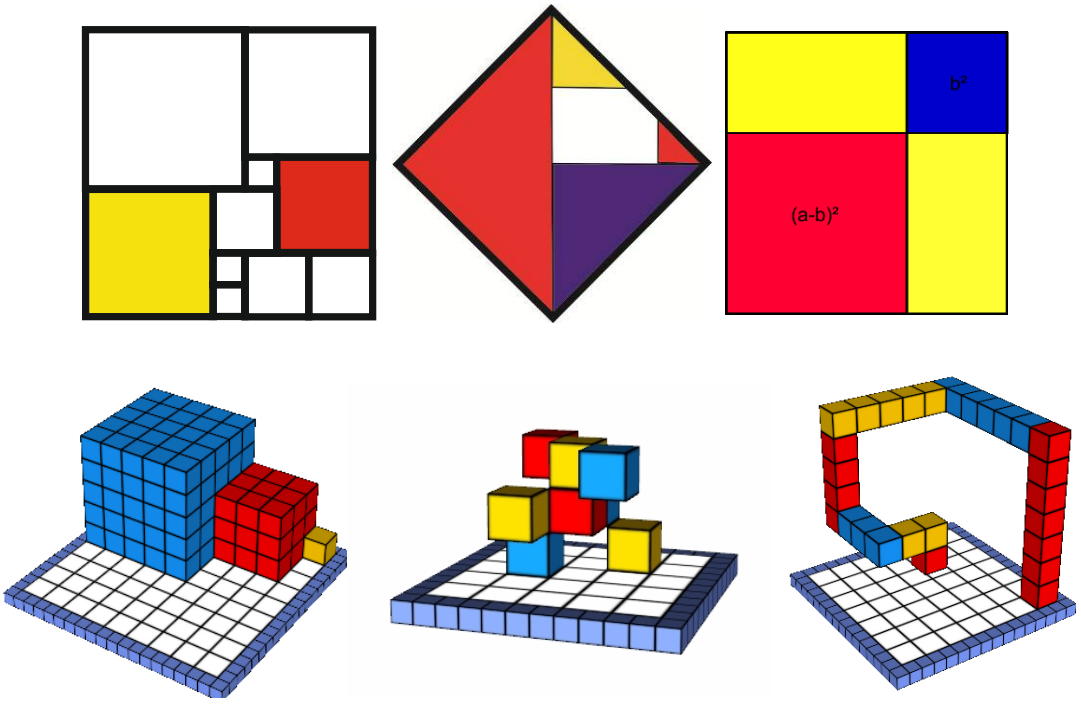
1. Кокинова, С. *Скок в неизвестното*, сп. Математика и информатика, бр. 5, 2011, с. 13-16
2. Кендеров, П. *Иновации в математическото образование: европейските проекти InnoMathEd и Fibonacci*, Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39. пролетна конференция на СМБ, 2010
3. Chehlarova, T, Dimkova, D., Kenderov, P., Sendova, E. *Seeing the innovations as an opportunity not as a threat: lessons from the InnoMathEd European project*, Proceedings of the 40. Conference of the Union of the Bulgarian Mathematicians, 2011

Задачи в стил Мондриан

Тони Чехларова
toni.chehlarova@gmail.com
ИМИ-БАН

Резюме

Идеите, представени в тази статия, са ученици-математици да погледнат на класически математически задачи с очите на художник, ученици-художници да преоткрият предизвикателствата на математически закономерности и чрез средства на изкуството.
Условия за това могат да се създадат чрез съчетаване на математически задачи с конкретен стил в изобразителното изкуство. Представяме някои познати задачи в стила на Мондриан. Решаването на тези задачи е свързано с изследвания от различен характер и дава възможност за изява на ученици с възможности и интереси в няколко области.



Фиг. Композиции от кубчета за задачи в стил Мондриан

Ключови думи

изследователски подход, динамичен софтуер, математика и изкуство

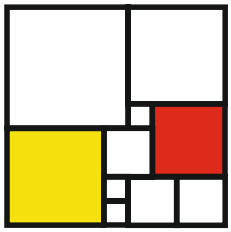
1. Увод

Общото и различното в изследванията и в творчеството в областта на математиката и в областта на изобразителното изкуство е както обект на изследване от специалисти, така и интересно за ученици, копнеещи за самопознание. Ученици-математици да погледнат на класически математически задачи с очите на художник, ученици-художници да преоткрият предизвикателствата на математически закономерности и чрез средства на изкуството – условия за това могат да се създадат чрез съчетаване на математически задачи със стил в изобразителното изкуство. Представяме някои познати задачи в стила на Мондриан.

2. Познати задачи в нов стил

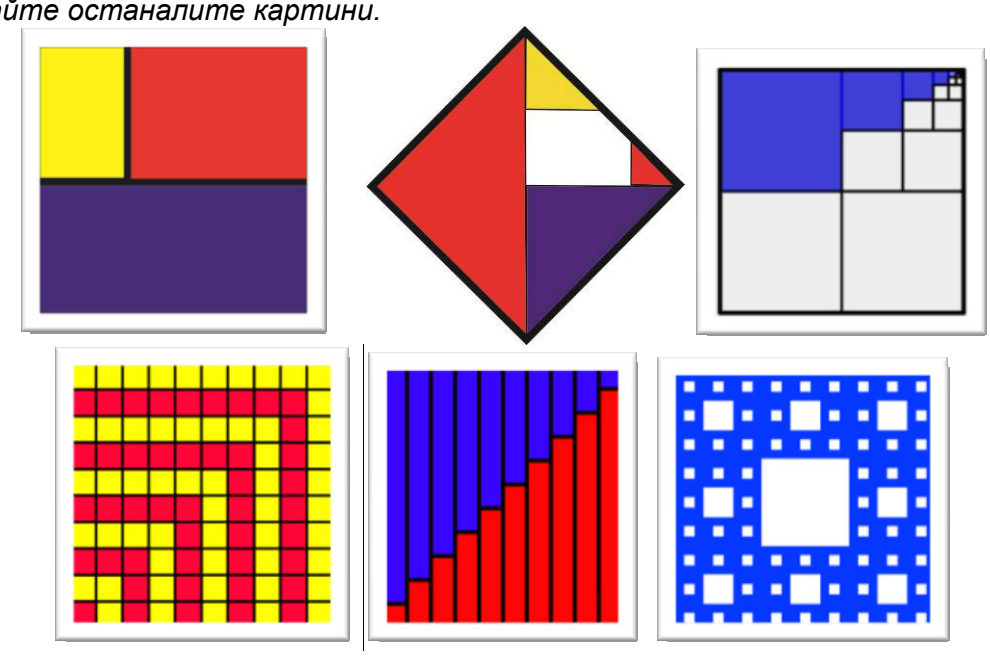
Пийт Мондриан е представител на авангардизма на миналия век, но стилът и идеите му се развиват и сега. Експериментирайки, Мондриан се отказва от детайлите, опростява фигурите и постига изображение с малък брой основни цветове и с хоризонтални и/или вертикални отсечки. Разкритата възможност чрез изкуството да се представят идеи, съчетавайки простота и разнообразие, го превръща във вдъхновител на поколения творци в областта на живописта, архитектурата и дизайна. Включително и в дизайна на математически задачи.

Задача 1. *Обиколката на жълтия квадрат от Фиг.1 е равна на 16 ед. Намерете лицето на червения квадрат.*



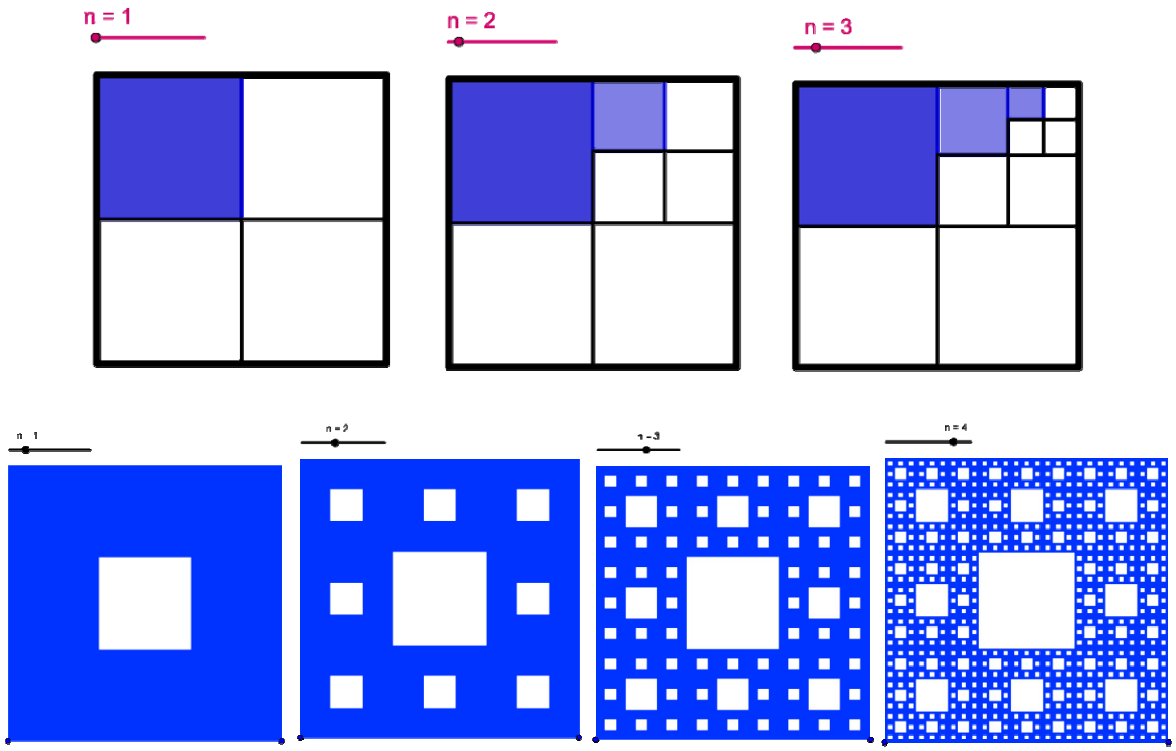
Фиг. 1. Задача с квадрати в стил Мондриан

Задача 2. *Наименованието на първата от картините на Фиг.2 е* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. *Именувайте останалите картини.*



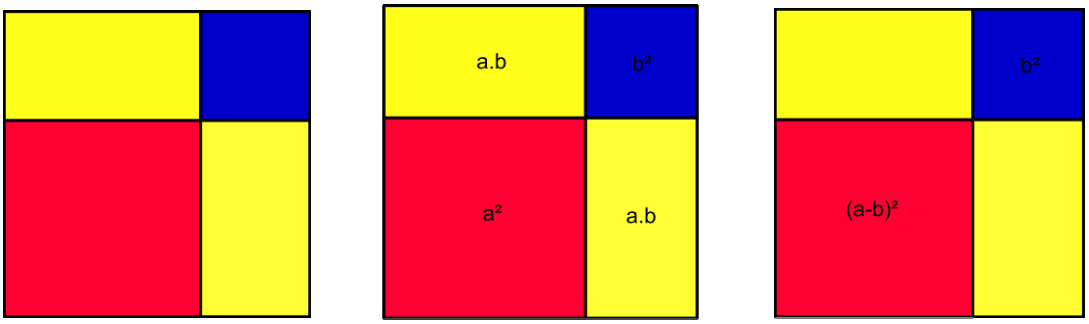
Фиг. 2. Композиции в стил Мондриан

Някои от картините на Фиг.2. са *мигове* от динамични конструкции, реализирани с *GeoGebra*. Така, с използване на плъзгач–параметър, могат да се наблюдават итерациите, което подпомага откриването на закономерности (фиг.3.).



Фиг. 3. Итерации

За някои от наименованията се получават различни записи на еквивалентни математически обекти. Понякога наименованията може да „не са еквивалентни”, т.е., една и съща фигура може да се използва за визуализация на различни закономерности.

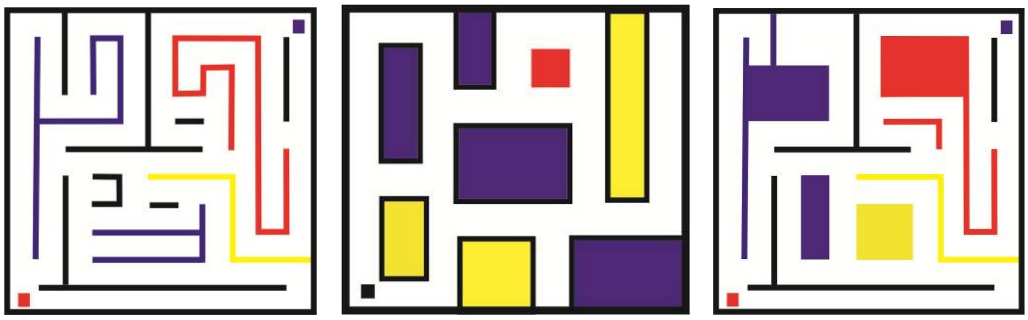


Фиг. 4. „Картина” с различни наименования

Задача 3. *Създайте картина в стил Мондриан* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Ако до този момент не е направено, тук е подходящо да се отделят характерните особености на стила Мондриан (т.е. *аксиоматиката*). Тя е свързана както с формите, така и с цветовете. И учениците започват да откриват около себе си обекти в разглеждания стил.

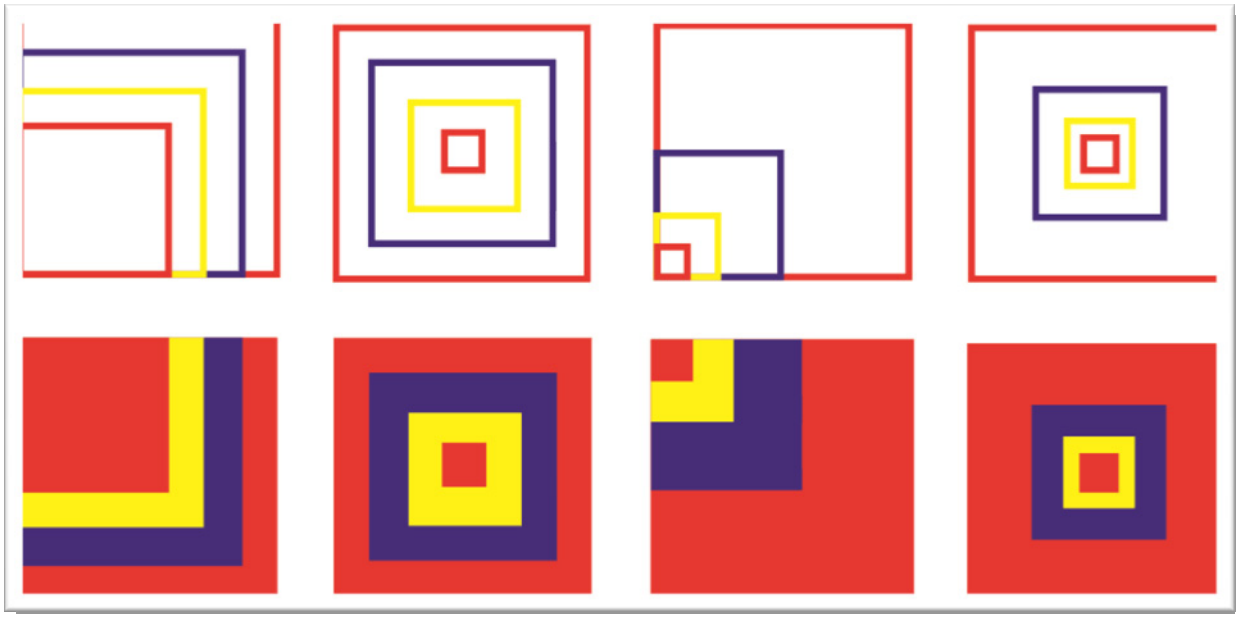
Задача 4. *Съставете условие на задача, като използвате фигура от фиг.5.*



Фиг. 5. Лабиринти в стил Мондриан

Задача 5. *Направете картина в стил Мондриан, част от която отговаря на алгоритъма*:
спусни молива
напред 10
наляво 90
вдигни молива
напред 5
надясно 90
спусни молива
напред 10
надясно 90
напред 30
...
(Числата след командата **напред** са в *мм*, а след **наляво** и **надясно** – в градуси.

