Резюмета на публикациите за участие в конкурса

1

Duzhin, Sergei, and Mikhail Shkolnikov. "Bipartite knots."
Fundamenta Mathematicae 225.1 (2014): 95-102.

We give a solution to a part of Problem 1.60 in Kirby's list of open problems in topology, thus answering in the positive the question raised in 1987 by J. Przytycki.

Дужин, Сергей, и Михаил Школников. "Двуделни възли."
Fundamenta Mathematicae 225.1 (2014): 95-102.

Представяме решение на част от Проблем 1.60 в списъка с нерешени задачи по топология на Кърби, като по този начин даваме положителен отговор на въпрос, поставен през 1987 г. от Й.. Пшитицки.

2

Duzhin, Sergei, and Mikhail Shkolnikov. "A formula for the HOMFLY polynomial of rational links."Arnold Mathematical Journal 1.4 (2015): 345-359.

We give an explicit formula for the HOMFLY polynomial of a rational link (in particular, knot) in terms of a special continued fraction for the rational number that defines the given link [after this work was accomplished, the authors learned about a paper by Nakabo (J. Knot Theory Ramif 11(4):565-574, 2002) where a similar result was proved. However, Nakabo's formula is different from ours, and his proof is longer and less clear].

Дужин, Сергей, и Михаил Школников. "Формула за полинома на HOMFLY за рационални сплитания."Arnold Mathematical Journal 1.4 (2015): 345-359.

Предлагаме явна формула за полинома на HOMFLY за произволно рационално сплитане (в частност, възел) в зависимост от специална верижна дроб за рационалното число, което определя даденото сплитане. (След завършване на тази работа, авторите откриха статия на Накабо [J. Knot Theory Ramif 11(4):565-574, 2002), в която е доказан подобен резултат. но с различна формула и с по-дълго доказателство.]

3

Kalinin, Nikita, and Mikhail Shkolnikov. "Sandpiles on the heptagonal tiling." Journal of Knot Theory and Its Ramifications 25.12 (2016).

We study perturbations of the maximal stable state in a sandpile model on the set of faces of the heptagonal tiling on the hyperbolic plane. An explicit description for relaxations of such states is given.

Калинин, Никита, и Михаил Школников. "Пясъчни купчини върху хептагонална мозайка."Journal of Knot Theory and Its Ramifications 25.12 (2016).

Изследваме смущения в максимално стабилното състояние в модел на пясъчна купчина върху множеството от седмоъгълници на хептагоналната мозайка в хиперболичната равнина. Дадено е явното описание на релаксацията на такива състояния.

4

Kalinin, N., Guzman-Saenz, A., Prieto, Y., Shkolnikov, M., Kalinina, V., and Lupercio, E. (2018). "Self-organized criticality and pattern emergence through the lens of tropical geometry."Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 115(35), E8135-E8142.

Tropical geometry, an established field in pure mathematics, is a place where string theory, mirror symmetry, computational algebra, auction theory, and so forth meet and influence one another. In this paper, we report on our discovery of a tropical model with self-organized criticality (SOC) behavior. Our model is continuous, in contrast to all known models of SOC, and is a certain scaling limit of the sandpile model, the first and archetypical model of SOC. We describe how our model is related to pattern formation and proportional growth phenomena and discuss the dichotomy between continuous and discrete models in several contexts. Our aim in this context is to present an idealized tropical toy model (cf. Turing reaction-diffusion model), requiring further investigation.

**Калинин, Н., Гусман-Саенц, А., Прието, Й., Школников, М., Калинина, В., и Луперсио, Е. (2018). "Самоорганизирана се критичност и възникване на модели през призмата на тропическата геометрия."
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 115(35), E8135-E8142.**

Тропическата геометрия, утвърдена област в чистата математика, е пресечна точка на струнната теория, огледална симетрия, изчислителната алгебра, теорията на аукционите и други области, които си взаимодействат. В тази статия представяме нов тропически модел с поведение на самоорганизирана критичност (т. нар. СОК-модел). За разлика от всички известни СОК-модели нашият модел е непрекъснат и представлява определена скалираща граница на пясъчния модел, който е първият и архетипен СОК-модел. Описваме връзката на нашия модел с формирането на модели и явления на пропорционален растеж и обсъждаме дихотомията между непрекъснати и дискретни модели в разнообразен контекст. Нашата цел тук е да представим идеализиран тропически игрален модел (вж. модела на реакция-дифузия на Тюринг), който изисква допълнително изследване.

5

Kalinin, Nikita, and Mikhail Shkolnikov. "Introduction to tropical series and wave dynamic on them."

Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A 38.6 (2018): 2827-2849.

The theory of tropical series, that we develop here, firstly appeared in the study of the growth of pluriharmonic functions. Motivated by waves in sandpile models we introduce a dynamic on the set of tropical series, and it is experimentally observed that this dynamic obeys a power law. So, this paper serves as a compilation of results we need for other articles and also introduces several objects interesting by themselves.

Калинин, Н., и Михаил Школников. "Въведение в тропическите редици и вълновата динамика върху тях."
Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A 38.6 (2018): 2827-2849.

Теорията на тропическите редици, която разработваме тук, първоначално възниква при изучаването на растежа на плурихармонични функции. Мотивирани от вълните в пясъчните модели, въвеждаме динамика върху множеството на тропическите редици, като експериментално наблюдаваме, че тази динамика следва степенен закон. Следователно, тази статия служи като компилация на резултатите, необходими за други статии, и също така въвежда няколко обекта, интересни сами по себе си.

6