Задача 6. *Открийте закономерности в композицията.*



Фиг. 6. Закономерности

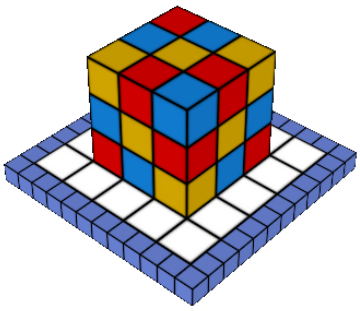
Задачата е съставена по идея на картини на Eugen Jost и разгледаните възможности за използването им в математическото образование от П. Баптист на срещата по проект Фибоначи в Байройт, Германия (фиг.7.). Някои от примерите се разпространяват и чрез

книгата [1]. Част от книжарница в Байройт е превърната в изложбена зала, а една от залите на книжарницата – в център за обучение, с акцент върху изследователския подход в обучението по математика.

Фиг. 7. Лекция на П. Баптис в Байройт, Германия

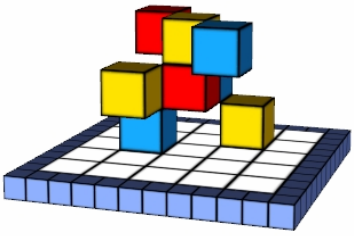
Ако разровим в сборници и статии, ще открием разнообразни задачи, които са (или могат да бъдат представени) в стил Мондриан.

Задача 7. *Куб 3x3x3 на фиг.8. е построен с 9 червени кубчета, 9 сини кубчета и 9 жълти кубчета така, че в никой ред и в никой стълб няма 2 кубчета от един и същ цвят. Какъв е цветът на „централното" кубче?* [2]



Фиг. 8. Куб 3x3x3 в стил Мондриан

Задача 8. *Добавете в композицията на фиг. 9 едно кубче така, че всеки слой по трите направления да съдържа по едно кубче от цвят.* [2]



Фиг. 9. Композиция в стил Мондриан

3. Заключение

Когато споменаваме, че ще се докоснем до творчеството на Мондриан, често учениците не са чували името на художника. След решаването на така поднесените задачи, стилът му оставя трайна следа в съзнанието. Впечатляващи бяха резултатите и от математическото щоу *Да творим в стила на Мондриан* в рамките на Европейска нощ на учените 2012, в което ученици създаваха произведения с различни техники, но в един стил – на Мондриан. Интересът на учениците трябва да се поощрява за изследвания в различни посоки – от изследване на творчество на конкретен творец, през търсене на подходящи изразни средства, включително и дигитални, до изучаване на конкретна математическа теория. Това е в синхрон с идеите на проект *Фибоначи* за стимулиране на изследователския стил при ученето [3], [4].
Специализираният динамичен математически софтуер създава нови предизвикателства за творчество в стил Мондриан. Интересни динамични реализации по картини на Мондриан можете да намерите в [5, 6], в интернет, както и да създадете свои.

Литература

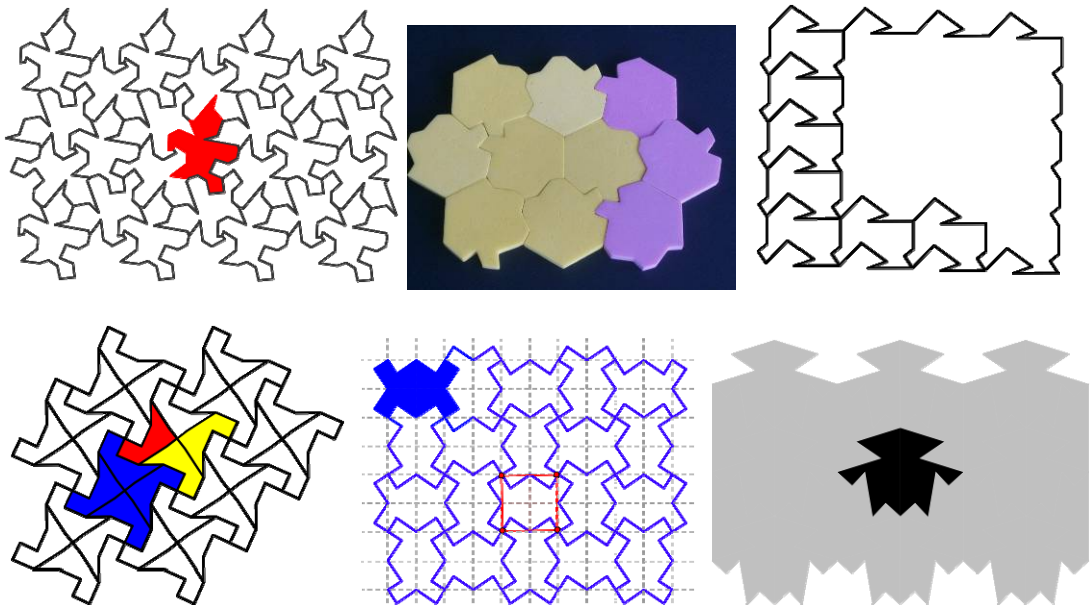
1. Baptist, P, E. Jost, C. Miller (2012) *Mathematik andersARTig*, Universitat Bayreuth, www.mathematik-kalender.uni-bayreuth.de
2. Sendova, E., T. Chehlarova (2010) *Enhancing the art of problem posing in a dynamic 3D computer environment*. Proceedings of the IV congress of the mathematicians of Republic of Macedonia, Struga, 19 – 22.10.2008. Скопје, Алфа 94 МА pp. 19-28
3. Kenderov, P., E. Sendova. (2012) *Towards enhancing the inquiry based mathematics education.* In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies - Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information technologies. 2012. pp.56-70 ISBN 978-954-2946-19-9
4. Baptist, P., D. Raab (eds.) (2012) *Implementing Inquiry in Mathematics* Education, Bayreuth, ISBN 978-3-00-040752-9
5. Сендова, Е. (2000) *Компютърно моделиране на абстрактна живопис*. Математика и информатика, (4)
6. Sendova, E. (2000) *Modelling of creative processes in abstract art, poetry and music,* IJ ITA vol. 8 No. 3, pp. 122-133

Задачи с дроби в стил Ешер

Тони Чехларова
toni.chehlarova@gmail.com
ИМИ-БАН

Резюме

Част от творчеството на холандския художник Ешер е свързано със създаване на фигури, покриващи равнината. Тези фигури, които ще наричаме паркетиращи плочки, и композиции с тях, са естествена основа за задачи, подпомагащи формирането на умения за използване на обикновени дроби в нови ситуации.
Представяме някои идеи за съставяне на задачи с дроби в стил Ешер и дейности на учениците при решаването им.



Фиг. Композиции за задачи с дроби в стил Ешер

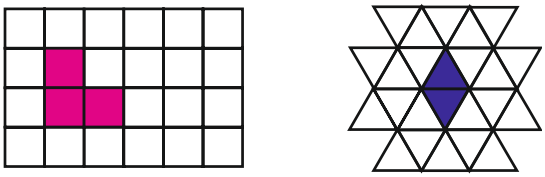
Посочваме някои средства за преодоляване на трудностите в процеса на решаване, включително и с използване на специализиран софтуер.

Ключови думи

изследователски подход, динамичен софтуер, обикновени дроби, паркетиране , изкуство

1. Увод

За преодоляване на трудности при изучаване на обикновени дроби най-често те се онагледяват чрез разделяне на торта(и) или шоколад(и) на еднакви части. Фаворити като единични елементи при създаване на фигури в системите задачи с дроби са квадратът и равностранният триъгълник, чрез които ясно се визуализира разделянето на обект на равни части. Две типични фигури от задачи за представяне на оцветена част с обикновена дроб са показани на Фиг.1.



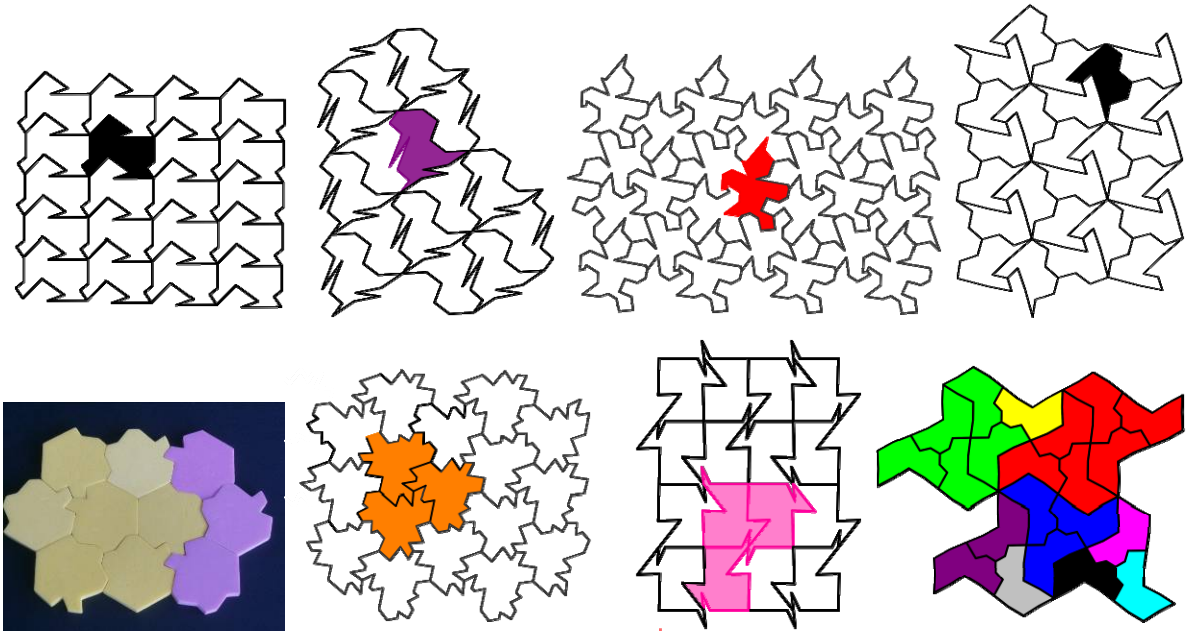
Фиг. 1. Типични фигури в задачи с обикновени дроби

Има разработени динамични среди, които улесняват изследванията, преоткриването на свойства на дробите и действията с тях, осигуряват онагледяване на дроби и решения на задачи с тях [1].

2. Паркетиращи плочки

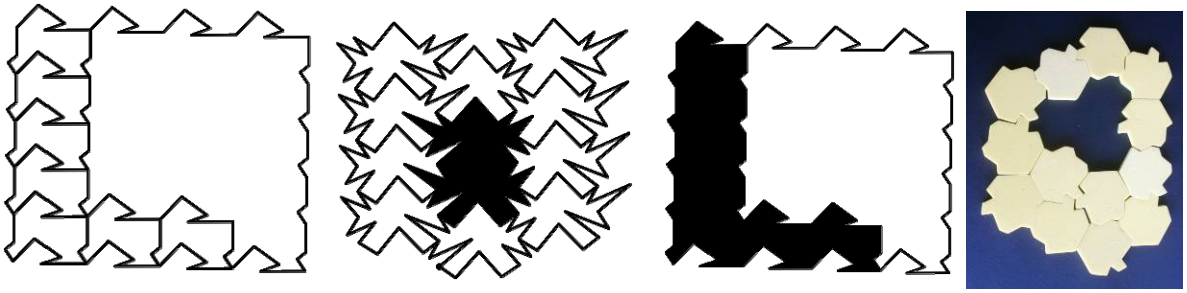
Част от творчеството на холандския художник Ешер е свързано със създаване на фигури, покриващи равнината. Тези фигури, които ще наричаме *паркетиращи плочки*, и композиции с тях, са естествена основа за задачи, подпомагащи разбирането и формирането на умения за използване на обикновени дроби в нови ситуации. Когато в композицията са дадени контурите на паркетиращите плочки (Фиг.2), учениците трябва да:

- съобразят, че елементите, от които е изградена тя, са еднакви, и тъй като могат да покрият равнината, са паркетиращи плочки;
- намерят броя на оцветените паркетиращи плочки;
- намерят броя на всички паркетиращи плочки;
- представят оцветената част с обикновена дроб.



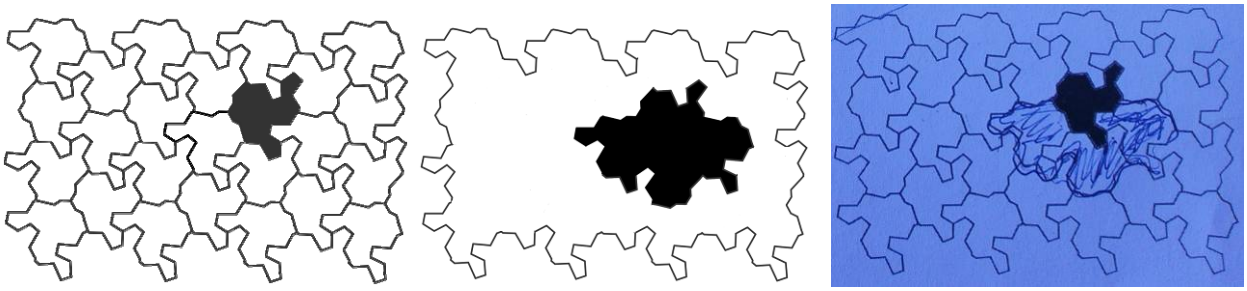
Фиг. 2. Композиции с контури на паркетиращите плочки

При работа с материални паркетиращи плочки е естествено те да се наложат една върху друга и така да се прецени еднаквостта им.
Ако композицията е изградена само с използване на транслация, учениците бързо съобразяват, че фигурите са еднакви. При използването на ротация (в частност – на централна симетрия) или осева симетрия, макар че интуитивно има ориентиране към еднаквост, трудно е „виждането" или описанието на съответните еднакви елементи. Често се поставят символи, например стрелки във фигурите или се правят частични запълвания на части от нея, за да се изясни еднаквостта и подредбата.
При необходимост може да се изреже плочка и демонстрира с налагане получаването на композицията. Когато задачата се задава на електронен носител, има и други възможности, които използваният софтуер предоставя за визуализация на еднаквостта на плочките.
Когато контурите са ясни, преброяването не е проблем и обикновено се търсят рационални начини за преброяване като групиране, умножение, използване на свойства на събирането, допълване и съответно изваждане. Когато не са ясни част от контурите, задачата значително се усложнява. На Фиг. 3 са показани примери, в които са дадени контурите на затъмнените паркетиращи плочки; контурите на незатъмнените паркетиращи плочки, не са известни контури на паркетиращи плочки.



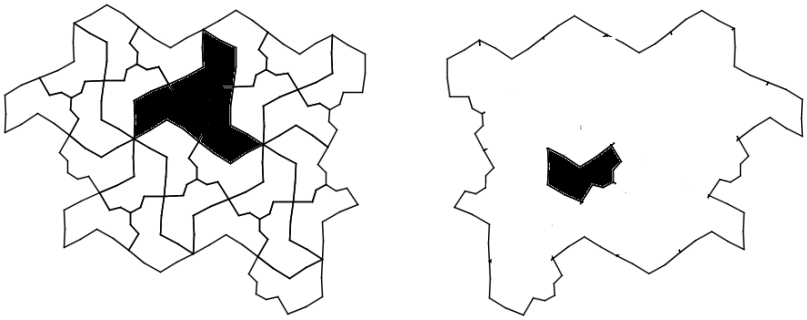
Фиг. 3. Композиции с липсващи контури на паркетиращи плочки

В някои случаи подредбата на задачите може да подпомогне решаването. Никой от изследваните ученици не разпозна контура на втория пример на фиг.4, макар непосредствено преди това е решавал първия пример.



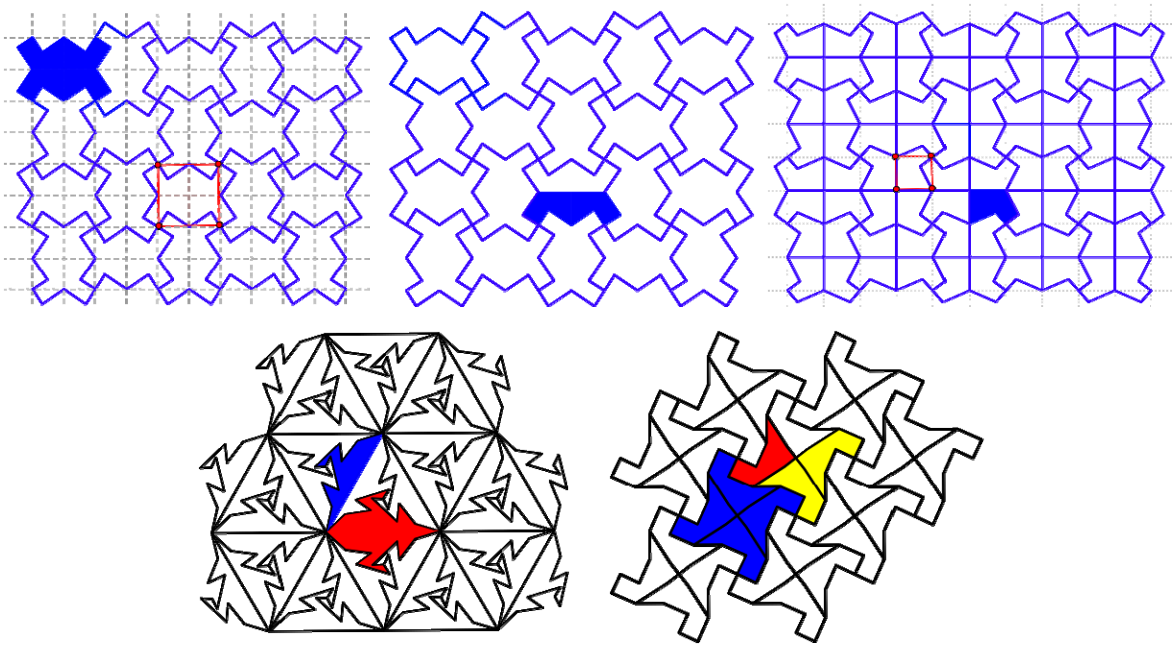
Фиг. 4. Подредбата на задачите

След помощта, насочваща към сравняване на двете фигури, по-голямата част от учениците започнаха да разделят тъмната част с цел установяване на броя на паркетиращите плочки. а е по-удобно да се ползва предната фигура и чрез оцветяване да се получи „затъмненото петно". Използването само на една такава подредба на примери доведе до системно разпознаване на контур и използване на изследвана вече композиция, т.е. използване на аналогията в този аспект като метод. Така всички видяха композициите във Фиг. 5 като симетрични и използваха получен вече резултат за решаване на следващ проблем.



Фиг. 5. Контурът

Понякога изборът на паркетираща плочка не е еднозначен. Такива са примерите със симетричните фигури на Фиг. 6.

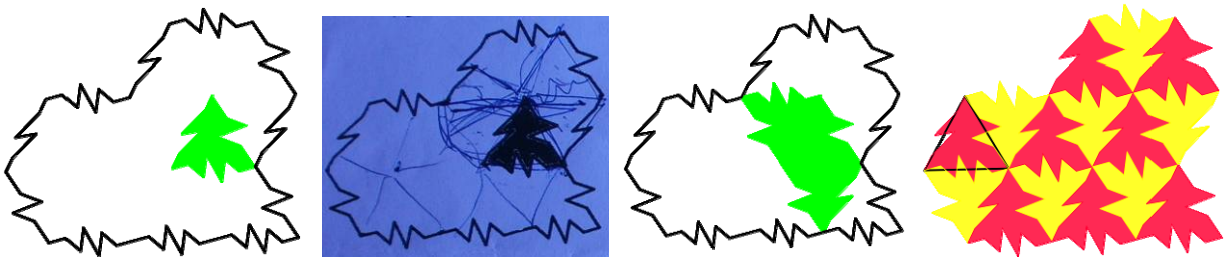


Фиг. 6 Варианти на избор на паркетираща плочка в композиция

Ясно е, че тук се проявява основното свойство на обикновените дроби. Синята част в последната композиция на Фиг.6 може да се изрази например като $\frac{1}{9}=\frac{2}{18}=\frac{4}{36}$, според избора на паркетираща плочка.

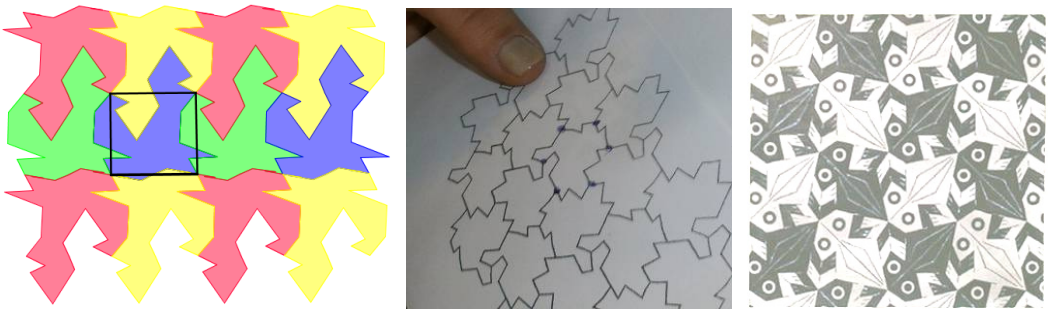
Оцветяването с различни цветове е подходящо за съставяне на задачи за събиране, изваждане или сравняване на обикновени дроби.

Ключов момент може да бъде откриването на фигурата, от която е започнало създаването на паркетиращата плочка (стартова фигура).



Фиг. 7. Използване на стартова фигура от ученици

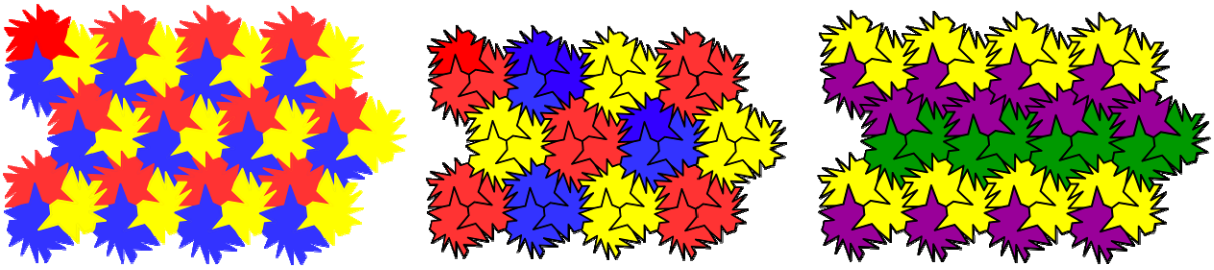
При откриване на стартова фигура съществени са точките, в които се срещат няколко паркетиращи плочки.



Фиг. 8. Откриване на стартова фигура в композиция

С решаването на такива задачи в стил Ешер се цели не само прилагане на знания за дроби в нови условия. Очаква се учениците да развият наблюдателността, умение за разкриване на закономерности, за използване на свойства на числата и действията с тях, на симетрията, на лицето. Осигуряват се натрупвания и интуитивно разбиране и използване на еднаквости.

Подходящо е предварително да са извършвали оцветяване по различни начини на подходящи композиции – тогава по-лесно откриват различни закономерности в паркета.

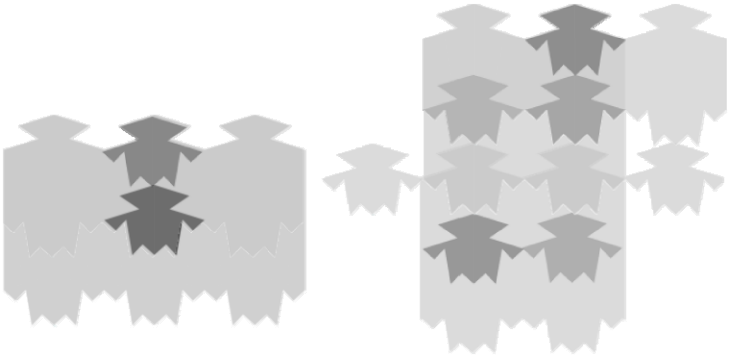


Фиг. 9. Разнообразие в оцветяването

Усложняването на задачите с дроби в стил Ешер може да се постигне по различни начини – чрез композициите (Фиг.10) или чрез текстовете.

Фиг. 10. Композиции за задачи с повишена сложност

При електронно задаване на задачата учениците използват други средства за решаване. При работа с *GeoGebra* единичната фигура може да се запише като картина, да се вмъкне във файла многократно и да се използва като паркетираща плочка. Понякога е удобно така да се работи и с цялата композиция (виж Фиг. 11). Друг начин е да се намери по-проста фигура „например пораждащата“, и с нея да се извърши преброяването.



Фиг. 11. Използване на GeoGebra като средство

Следващите предизвикателства са задачи с обикновени дроби в стил Ешер, когато се използват две или повече плочки, или неевклидова геометрия. Съставянето на такива математически задачи от ученици е свързано с творчески елемент и в областта на изобразителното изкуство. За целта е подходящо да се запознаят с разнообразни начини за получаване на паркетиращи плочки, както и с творчеството на последователи на Ешер [2].

3. Заключение

В творчеството на редица художници математиката и изобразителното изкуство са свързани по уникален начин и изследването, разкриването и използването на тези връзки в образованието е полезно. Особено силен е ефектът върху мотивацията на ученици, за които математиката не е любим учебен предмет. Изследванията на учениците могат да продължат на различно равнище и в различни области: математика, изкуство, информационни технологии или съчетанието им. Така ученици с разнообразни интереси могат да намерят в предложената тема онова зрънце, което провокира интереса, възбужда изследователския дух, мотивира за продължителна работа. Постигане на такава отдаденост на ученика в ролята на изследовател е една от целите на проект *Fibonacci* ([3], [4]) и успяхме да я видим реализирана чрез учениците на Елисавета Стефанова от СОУ [2].

Литература

1. Чехларова, Т., Е. Сендова. (2012) *Необикновено за обикновените дроби – изследвания с динамични конструкции*. Макрос. ISBN 978-954-561-282-4
2. Chehlarova, T., E. Sendova, E. Stefanova, (2012) *Dynamic tessellations in support of the inquiry-based learning of mathematics and arts*, in Theory, Practice and Impact – Proceedings of Constructionism 2012, Athens, Kynigos, C., Clayson, J., Yiannoutsou, N. (Eds) August 21-25, pp.570-574. ISBN: 978-960-88298-3-1 (Printed book) ISBN: 978-960-88298-4-8
3. Kenderov, P., E. Sendova. (2012) *Towards enhancing the inquiry based mathematics education*. In: Re-Designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Education through Innovative Use of Digital Technologies – Unesco International Workshop Sofia, State University of Library studies and Information technologies. 2012. pp.56-70 ISBN 978-954-2946-19-9
4. Baptist, P. and D. Raab (eds.) (2012) *Implementing Inquiry in Mathematics Education,* Bayreuth, ISBN 978-3-00-040752-9

On a New Function in the Dynamic Software

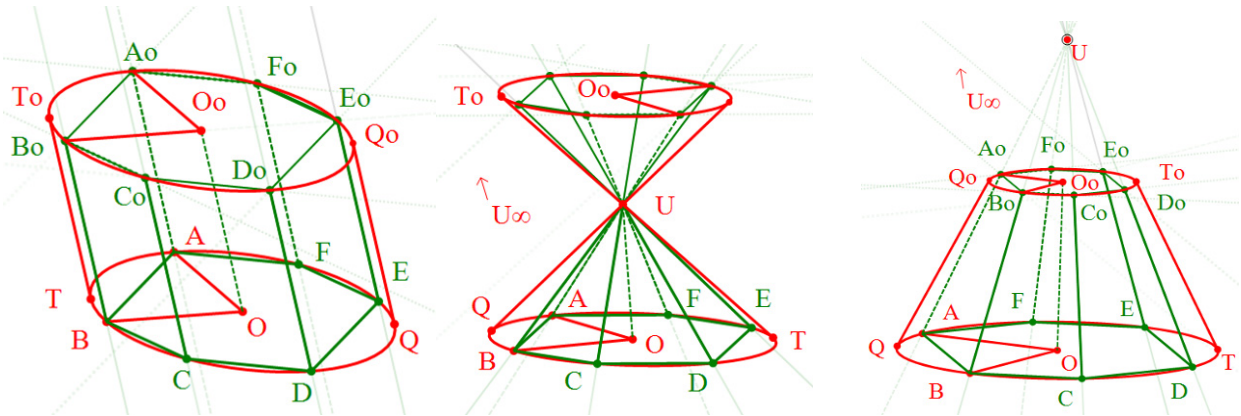
Boyan Zlatanov*, Samet Karaibryamov, Bistra Tsareva
bzlatanov@gmail.com, einismotic@gmail.com, btsareva@gmail.com
Plovdiv University “Paisii Hilendarski

Abstract

The Dynamic Geometric System Sam (which is written in C # in the NET Framework 4 environment) [1] was created as an educational software for the needs of the subject Synthetic Geometry. The unveiling of the common projective root for large groups of problems is in the basis of our innovative approach, which is eased by the Dynamic Geometric Software Sam. This allows a generalization of propositions that are related to the school mathematics. The new propositions are easy for the university students and are understandable for the studious pupils.

The new function “Swap finite & infinite points” in the menu of the Dynamic Geometric Software Sam optimizes the drawing of the sketches; it also develops a research style of thinking in the students, which is an important element in the modernization of the teaching of mathematics.

For instance, the edges of a parallelepiped are connected with three infinite points U_∞, V_∞, W_∞. The swapping of U_∞, V_∞, W_∞ with the free points U, V, W allows the user to transform the parallelepiped in no time into prism, truncated pyramid, pyramid - with bases parallelogram, trapezium, quadrilateral or triangle, with a special situation of a chosen surrounding edge. The constructions made for one of the solids are carried in the new one.



The Sam *software proposes a fast preparation of the auxiliary sketches, which are connected with inscribed or circumscribed polyhedra.*

By the help of the Fibonacci *project we would like to share and spread our experience in teaching the students to be creative by means of the new function.*

Key words

Inquiry based approach, dynamic software, swap of finite and infinite points.

1. Introduction

The Dynamic Geometric Software *Sam* (which is written in C # in the NET Framework 4 environment) [1] was created as an educational Software for the needs of the subject Synthetic Geometry. The innovative approach in the teaching of Synthetic Geometry [2] has converted the software in a natural bridge for the knowledge obtained at university and at school. The basis of our approach is the discovery of the common projective roots for large classes of problems and all this was eased by the dynamic environment *Sam*. This allows the generalization of propositions, which are studied at school. The new propositions are easy for the university students and understandable for the studious pupils. The knowledge of the way and the instruments by which the generalizations are made teaches the future teachers how to discover new problems from old ones.

2. Swap of finite & infinite points

The presence of the infinite point in the instruments of the Dynamic Geometric Software *Sam* and the function "Swap of finite & infinite points", which is a new function for the Dynamic Geometric Software, has turned out to be an important tool for the formation of a creative style of thinking, which is a particularly important point for the modernization of the teaching in mathematics. This function, selected from the "select" menu, optimizes the drawing of the sketches. For example we consider a parallelepiped with its axis sections.

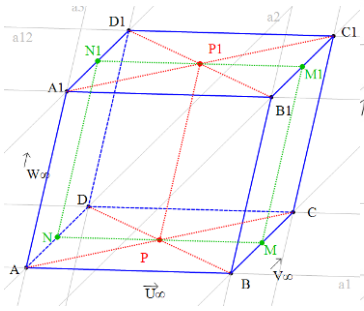


figure 1.1

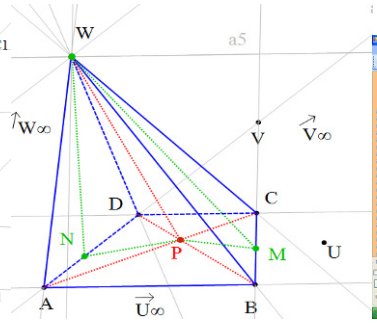


figure 1.2

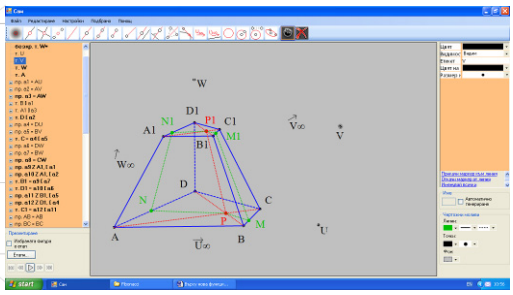


figure 1.3

The edges of a parallelepiped are connected with three infinite points U_∞, V_∞, W_∞. Swapping consecutively U_∞, V_∞, W_∞ with the free points U, V, W allows the user to transform the parallelepiped in no time into prism, truncated pyramid, pyramid with its base being a parallelogram, a trapezium, a quadrilateral or a triangle, with a special position of a chosen surrounding edge. Some of these possibilities are presented in figures 1.1, 1.2 and 1.3. All the constructions made for one of the figures are preserved for the new one, but which of the relations preserve their properties and which do not is part of the investigations.

We would like to share and spread via the Fibonacci project our experience with two practical examples demonstrating how to teach the students to be creative by the new function.

The first example is connected with the application of the Desargues' Theorem for perspective triangles.

Desargues' Theorem for perspective triangles: *The connecting lines of the couples of corresponding vertexes of two triangles ABC and A'B'C' are intersecting at a point S if and only if the intersection points of the couples of corresponding sides* $P=BC\cap B'C'$, $Q=AC\cap A'C'$, $R=AB\cap A'B$ *lie at a line s.*

The two triangles that satisfied the conditions of the above theorem are called ***perspective***. The point *S* is called ***perspective center*** and the line *s* is called a ***perspective axis***. They can be either finite or infinite objects.

The Desargues' Theorem allows us to situate the vertices of the two perspective triangles on two lines. In this way we get the next basic problem:

Problem 1: *Let g and g´ be two lines with g∩g´=T and let A, B, C ∈ g, and A´, B´, C´∈g´. Prove that if the lines AA´, BB´, CC´ intersect at a point S, then the points T, P=AB´∩A´B, Q=BC´∩B´C, lie at a line s.*

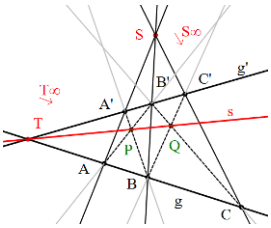


figure 2.1

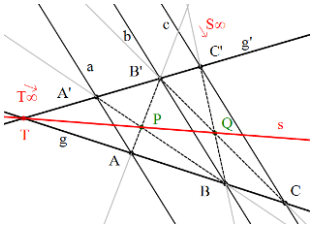


figure 2.2

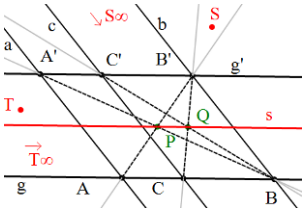


figure 2.3

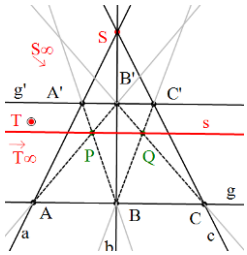


figure 2.4

Solution: (figure 2) The point *S* is a perspective center for the couple of triangles *AB´C* and *A´BC´*. The triangles satisfy the conditions of Desargues' Theorem. Then the intersection points of the couples of the corresponding sides *Q=BC´∩B´C, P=AB´∩A´B, T=AC∩A´C´* are collinear.

The statement of Problem 1 holds true in the four different cases shown in figure 2. We sketch only one of the cases and with the help of the function "Swap finite & infinite points" we obtain the other three automatically. When *S* and *T* are finite and infinite points (figure 2.2) respectively, we obtain Problem 89 of [3], which is solved by homothety and the complementary requirement for the lines *A'B* and *B'C* to be parallel. The usage of the dynamic geometric systems reveals that this complementary condition is not necessary. The projective method gives the shortest solution of this problem for all of the four cases.

Problem 1 appears as a repeating element in the solution of the next three problems. We have stated it just to help the reader.

Problem 2: *Let ABCD be a parallelogram and the point K be in its interior. Let the lines p and q be passing through K and p ∥ AD u q ∥ AB. Let denote R=p∩AB, S=p∩CD, M=q∩AD, N=q∩BC, O=AC∩BD. Prove that the points K, O, L, where L is the intersection point of the bimedians of the quadrilateral MRNS, are collinear* ([3], Problem. 90).

Solution: (figure 3) Let us denote the common infinite points of the lines *AB* and *CD* by U_∞, the common infinite point of the lines *BC* and *AD* by V_∞ and also *1=AK∩MR, 2=BK∩NR, 3=CK∩SN, 4=DK∩MS*.

By the conditions *p ∥ AD ∥ BC* and *q ∥ AB ∥ CD* it follows that we can apply Problem 1 (figure 2.3) for the lines *AB* and *q*, *CD* and *q*, *AD* and *p*, *BC* and *p*. We consider the triads of points (*A, R, B*) и (*M, K, N*); (*D, S, C*) and (*M, K, N*); and by Problem 1 we get that the triads of points (*1, 2,* U_∞) and (*3, 4,* U_∞) are collinear. Consequently the lines *12* and *34* are parallel. Similarly we consider the triads of points (*A, M, D*) and (*R, K, S*); (*B, N, C*) and (*R, K, S*) and by Problem 1 (figure 2.3) we get that the triads of points (*1, 4,* V_∞) and (*2, 3,* V_∞) are collinear. Thus the lines *14* and *23* are parallel, too. So we conclude that the quadrilateral *1234* is a parallelogram with sides parallel to the sides of the parallelogram *ABCD*. By the condition for a collinearity of the triads of points (*A,1,K*); (*B,2,K*); (*C,3,K*); (*D,4,K*), we can conclude that the parallelograms *ABCD* and *1234* are corresponding for a homothety *h* with a center *K*. The points *1*, *2*, *3*, *4* are the intersection points of the diagonals of the four parallelograms *ARKM*, *BRKN*, *CNKS*, *DSKM*. That is why it follows that they are the middles of the sides of the quadrilateral *RNSM* and the coefficient of *h* is *2*. By *h(A,B,C,D)=1,2,3,4* we obtain that the intersection points of the diagonals *O=AC∩BD* and *L=13∩24* are corresponding for *h*, i.e. the points *K*, *L*, *O* are collinear and *KO=2KL*.

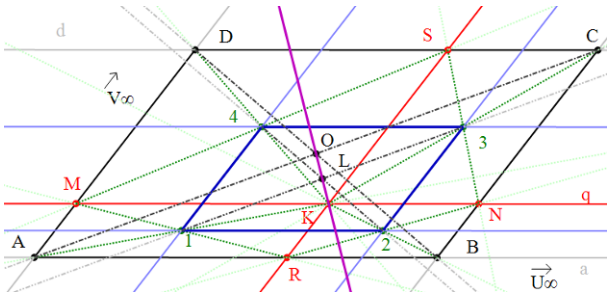


figure 3

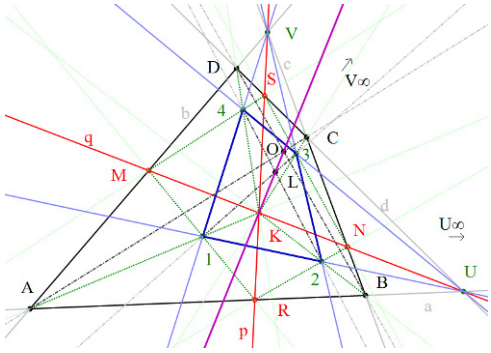


figure 4

Now we can generalize the problem for an arbitrary quadrilateral *ABCD,* because the parallelogram can be considered as a complete quadrilateral with two infinite diagonal points, and the homothety is a homology with a finite center and an axis the infinite line. The exchange of the arbitrary quadrilateral with a complete quadrilateral will remove the restriction on the point *K* to belong in the interior of the quadrilateral.

Problem 3: Let *ABCD be a complete quadrilateral with diagonal points U=AB∩CD, V=AD∩BC and let the point K be arbitrary and not lying on its sides. Construct the lines p=KV and q=KU, and denote R=p∩AB, S=p∩CD, M=q∩AD, N=q∩BC, O=AC∩BD, 1=AK∩MR, 2=BK∩NR, 3= CK∩SN, 4=DK∩MS, L=13∩24. Prove that the points K, O, L are collinear*.

Solution: (figure 4) By the condition that the lines *q*, *AB, CD* intersect at the point *U* and the lines *p, AD, BC* intersect at the point *V* it follows that we can apply Problem 1 (figure 2.1) for the lines *AB* and *q, CD* and *q, AD* and *p, BC* and *p*. Considering the triads of points (*A, R, B)* and (*M, K, N)*; (*D, S, C)* and (*M, K, N)* by Problem 1 (figure .2.1) we get that the triads of points (*1, 2, U)* and (*3, 4, U)* are collinear. Consequently *12∩34=U*. Similarly let consider the triads of points (*A, M, D)* and (*R, K, S)*; (*B, N, C)* and (*R, K, S). B*y Problem 1 (figure 2.1) we get that the triads of points (*1, 4, V) and* (*2, 3, V)* are collinear. Consequently *14∩23=V*. So we have established that the complete quadrilaterals *ABCD* and *1234* have common diagonal points *U* and *V*.

Let us consider a homology *Φ* with a center *K,* axis the line *UV* and a couple of corresponding points *A, 1*. By the properties of the homology we have that *Φ(ABCD)=1234*. Therefore *Φ(O=AC∩BD)=Φ(AC)∩Φ(BD)=13∩24=L*, which means that the points *O, K, L* are collinear.

Problem 3 is interesting for university students as well as for excellent high-school students.

The vertical integration of the teaching started upwards. Now we will change its direction downwards. It is enough to make one of the diagonal points finite by using the function “Swap finite & infinite points” – for instance let us swap *U* with U_∞. Now *ABCD* transforms into a trapezium and we get the next problem.

Problem 4: *Let ABCD be a trapezium with AB || CD and AD ∩ BC=V and let K be an arbitrary point in its interior. Construct two lines through the point K: p=KV and q∥AB∥CD. Denote R=p∩AB, S=p∩CD, M=q∩AD, N=q∩BC, 1=AK∩MR, 2=BK∩NR, 3=CK∩SN, 4=DK∩MS, O=AC∩BD, L=13∩ 24. Prove that the quadrilateral 1234 is a trapezium; with legs which intersect at the point V and prove that the points K, O, L are collinear.*

Hint: (figure 5) For the proof that the triads of points (*1, 4, V)* and (*2, 3, V)* are collinear apply Problem 1 (case 2.1.) and for the proof that the triads of points (*1, 2,* U_∞) and (*3, 4,* U_∞) are collinear apply Problem 1 (case 2.4). The homology will be with a center *K* and axis $o=VU_\infty$, i.e. a line trough the point *V*, which is parallel to the bases of the trapezium.

It is enough to sketch one of the figures 3, 4, 5 and the other two will be made by the new function “Swap finite & infinite points” of the Dynamic Geometric Software Sam.

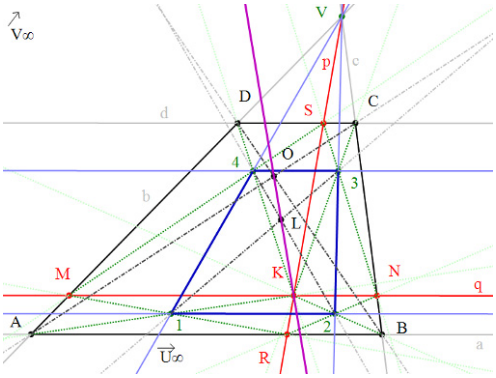


figure 5

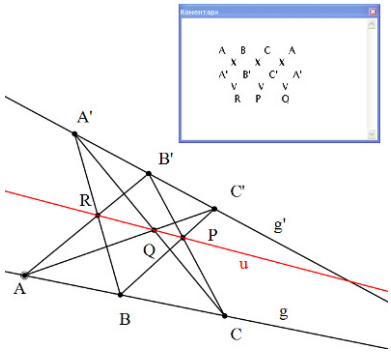


figure 6

The second example is connected with Pappus' Theorem:

Pappus' Theorem: *Let A, B, C be three different points lying on the line g and A´, B´, C´ be three different points lying on the line g´. Then the points P=BC´∩B´C, Q=CA´⋂C´A, R=AB´∩A´B lie at a* line *u*. (figure 6)

A symbolic notation of obtaining the points *P*, *Q*, and *R* is given above figure 6.

Let's consider the next problem:

Problem 5: *Let ABCD be a parallelogram and K be a point in its interior. Two lines p and q, passing through the point K are constructed so that p∥AD and q ∥AB. Denote by R=p∩AB, S=p∩CD, M=q∩AD, N=q∩BC, T=AN∩CR, Q=BS∩DN, G=CM∩AS, P=DR∩BM. Prove that the* triads *of points (P, K, C); (T, K, D); (Q, K, A); (G, K, B) are collinear.*

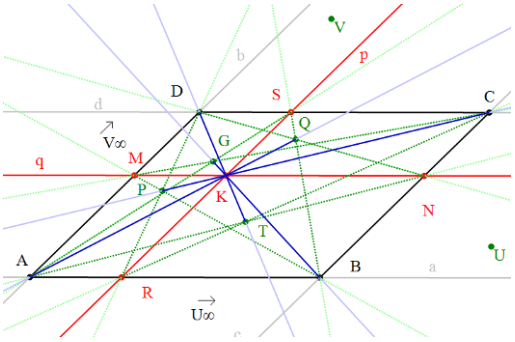


figure 7

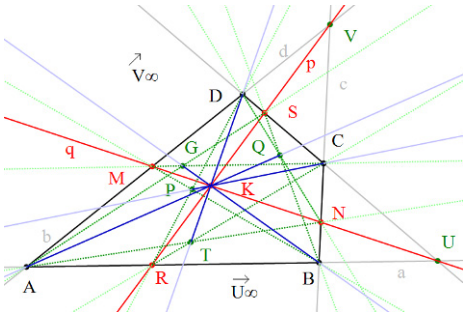


figure 8

Solution: (figure 7) Let us denote the common infinite point of the lines *AB* and *CD* by U_∞ and the common infinite point of the lines *BC* and *AD* by V_∞. By applying Pappus' Theorem four times in succession for the couples of triads of points: (B, R, U_∞) and (D, M, V_∞); (A, R, U_∞) and (C, N, V_∞); (D, S, U_∞) and (B, N, V_∞); (C, S, U_∞) and (A, M, V_∞) we obtain that the triads of points *(P, K, C); (T, K, D)*; ([3], problem 83), *(Q, K, A); (G, K, B)* are collinear.

Remark 1: The solution in ([3] problem 83) uses homothety and Thales' Theorem.

Remark 2: *We would like to point out that the projective approach for solving the problem is giving not only a short prove, but mainly it allows us to construct very easy sequences of new problems from the old one. This feature of the projective method and the function "Swap finite & infinite points" realize the vertical integration of the teaching at school and at university. First we have generalized* ([3], *Problem 83). By establishing that the point K lies in the segments DT, AQ, CP, BG; as well as in the segments RS and MN, we can use the set of the couples of perspective triangles with a perspective center K and to find new* triads *of collinear points. For example the triangles MRA and NSQ are perspective and therefore it follows that the points*

E=MR∩NS, D=MA∩NQ, B=RA∩SQ are collinear ([4] problem 28, p. 71). The describing of all the possible cases of couples of perspective triangles is a nice combinatorial problem. By this open problem we present a horizontal integration in the teaching. The investigation of the mutual position of the perspective axis is eased by the dynamic environment of the software.

Let us generalize problem 5 for an arbitrary quadrilateral *ABCD.*

Problem 6: Let *ABCD be a complete quadrilateral with diagonal points U=AB∩CD*, *V=AD∩BC* and let the point *K be arbitrary and not lying on its sides.* Let us construct the lines *p=KV* and *q=KU*. Denote *R=p∩AB, S=p∩CD, M=q∩AD, N=q∩BC, T=AN∩CR, Q=BS∩DN, G=CM∩AS, P=DR∩BM*. Prove that the following triads of points: *(P, K, C); (T, K, D); (Q, K, A); (G, K,B) are collinear.*

Solution: The usage of the function "Swap finite & infinite points" for the points U_∞, *U and* V_∞, *V* presents us in no time the sketch of the problem (figure 8). The solution is literally the same as that of Problem 5 just with replacing the points U_∞, V_∞ by *U, V,* respectively.

The last problem and the problems which it generates (Remark 2 holds true also for Problem 6), enters in the course of Synthetic Geometry for university students. They are interesting for mathematically gifted high-school students, too.

It is not difficult to realize that we can state a new problem that is suitable for all students. It is enough to choose one of the diagonal points of the complete quadrilateral *ABCD* to be an infinite point U_∞. Thus we get the next problem

Problem 7: *Let ABCD be a trapezium with legs AD and BC that intersect at a point V and let K be an arbitrary point in its interior and not lying on its sides. Construct two lines through the point K: p=KV and q∥AB∥CD. Denote R=p∩AB, S=p∩CD, M=q∩AD, N=q∩BC, T=AN∩CR, Q=BS∩DN, G=CM∩AS, P=DR∩BM. Prove that the* triads *of points (P, K, C); (T, K, D); (Q, K, A); (G, K, B) are collinear.*

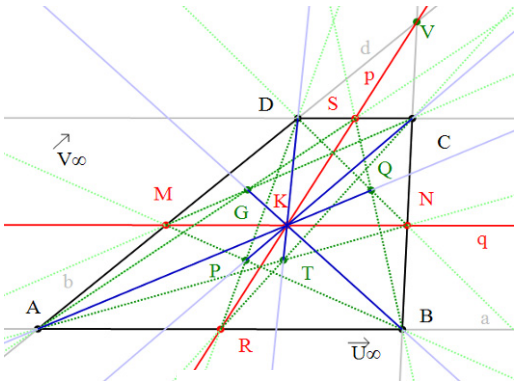


figure 9

Let us point out that it is enough to sketch just one of the figures 7, 8, 9 and the other two are generated in no time with the help of the special function "Swap finite & infinite points" of the Dynamic Geometric Software Sam.

Dynamic drawings of the paper can be found at *http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1178*

3. Conclusion

The new function "Swap finite & infinite points" of the Dynamic Geometric Software Sam induces and facilitates the students' research.

Reference

1. Zlatanov, B., Karaibryamov, S., Tsreva, B. (2012) *Textbook on Synthetic Geometry*, *http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=980* (in Bulgarian).
2. Tsareva, B *Interactive Training on Synthetic Geometry in a Dynamic Environment*, Mathematics and Mathematical education, Proceedings of the 41 Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Боровец, 9-12 Април, 2012, 401-407 (in Bulgarian).
3. Rangelova, P., Staribratov, I., *Different methods for proving that three points lie at a line*, Publisher "Izkustvo", 2011 (in Bulgarian).
4. Sharygin, I., *Problems in Plane Geometry*, "Mir" Publishers Moscow, 1988.

Mathematical modeling of the tennis match Djoković -Federer

Djurdjica Takači[1], Arpad Takači[1], Budinski Natalija[2]
takaci@dmi.uns.ac.rs, nbudinski@yahoo.com
[1] Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
[2] Grammar school Petro Kuzmjak, Ruski Krstur, Serbia, *nbudinski@yahoo.com*

Abstract

The paper deals with a session with gifted sixteen-year-old students from the Jovan Jovanović-Zmaj Grammar School in Novi Sad, Serbia, in November 2012 on mathematical modelling of the probability for a tennis player to win a match. The modelling was based on the statistics of the match between Djoković and Federer at the Barclays ATP World Tour Finals 2012 in London.

Keywords

Modeling, combinatorics, probability, tennis, interdisciplinary connections

1. Introduction

Sports are a part of everyday life, especially for many students. They enjoy different sport activities and understand their rules and corresponding statistics. Now, these widespread interests for different sports can be used to catch students' attention in teaching and learning, in particular mathematical modelling of sports activities based on corresponding roles.

Tennis is a very popular sport in Serbia. The famous Monica Seles, the Number One woman tennis player in the nineties, was born in our home town Novi Sad. Nowadays, we in Serbia are very proud of our successful tennis players, let us mention only Ana Ivanović, Jelena Janković, Janko Tipsarević, Viktor Troicki, Nenad Zimonjić.

It is a well known that Novak Djoković ranked World No. 1 by the ATP and is the year-end World No. 1 for both 2011 and 2012. The final match between Novak Djoković and Roger Federer at Barclays ATP World Tour Finals 2012 was played on Monday afternoon, November 12th, in London. Djoković won this match with 2:0. The goal of this paper is to analyze this match from a mathematical point of view.

That recent match gave us the idea to connect tennis and mathematics on next mathematics lesson in Grammar School "Jovan Jovanović-Zmaj, Novi Sad, Serbia in November 2012, with gifted sixteen years old students.

The process of mathematical modelling was applied in order to connect mathematics and tennis, as an introduction to combinatorics and some simple probability teaching contents.

The role of modelling process, as an excellent tool in mathematical education, is increasing due to its good features. Modelling contributes to students' problem solving capabilities, and to their collaboration and critical thinking skills. Despite this widespread interest and concern, the mathematical modelling is not adequately implemented in the mathematical education.

Generally, it refers to using mathematics to solve realistic and open problems (Kaiser & Schwarz, B, 2006). The effectiveness of modelling-based task induced the positive attitude, beliefs and reaction of both students and teachers. Evidence of this can be found in the literature (Boaler, 2001; Mason, 2001; Doerr & English, 2003; Lamon, Parker & Huston, 2003; Kaiser & Shwarz, 2006; Galbraith, Stillman, Brown & Edvards, 2007).

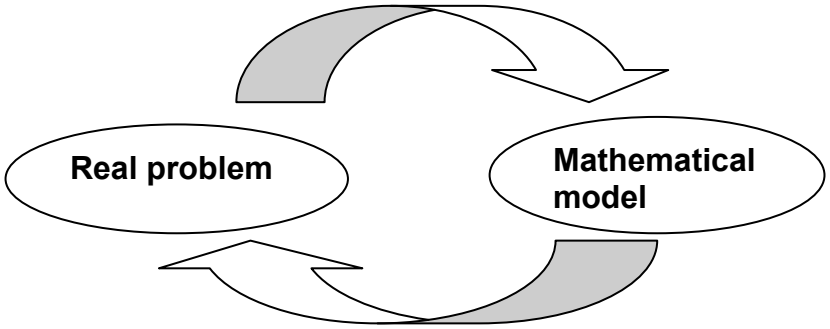


Figure 1

In Figure 1 we present a simplified scheme of mathematical modelling process. The transition from real problem to mathematical model is the most important part in the teaching and learning process. Therefore, we present the transition activities from tennis to mathematics during the lecture, done together with our students.

In the second section we present the results of papers [2], [7], and [11], considering the probability that the tennis player can win the game.

In the third section we describe the process of mathematical modelling done with our high school gifted students.

2. Mathematical model of a tennis game

It is known that in tennis match the scoring system is very unusual and complicated to be followed. It is a hierarchical one “with points required to win games, games required to win sets, and sets required to win the match” ([11]). In order to win the game the player has, first, to collect points from 0, 15, 30, 40, and then if he gets next point he win the game.

In the papers [2], [7] and [11] the authors considered the possibility for a player to win the game in a tennis match. This is the simplest case. But, if both players reach 40 points, then it is called a “deuce”. After deuce the wining point makes “advantage” to the player who wins the game if he wins the next point. If the advantage player looses the next point they return to deuce again and continue the mach. If a player wins six games (with at least 2 games more than his opponent) then he wins the set and if he wins 2 out of 3 sets[1] he wins the game.

The Figure 2 shows the Markov chain of a tennis game ([2], [7]).

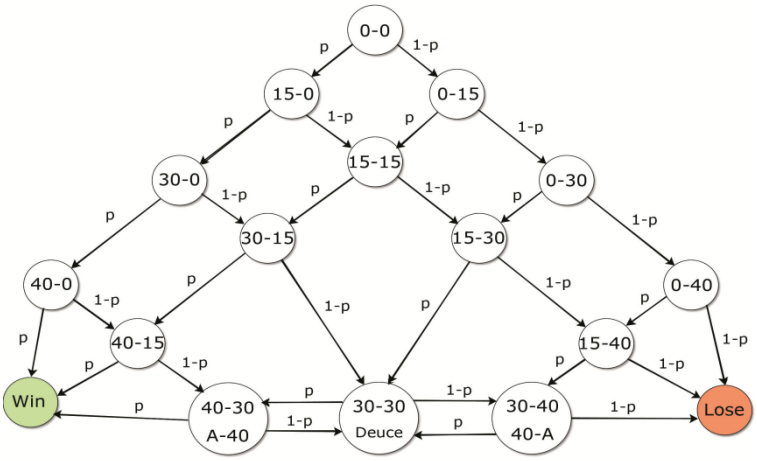


Figure 2. The Markov chain of Tennis game

[1] **Note of the editors** - or 3 out of 5, depending on the rules of the specific tournament

In the paper [11] the author gave the idea for Table 1, and the following explanations (Figure 3.):

				PLAYER A				
		0	**15**	**30**	**40**	Game		
PLAYER B	**0**	1	1	1	1	Win the game		
	15	1	2	3	4			
	30	1	3	6	10			
	40	1	4	10	20	20		
	Game	Win the game			20	40	40	
						40	80	80
							80	160
								…

Figure 3. Simplification of the Markov chain rule in tennis

At the start of the game the score is 0-0. There is only one way for player A to reach scores of 15-0, 30-0 and 40-0 in his/her favour, and that is by respectively winning 1, 2 and 3 points in a row. This gives us the first row in Table 1, and due to symmetry also the first column (for player B). If player A or B wins the next point at 40-0 in their favour, s/he wins the game as indicated. So the probability of A winning "game-0 (love)" is p4. However, there are two ways in which the score can become 15-15. For example, player A could lose the first point and win the next point, or win the first point and win the next point. It is left to the reader to check that there are 3 different ways in which the score can become 30-15 in A's favour, and 4 different ways in which the score can become 40-15 in A's favour. This gives us the second row in Table 1 (and by symmetry the second column for player B). For A to win game-15, he needs to win the next point…." [11].

3. Mathematical modeling process in the classroom

In this section we present the process of mathematical modelling done together with sixteen gifted grammar school students, already introduced to some probability theory. First, we formulate the real problem as a question:

What is the probability that Djoković wins a game against Federer?

Let us describe the whole process of transition from the real problem stage to the mathematical model that is happening with our students. At the beginning, the students were rather satisfied with the possibility to discuss about the match between Djoković and Federer, since they already knew the result of the match, and they were very proud about it. But, they were also very surprised that we suggested them to apply mathematics to some tennis match, to use a method very different from usual statistical analysis, such as shown in the live commentary in [12]:

We explained that the statistics was not necessary for our work this time. Several students remarked that it was not a simple task, and they suggested to go to the upper mentioned site and analyze more precisely the match under consideration.

Then, they mentioned several components that could influence the results of the mach. Further on, the students were very active in their conversation about chances, the possibilities, the probabilities for Djoković to be the winner. In these discussions they recalled some of their mathematical knowledge about the notion of *probability*, its properties, and so on.

In this class there is a girl, Marija, who is volleyball player. She was the most active student during the modelling session and got excellent mark for her work.

Firstly, she mentioned that mathematical model cannot be done without a lot of unknown propositions that are happening during the match, such as: weather conditions, health and feeling condition of both players, and many others.

We omitted all these factors, because they cannot be expressed mathematically, but the students claimed that there are infinitely many possibilities because of the “deuce”. Then we suggested to analyze the development of the match between Djoković and Federer, before deuce.

Secondly, Marija remarked that the first two games were won by Federer, and as it is known the tennis players alternate in serving. In order to simplify this model the teacher suggested skipping the advantage of servers.

Next, we asked students to draw the graph of the first game and to calculate the probability p of Federer wining this game. They made calculations shown on the blackboard (Figure 4). At the beginning they assumed that $p = 1/2$ for each player winning the point, and they got results $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ for Federer. After that we suggested that they denote by p the probability for Djoković to win the point and they calculated it correctly (Figure 4.).

After this first attempt the students were interested in continuing the mathematical modelling process, because they figured out all the possibilities that could have happened before the deuce and almost all of them drew the correct graph in their notebooks (Figures 5 and 6). It is important to note that the students used kind of Markov chain of Tennis game, presented in Figure 2, without knowing it. They started from one side (when Federer won the game after 40:0, and fulfilled the rest of the Markov chain. Of course we did not mentioned the notion of *Markov chains*, we called it a *graph*, but we used it to calculate the number of ways for obtaining a specific score (paths in the graph leading to a specific vertex), for example 40:15, 40:30.

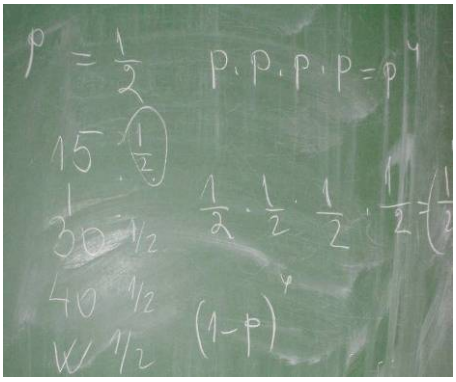


Figure 4. The work of students on the board

Figure 5. The work of students in notebook

Marija, (Figure 7.) was discussing with other students about the graph (in fact a Markov chain) and the possibility and probability for both players to reach specific scores. In that manner, she decided to count the different ways for reaching each score. In order to collect her results, and to visualise them properly, we suggested the form of the table, similar to the table in Figure 3. done in the paper [11]. She fulfilled it successfully (Figure 8. on the right).

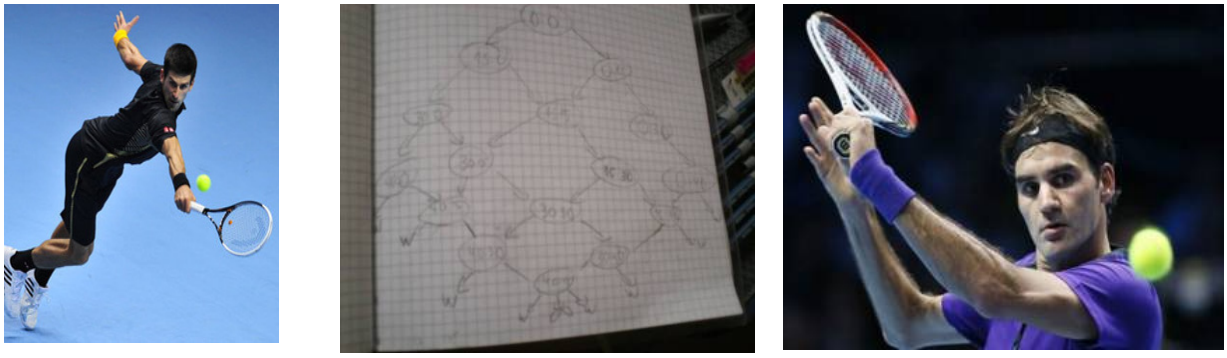


Figure 6. The Graph of the match between Djokovic and Federer

Maria and almost all other students remarked the symmetry in the number of ways to reach some results, for example 15:40 and 40:15. In considering the number of ways (3) to reach 15:30 and 30:15, they recognized that 3=2+1. Further on, they checked this fact with scores 30:30, and all others, and they filled the table rather quickly. When they came to “deuce” score, they wanted to continue with filling the table, but they were confused with the further notation. We suggested them to do it similar as it was presented in Table 3.

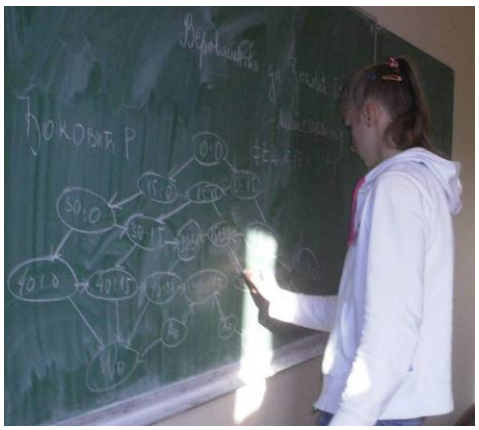


Figure 7. Marija is drawing a graph

Figure 8. Vlada is considering Pascal triangle

When we finished the table similar to Table 3, the student Vlada (Figure 8.) recognized that he already met and worked on a similar table, such that each numbers is the sum of corresponding numbers in previous row. Other students helped him with the name, “Pascal triangle”, and he drew it on the blackboard. At that moment the students were really lucky, to connect the tennis game with the “Pascal triangle”. Further on, we went to the probability. Now the job was rather easy (p is the probability that Djoković wins a point):

- In the first game, at the score 40-0, Federer wins the next point (and thus won the first game). The probability for this score is $(1-p)^4$.
- The probability that Djoković wins the next point after 40-15 is $4p^4(1-p)$.
- The probability that Djoković wins the next point after 40-30 is $10p^4(1-p)^2$.
- The total probability that Djokovic wins the game is $p^4+4p^4(1-p)+10p^4(1-p)^2=p^4(1+4(1-p)+10(1-p)^2$.
- The probability that Djoković wins the next point after the first “deuce” is $p^4+4p^4(1-p)+10p^4(1-p)^2+20p^5(1-p)^3$
- and after the next several “deuces” is $p^4+4p^4(1-p)+10p^4(1-p)^2+20p^5(1-p)^3+40p^6(1-p)^4+80p^7q^5+.....$

At this moment we stopped the calculations and the students were satisfied, because they got a mathematical formula showing that they were right at the beginning of the lecture, when they proposed that there are infinitely many possibilities for wining, if “deuce” occurs.

Let us note that we finished the whole mathematical modelling process for 45 minutes. Our high school students are gifted students, but they were not introduced to the notion of *limits*, or to the sum of finite numbers of terms of geometric series. We shall work on it next year, and of course we shall repeat this mathematical model of a tennis game.

This year it was an introduction to combinatorics, which is our curriculum for the end of the first semester. The students recognized that it can be connected with combinatorics and were very satisfied that it could be integrated with something they had deep interest in.

Acknowledgment: We thank the Provincial Secretariat for Science and Technological Development of Autonomna Pokrajina Vojvodina, Republic of Serbia, for the financial support making our participation in the Fibonacci project [13] possible.

References

1. Blum W., Galbraith P., Henn H. W., Niss M. (eds), (2007) *Modeling and applications in Mathematics Education*. New York: Springer.
2. Barnett, J., T. (2006) *Mathematical Modelling in Hierarchical Games with Specific Reference to Tennis*, a thesis submitted for the Degree of Doctor of philosophy At Swinburne university.
3. Doerr, H., English, L. (2003) A modeling perspective on students’ mathematical reasoning. about data, *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136.
4. Goos, M. (1998). *Technology as a tool for transforming mathematical tasks*, In P. Galbraith, W. Blum, G. Booker & I.D. Huntley (eds), *Mathematical Modeling, Teaching and Assessment in a Technology-Rich World* (pp. 103-113). Chichester: Horwood Publishing.
5. Kaiser, G., Schwarz, B. (2006) Mathematical modeling as bridge between school and university*, ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 38 (2),* 196-208*.*
6. Lamon, S. J., Parker, W. A., & Houston, S. K. (eds) (2003). *Mathematical modeling: A way of life*. ICTMA11. Chichester, UK: Horwood Publishing.
7. Noubary R. (2011) *Teaching Mathematics and Statistics Using Tennis*, pp. 227-240, Mathematics and Sport.
8. Stillman, G., Brown, J. (2007). *Challenges in formulating an extended modeling task at Year 9*. In H. Reeves, K. Milton, & T. Spencer (eds., Proc. 21. Conf. Austr. Assoc. Math. Teachers. Adelaide: AAMT.
9. Takači Dj., Budinski, N. (2011) Learning and teaching mathematics through real life models, *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 18(1), 33-38.
10. Takači Dj., Takači A., Budinski, N. (2010). On Visualisation Problems by Using the "GeoGebra" and "Scientific WorkPlace", *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 17(4), 191-196.
11. de Villiers, M. (2001) *Game, Math, and Luck!,* Pythagoras, No. 53, pp. 14-17.
12. Apicella,. L. (2012) *ATP World Tour final - Novak Djokovic 7-6(6) 7-5 Roger Federer - as it happened,* http://www.sportsmole.co.uk/tennis/atp-world-tour-finals/live-commentary/live-commentary-atp-world-tour-final-novak-djokovic-7-66-7-5-roger-federer-as-it-happened_54388.html (20.02.2013)
13. Baptist, P., D. Raab (eds.) (2012) *Implementing Inquiry in Mathematics Education*, Bayreuth, ISBN 978-3-00-040752-9

Periodic Process Modeling via sin *x*

Georgi Dimkov, Dessislava Dimkova
gdimkov@math.bas.bg, ddimkova@gmail.com
Institute of Mathematics and Informatics – Bulgarian Academy of Sciences

Abstract

Trigonometric functions and, in particular, the $\sin x$ *function are largely used for studying, analyzing and visualizing different facts and effects. They could be of both, natural origin or as a result of human activities. Some examples of natural effects that include the usage of the* $\sin x$ *function include (and are not limited to): light spreading and electromagnetic waves, working with spring mechanisms, pendulum-based mechanisms etc. Using GeoGebra gives us the possibility to thoroughly study and analyze the characteristics and functions related to these processes, thus the possibility to deeply dive into the subject of understanding and applying trigonometric functions [1].*

The presented article can be used for out-of-class activities in mathematics, after the respective course related to trigonometric functions has already been run and the concept of angles with measure ranging from + to – infinity has been introduced.

Key words

Inquiry-based learning, Project Fibonacci, Dynamic Software, $\sin x$

1. Period and Frequency

Looking at a moving pendulum, we can state that its movement is performed with a variable velocity. The motion is shown in Fig. 1. If we stop the pendulum in its rightmost position, its velocity equals zero. Leaving the pendulum running from there, due to Earth gravitational forces, its velocity increases until the point of equilibrium is reached. Once there, the pendulum velocity starts decreasing, again due to the Earth gravitational forces. Its velocity equals again zero in its leftmost position. Given that there is no outside interaction with the object, the pendulum will perform the same movement from the left to the right limit, however, in the opposite direction.

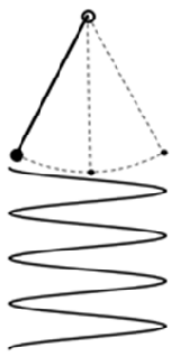


Fig. 1.

Let us remind that the time needed for the pendulum to perform one full oscillation, i.e. to move through the way described, only depends on its length. This time is called *pendulum period*. This is the period of its velocity variation.

Let us compare the velocity variation for the pendulum movement with the behaviour of the function $f(x)=\sin x$ for $x\in[0,2\pi]$. It starts with $\sin 0=0$. The values increase to $\sin\frac{\pi}{2}=1$ and decrease to $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$ going through $\sin\pi=0$; then, again increase to $\sin 2\pi=0$.

The similarity between the two processes suggests using the sinusoid in order to describe the pendulum velocity variation. We cannot expect that the period of our pendulum is exactly 2π. Since this period is exactly defined and unvariable in each specific case, we need to find a way to change the period of the function $f(x)=\sin x$.

What do we need to change in the function $f(x)=\sin x$ in order to obtain a function for which the period is greater or lower than 2π? Let us multiply the independent x variable with the positive number k and observe the function: $g(x)=\sin kx$.

- What is the period of the function $g(x)=\sin kx$ compared to the period of the function $f(x)=\sin x$?
- Draw the graph of the function $\sin x$. Create a slider $k\in[0,5]$ with a step (granularity) of 1. Draw the graph of the function $\sin kx$.

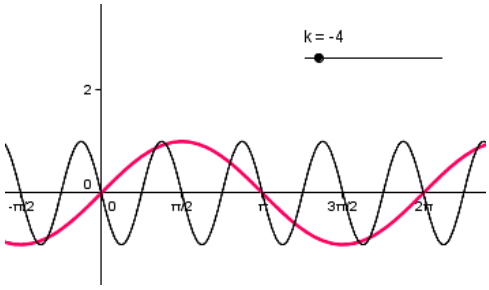


Fig. 2

- Examine the graphs for the intervals (0, 1) and (1, 5). What did you observe?
- Derive the formula for the period of the function $\sin kx$ for $k>0$.
- Perform the same analysis and draw conclusions for the negative values of *k*.
- How should we change the formula so that it is still valid for the negative parameter?
- Write down the respective conclusions.

In the real-world scenarios, in physics, techniques and electrical engineering the *k* coefficient is called *oscillation frequency* and is denoted by ω. It is closely related to the characteristics of many periodic phenomena and processes. Its unit of measure is called Hertz and is denoted by Hz; it has the format of 1/sec and it denotes the number of process cycles per second.

Some examples:

- **angle speed** or **angle frequency** – for rotating mechanisms – It is the unit of measure for the velocity obtained during rotation
- **sound frequency** – the number of vibrations per second (e.g. between 16 and 25,000 Hz), particularly for ultrasound (> 25,000 Hz) or infrasound (<16 Hz)
- **electromagnetic wave frequency** – part of them are visible: infrared, ultraviolet, roentgen and gamma waves; electric and magnetic field vibrations spreading through the space.

2. Amplitude

Let us take a look at the pendulum movement itself. It is performed over an arc that is part of a circumference. The projection of this is a segment whose center is corresponding to the point of equilibrium. Let us denote the segment's length by 2*a*. If we look upon the segment's center as on the starting point, i.e. point 0, the projection varies from $-a$ to $+a$. This process is performed periodically without any variations, unless external forces are applied. Let us make a parallel to the second characteristics described for the $f(x)=\sin x$ function. Again, we bump on certain

similarities that lead us to using this function. Since we cannot expect $a = 1$ every time, we shall change its initial presentation.

Let us create a new function $g(x) = a \sin x,\ a \neq 0$.

The new coefficient that is frequently a parameter in a modeling is called *amplitude* and is usually denoted by *A*.

In the practice it happens frequently to observe and describe periodic processes, for which the amplitude is not a constant but is a function of the variable *x* instead.

- Draw sample graphs for the function $f(x) = a \sin x$ by replacing the constant *a* with a linear function (Fig. 3), a quadratic function (Fig. 4) or a trigonometric function (Fig. 5)

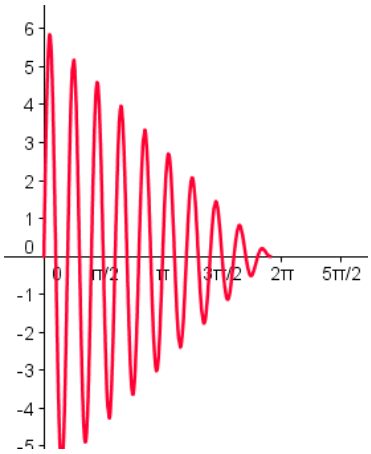


Fig. 3

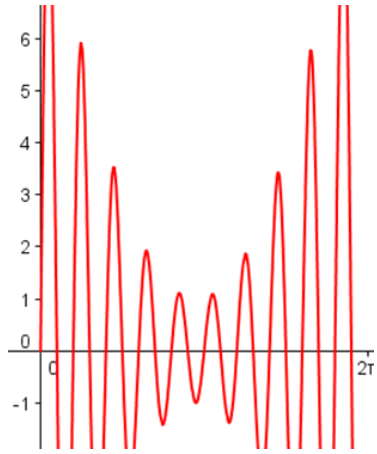


Fig. 4

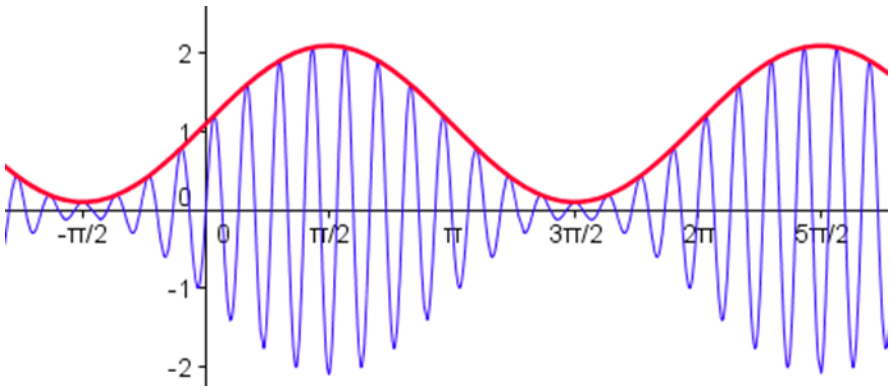
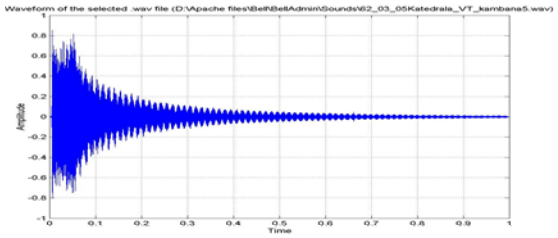


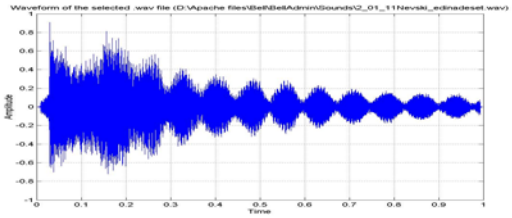
Fig. 5

In the last example the way of transmitting information through radio broadcasting is shown, specifically in the 10^6-10^7 Hz range. The sound pitch, its frequency generated by the loudspeaker, corresponds to the sinusoid's period, created by the amplitude's peaks of the radio carrier wave. This approach is called *amplitude modulation*.

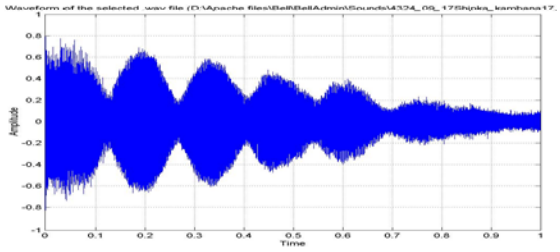
Examples of amplitude modulation that can be observed under other circumstances are shown in the graphs below (Fig. 6). They describe the amplitude variation – the sound intensity – for church bells. The graphs were obtained by means of specialized acoustic devices, used during the development of the "Bells" project [2].



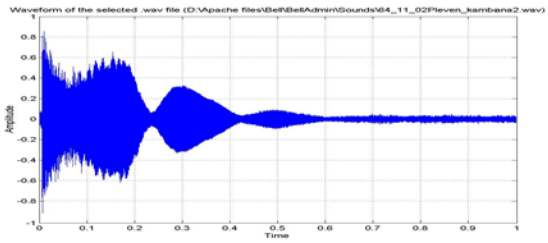
Sveto Rozhdestvo Bogorodichno
Church in Veliko Tarnovo



St. Alexander Nevski
Church in Sofia



Sveto Rozhdestvo Christovo
Church Shipka



St. Nicholas
Church in Pleven

Fig. 6. The amplitude variation for bells of different churches

3. Phase Angles – Phase of Delay and Phase of Advance

Consider an electric power generator connected to the electric power transmission network. We apply alternative current. It switches 50/60 times per second. Similar to the pendulum, the variation is achieved following the sinusoid rules – from zero to the maximum positive value, then back, again reaching zero until the minimum negative value is reached and again up until zero is reached. Now, in the same circuit a second electric power generator producing the same frequency is connected,. The current generated follows the same rules as the ones described above. However, the following question arises: do both zero points in time overlap? If so, that would be a happy coincidence. In most cases, however, both zero points in time do not match. If we describe that with two sinusoids (Fig. 6), one of them starts from point (0, 0) and the second one: from a different point from the segment [-1; 1] on the Y-axis. The functions that describe these events and their graphs are the following (Fig. 7):

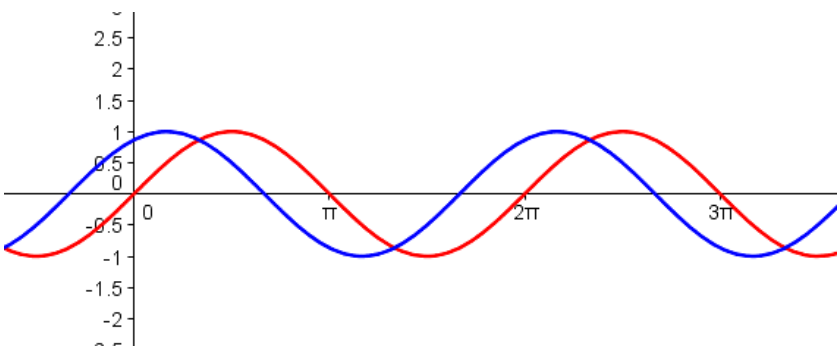


Fig. 7 The graphs of $f_1(x) = \sin x$, (the red one) and $f_2(x) = \sin(x + a)$ (the blue one)

The quantity *a* is called *phase difference* or *phase offset*, or sometimes just *phase*. It could vary in the interval $[0, 2\pi]$. In electricity supply it is limited to very small tolerances. Otherwise, serious issues in the electric power network may occur.

- Draw the graphs of the following functions: $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin(x + a)$ $a \in [0, 2\pi]$.
- Draw the graph of the function $f_1(x) + f_2(x)$ and perform an analysis for different values of *a*.

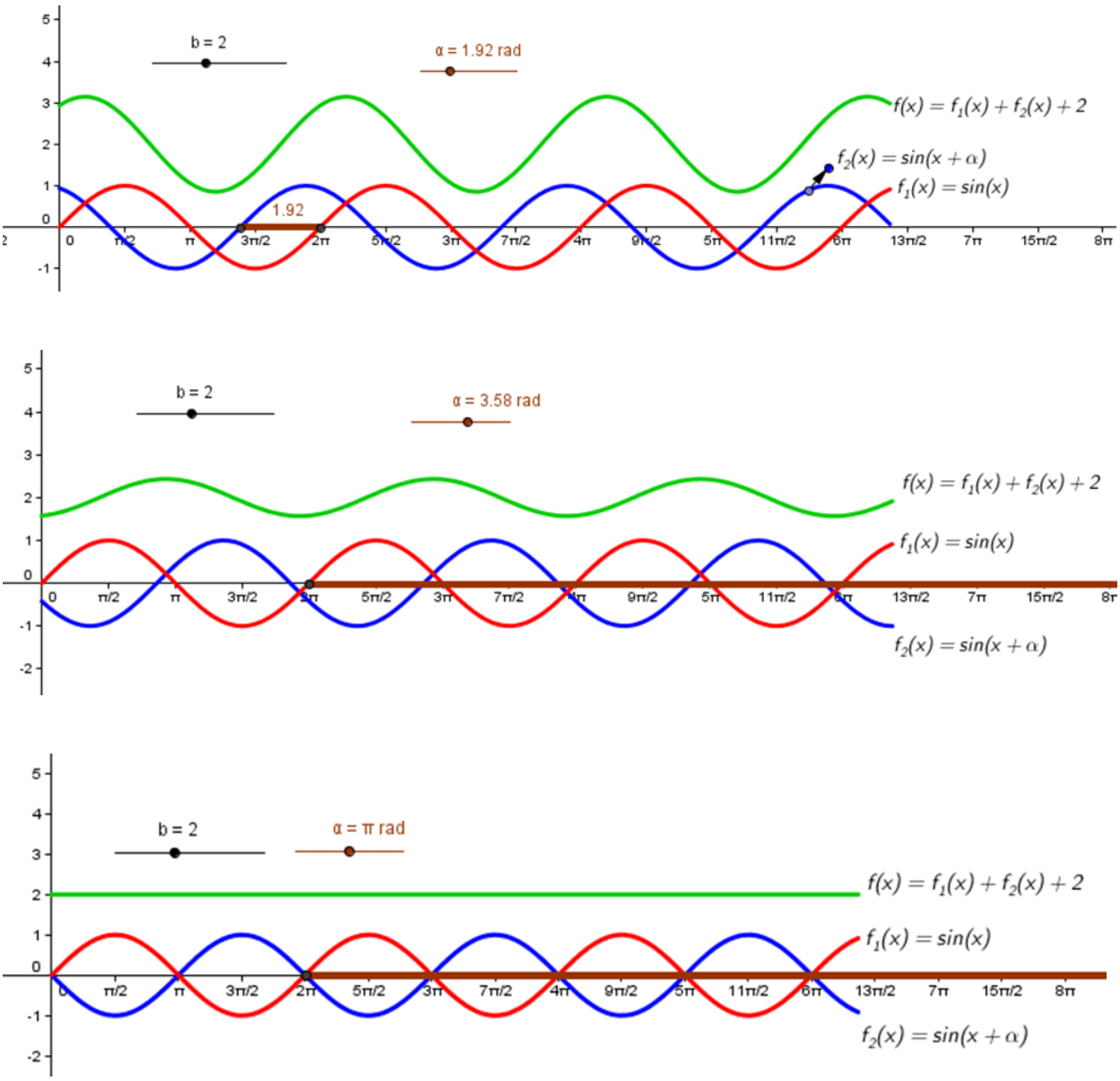


Fig. 8. Overlapping the electric power from sources with different phase difference

The three graphs above (Fig. 8), created with GeoGebra, are describing the result of overlapping (super positioning) of the electrical power from power sources with different phase difference.

4. General conclusion

We made some additions to the function $f(x)=\sin x$. Once we join them, we will obtain the following function: $f(x)=a\sin(kx+\alpha)$. However, the parameters we introduced may be called differently in real-world-scenarios. In most cases, the function is given the following form:

$$f(x)=A\sin(\omega x+\alpha),$$

where each of the parameters has a value determined according to the respective case.

References

1. *Тригонометрични функции на обобщен ъгъл (Trigonometric functions of a general angle)*, http://www.math.bas.bg/omi/docs/Trigonometry_BG/Trigonometry2.html, Last visited: February 22, 2013.
2. *Project BELL: Research and Identification of Valuable Bells of the Historic and Culture Heritage of Bulgaria and Development of Audio and Video Archive with Advanced Technologies*, http://www.math.bas.bg/bells/belleng.html, Last visited: February 22, 2013.

When Imagination Needs Some Help

Iordanka Gortcheva
gorcheva@math.bas.bg
Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences

Abstract

The well-known problem about the snail heading for the top of a well by creeping 2 meters up in daytime and slipping 1 meter down at night caused a lot of troubles to a group of future primary school teachers I worked with. The same happened to a group of second-grade schoolchildren. Both groups, however, demonstrated genuine interest to the problem and high determination to crack it. To support the students whose imagination needed some help, as well as to create a tool for exploration, I made dynamic geometry worksheets for the Snail problem. They not only allow the students to easily change the numerical data, but to reverse the direction of motion as well. For example, this is the case when the snail is up on a tree and intends to reach the ground. Experience gained from the dynamic worksheets let the students continue with a seemingly different problem about two pirates dividing a treasure found on the bottom of the sea. Discovering the analogy between the Snail problem and the Pirates' one brings excitement in the classroom. The existence of multiple solutions puts the students on the path of inquiry-based learning thoroughly discussed in [1].

Key words

Snail problem, Pirates' problem, Open-ended problems, Dynamic geometry, Inquiry-based learning

1. Introduction

Building mathematical literacy starts in childhood. It is a process that takes years and is not performed singly in a classroom. Solving number puzzles like sudoko and kakuro ([2]), playing chess or cards, practicing sports and even shopping are among the many activities which develop combinatorial thinking, counting skills, and number sense. Family and society have their fair share in raising a mathematically literate generation as well. It just happens that elderly people give children witty mathematical problems they have learned in their childhood. To solve such problems, complicated arithmetic operations are not needed, but attention, imagination, logical thinking, and common sense. Folklore mathematical problems like these in [3] train students to have a quick mind, focus on details, and think outside the box. As a result, young people become creative, imaginative, and resourceful – qualities all mathematics teachers desire to be present in their classes.

2. The Snail problem

In the frame of a research I performed on how pre-service primary school teachers interpret and solve story-problems ([4], [5]) I found that applying mathematical knowledge in context was hard for many of the participants. However, if a problem was intriguing, the students did not hesitate to delve into it and come up with a solution. Here is an example of a simple, yet difficult story-problem that grasped their attention. Although well-known to the public and in the Internet, it was not familiar to the students. They worked hard to make its formulation mathematically precise:

Problem 1. *On a hot summer night in late June, the Tiny Snail found itself at the bottom of a 10-meter well. At dawn of July 1st it began its journey up. Every day it crawled* ***2 meters up*** *and every night it slid* ***1 meter down****. On which date did the Tiny Snail* ***reach the top*** *of the well?*

Lately I had the opportunity to share the Snail problem with second-grade schoolchildren. They happily took the adventure to work on a problem not included in their textbooks. Surprisingly, one of the students raised his hand asking to speak and said that "*story-problems develop brain and it's good to have such ones*". Even if these words quoted a parent's or a grandparent's opinion, they brought additional enthusiasm in the classroom. Schoolchildren's problem solving was not smooth either. But both young and adult students showed genuine interest in the problem and high determination to crack it, perceiving their errors with the stance to think about the problem again until they truly understand it.

3. Students' results and what they have led to

For their twelve years at school, undergraduate students have already been trained to write their mathematical reasoning. They managed to report their solutions on paper together with graphic or table representations and intermediate stages as well. Their results can be characterized as successful (***Fig. 1***), erroneous but corrected (***Fig. 2***), and showing total helplessness (***Fig. 3***):

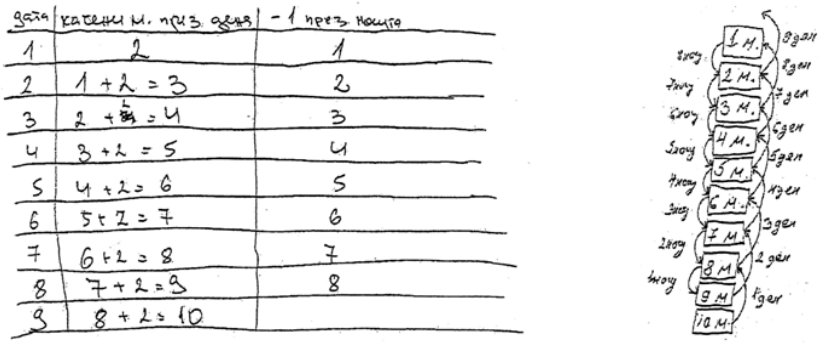


Fig. 1. *Successful solutions to the Snail problem by two undergraduate students*

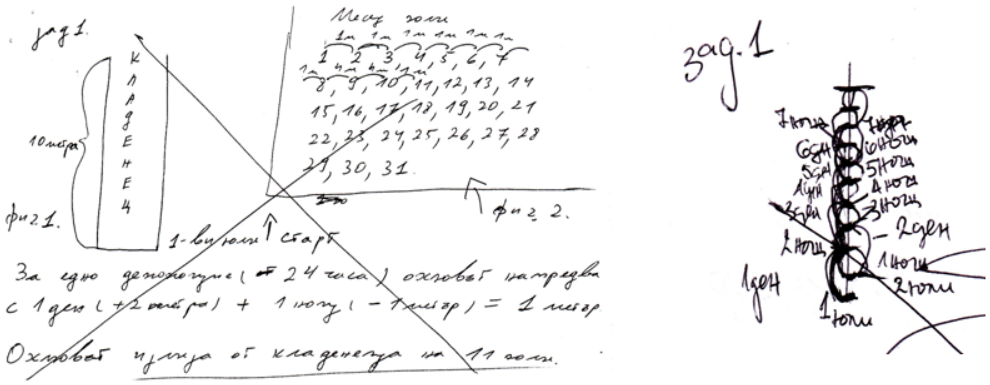


Fig. 2. *Undergraduate students' solutions, crossed out by their authors to correct them*

Analysis of the unsuccessful solutions revealed the prevalent way of reasoning. Since in the daytime the snail crawled 2 meters up and at night slipped 1 meter down, it progressed 1 meter upwards per day. Therefore, to crawl a height of 10 meters it would need 10 days. Counting 10 days from July 1st on led these students to the date of July 11th. Later they realized that on July 1st the snail had reached a height of 2 meters above the bottom, on July 2nd – 3, on July 3rd – 4 meters, etc. Exploring the pattern helped them come up with the right conclusion that the snail had fully climbed the 10-meter well on July (10 – 1)th.

From the papers presented I inferred that finding the right pattern was not the only obstacle the students faced. Many of them were lost in keeping track of their calculations. Therefore, both

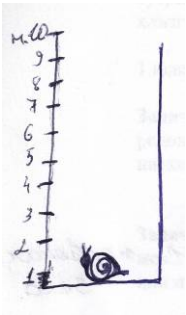


Fig. 3. *No solution, only a picture presented*

students' imagination and calculations needed some help. This motivated me to create dynamic geometry worksheets complementary to the Snail problem. For the purpose I used GeoGebra[1] dynamic geometry sofware (DGS) as it possesses the desired features to combine algebra and geometry and is free for non-commercial users.

Before investing time and efforts in such an activity it is worth asking if a popular amusement problem like this deserves it. According to Pollak ([6]), primary school is the right place to introduce children to the ideas of mathematical modelling. My direct experience showed that due to innate children's curiosity, providing dynamic geometry worksheets in class was like putting pen to paper: they immediately came into use, both for serious work and play.

4. Mathematical modeling of the Snail problem through DGS

To enable the students to simulate the snail motion by altering numerical data, from GeoGebra user's tools I have picked up a set of sliders. Notations are, as follows: *a* – the distance the snail climbed up in daytime, *b* – the distance the snail slipped down during the night, *t* – the depth of the well (all these in meters), *d* – the day of climbing. The algorithm I have implemented in the worksheet allows to calculate the height reached by the snail at the end of each day. This height and the corresponding day (which coincides with the current date of July) are shown by black dots which rise vertically when *d* increases (***Fig. 4, a-e***). When the snail reaches the top of the well, the two dots change their color to red. The heights the snail has reached at the end of each day during its journey up are shown in the leftmost column of dots. They mark the basic stages of its motion. The teacher can decide to hide them temporarily and ask the students to draw them on their own.

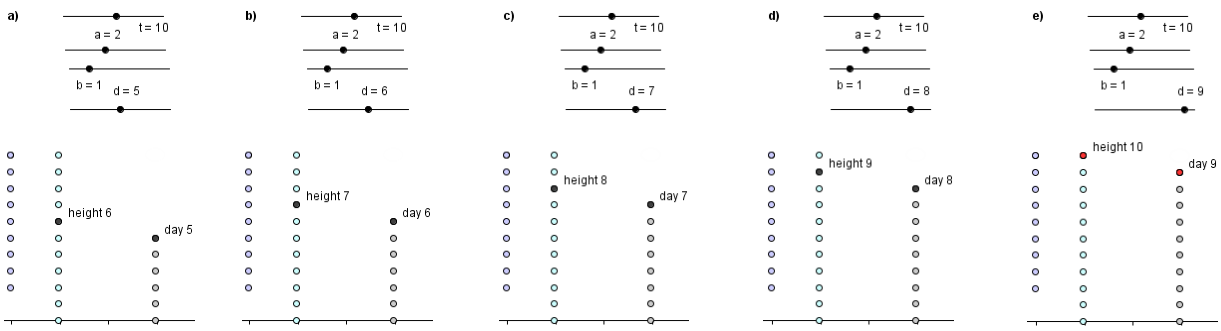


Fig. 4. *A snail climbing in a 10-meter well* ($t = 10$) *2 meters up daily* ($a = 2$) *and slipping 1 meter down at night* ($b = 1$) *several successive days before reaching the edge:* ***a)*** *Day 5: height 6 (meters);* ***b)*** *Day 6: height 7;* ***c)*** *Day 7: height 8;* ***d)*** *Day 8: height 9;* ***e) Day 9: height 10****; since this is the day when the snail reaches the top of the well, the two dots become red.*

For the students who were unsure how to approach the problem (c.f. ***Fig. 3***), it makes sense to apply Polya's tip given in [7]: "*If there is a problem you can't solve, then there is an easier problem you can solve: find it*." The series of particular cases shown in ***Fig. 5*** proved useful.

Experimenting with the worksheet and guided by me, the schoolchildren soon started looking at this situation from a new perspective: "*Why does the snail need to climb up? During a summer walk in the park one can see so many snails hiding from the heat in the tree crowns. If it starts raining, they will probably need to reach the ground.*" Thus the idea to put the new situation into a new problems was born and even two problems came to life:

Problem 2. *On a hot summer night in late June, the Tiny Snail found itself in the crown of a 10-meter tree. At dawn of July 1st it began its journey down and every day crawled* ***2 meters down****.*

*However, scared of the dark, every night it climbed **1 meter up**. On which date did the Tiny Snail reach the ground?*

Problem 3. *On a hot summer night in late June, the Tiny Snail found itself in the crown of a 10-meter tree. At dawn of July 1st it began its journey down. Every day the snail crawled **2 meters down** and every night it slipped **50 centimeters down**. On which date did it reach the ground?*

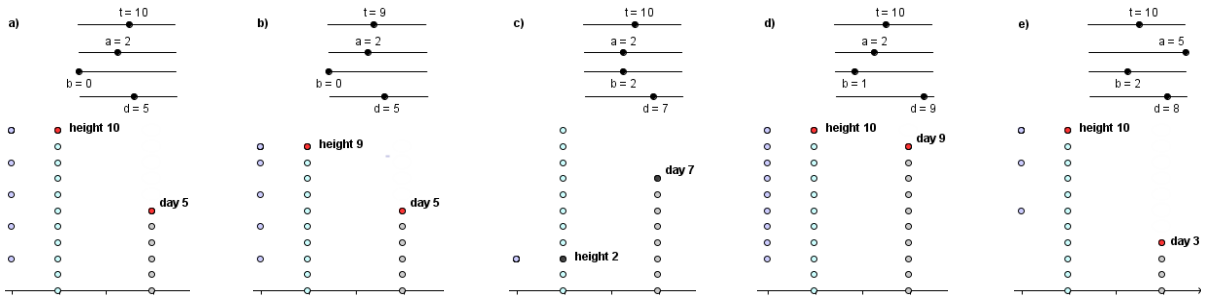


***Fig. 5. a)** A snail climbing in a 10-meter well 2 meters up daily and not slipping down at night; **b)** The same in a 9-meter well; **c)** A snail climbing 2 meters up daily and slipping 2 meters down at night cannot exceed a 2-meter height; **d)** Solution to **Problem 1**; **e)** A snail climbing 5 meters up daily and slipping 2 meters down at night, reaches the top of the well on day 3, July 3.*

5. Transforming a traditional story problem through open-ended questions

Although numerous versions of the Snail problem exist in the books and the Internet, some intriguing features of the snail motion still remain unaccounted for. To reveal them to the students, I have used some open-ended questions:

Problem 4. *At dawn of a summer day the Tiny Snail found itself 10 meters above the ground, attached to the stem of a tree. It began crawling in a strange manner: **1 meter up** in day-time and **2 meters down** at night, until it reached the ground.*

- *What was the distance between the highest and the lowest point on the tree the snail had reached?*
- *How many meters did the snail travel from the very beginning of its journey to its end?*
- *During that journey, how many times was the snail 5 meters above the ground?*

The first question not only introduces the concept of maximum and minimum, but also requires students to perform operations with specific extremum values. The second question can be used by the teachers to discuss continuity of motion, as well as the units of measurement used to quantitatively characterize length. The third one summarizes students' observations from the dynamic geometry worksheets and gears up for the idea of multiple solutions (***Fig. 6***):

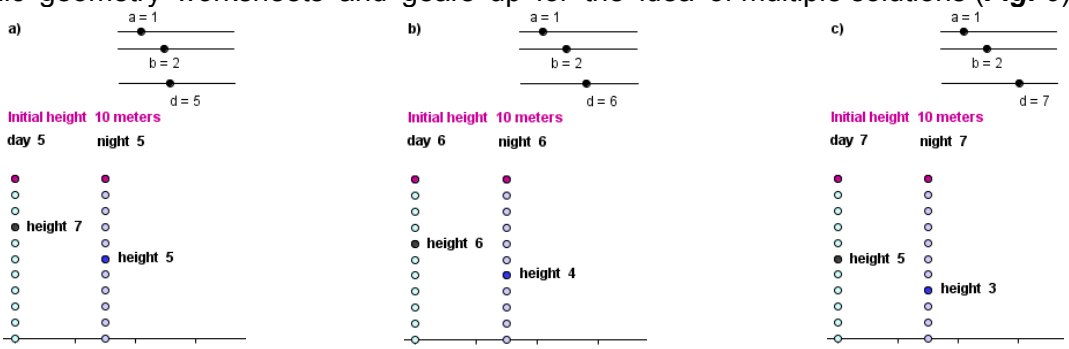


***Fig. 6.** The snail that crawled 1 meter up daily and 2 meters down at night, had been 5-meter heigh above the ground **3 times**: **a)** at the the end of the 5th night; **b)** at some moment during the 6th night; and **c)** at the end of the 7th day.*

6. The Pirates' problem

Among the many fascinating pieces of advice by Polya is the following one, given in [7]: "*Look around when you have got your first mushroom or made your first discovery: they grow in clusters*." For the students I had worked with I composed a problem where the idea of multiple solutions is not so evident. However, attentive readers would be able to discern the hint given through the problem question, especially after the experience gained from the *Snail problem 4*:

Problem 5. *Two pirates named Broken Tooth and Mean Look had found a gold treasure in the sea. While Broken Tooth was diving to pull out the chests from the bottom, one at a time, Mean Look stayed on board to keep an eye on them. When the number of chests on the deck reached 10 and Broken Tooth dived for the next one, Mean Look stole two. This was repeated several times: as soon as Broken Tooth hauled one new chest on board, Mean Look stole 2. However, at one point the hard-working diver noticed that just 5 chests were present on the deck. Then not only did he accuse Mean Look of theft, but also demanded for himself all chests his deceitful partner might have stolen. How many chests of gold could Broken Tooth claim?*

In its essence *Problem 5* is very similar to *Problem 4*, but with a new twist given by the pirates' plot and characters. Its formulation excited the schoolchildren, especially after my humorous note how two pirates evenly share a prey: one divides it into halves, the other chooses his half. Such speculations helped children put themselves in *Broken Tooth's* shoes: the two solutions of *Problem 5* (***Fig. 7***) would let *Broken Tooth* to dispense justice, demanding *12 chests* for himself.

While in *Snail problem 4* lengths of continuous objects like segments are to be found, all quantities in *Pirates' problem* are discrete and need to be counted. Discussing such details is an opportunity to ask students to give other examples of continuous and discrete objects, perform measurements, or suggest their own open-ended problems. Since children love novelties, a topic like that enriches their fundamental and practical knowledge and attracts them to mathematics and science. As they love stories as well, involving story-problems can dispel their mathematical anxiety and turn the learning of mathematical concepts into a great inquiry.

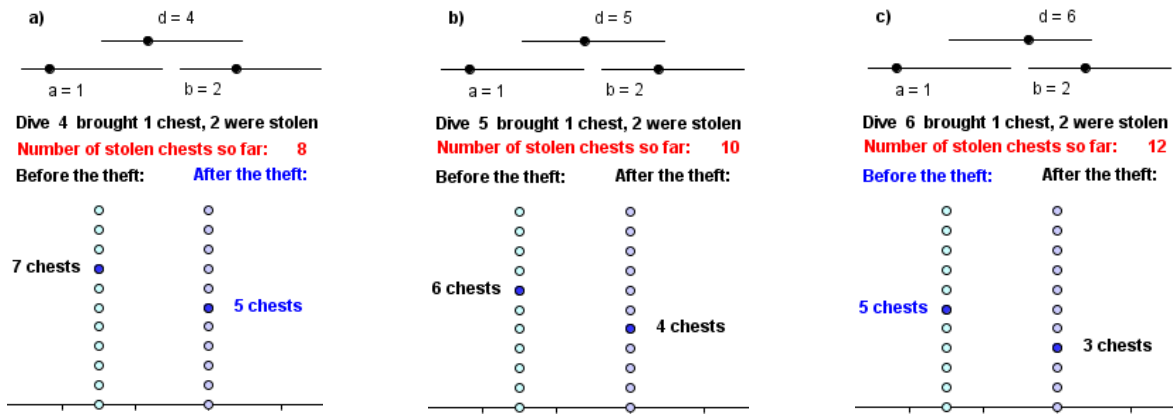


Fig. 7. *There were **two** moments when 5 chests of gold had been present on the deck: **a)** after the theft followed the fourth dive and **c)** after the sixth dive and before the theft. Since either 8 or 12 chests of gold might have been stolen, it is in Broken Tooth's interest to claim **12** chests.*

7. Concluding remarks

All reflections on the problems discussed, both from the undergraduate and primary school students, were full of admiration. The second graders' perceptions (***Fig. 8***) provide evidence that modern young people still need amusing problems as a bridge for transferring knowledge, experience, and values from preceding generations to theirs. Such feedback is a desirable

corrective to inquiry-based learning. It should be studied regularly so that the teachers can be fully aware if all their students actively participate in the process.

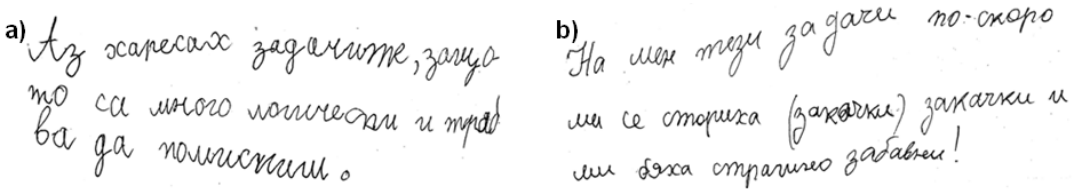


Fig. 8. *Reflections of two primary schoolchildren's on the story problems discussed:* ***a)*** *"I liked the problems because they were very logical and make you think."; **b)** "These were not the usual math problems; rather, they were brain teasers which were a lot of fun."*

The open-ended questions naturally put the students on the path of inquiry-based learning, where the small pebbles of logical or mathematical obstacles lead them to new findings. Encouraging students to invent their own problems can be both an individual and a group assignment; it can be also a DGS-task: activities of the sort are highly proactive to young digital generation[2] and match its real educational needs.

Acknowledgements

I sincerely thank Prof. Zdravko Lalchev from the Faculty of Pre-school and Primary School Education at Sofia University St. Kliment Ohridski, as well as Mrs. Emilia Palamarkova and Mrs. Adriana Apostolova, primary school teachers in 119th School Acad. Michail Arnaudov in Sofia for the opportunity to work with their students.

References

1. Ulm, V. (ed.) *Inquiry-based mathematics education for gifted children in primary school.* Augsburg, Germany: University of Augsburg. 2011.
2. Gortcheva, I., Lalchev, Z. *Motivating activities in teaching mathematics to pre-service elementary school teachers*. In Avgerinos, E., & Gagatsis, A. (eds.). *Proceedings from the 5th Mediterranean Conference on Mathematics Education "Current Trends in Mathematics Education".* Athens, Greece: New Technologies Publications. 2007. pp. 459-465.
3. Ganchev, I., Chimev, K., & Stoyanov, J. *Mathematical folklore*. Sofia, Bulgaria: Narodna Mladezh State Publishing House.1987. (in Bulgarian)
4. Gortcheva, I. *Through narrative to mathematical concepts*. In: Shekutkovski, N. et al. (eds.). *Proceedings of IV congress of mathematicians of Republic of Macedonia*. Struga, Oct. 19-22 2008. Skopje: Association of the mathematicians of Republic of Macedonia. 2010. pp. 29-40.
5. Gortcheva, I. *Developing students' mathematical thinking and algorithmic culture in IT classes*. In: Totkov, G., & Koychev, I. (eds.). *Proceedings of V national conference "Education in information society"* May 31 - June 1 2012. Plovdiv, Bulgaria: Association "Development of information society". 2012. pp. 188-194.
6. Pollak, H. *Mathematical modeling: A conversation with Henry Pollak*. In: Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. & Niss, M. (eds.). *Modeling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. New York, NY: Springer. 2007.
7. Polya, G. *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press. 1945.

Notes

[1] *GeoGebra: Free mathematics software for learning and teaching*. http://www.geogebra.org, June 10, 2012.

[2] *A nation online: How Americans are expanding their use of the Internet*. Chapter 5: The digital generation: How young people have embraced computers and the Internet. February 2002. Washington, D.C. http://www.ntia.doc.gov/legacy/ntiahome/dn/html/toc.htm, June 10, 2012.

Съдържание

Съдържанието на книгата не отразява непременно възгледите на Европейската комисия и не включва никаква отговорност от нейна страна.

Никоя част от тази книга не може да бъде възпроизвеждана, съхранявана в информационна система или предавана в някаква форма чрез електронни или механични средства, чрез фотокопиране, микрофилми или друг тип запис без писменото съгласие на авторите.

ФИБОНАЧИ – РАЗПРОСТРАНЕНИЕ НА ИЗСЛЕДОВАТЕЛСКИЯ ПОДХОД ПРИ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА И ПРИРОДНИ НАУКИ В ЕВРОПА 2010-2013

Широко разпространение на изследователският подход при обучението по математика и природни науки в европейските училища.

http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/

Координатор на проекта за България: акад. Петър Кендеров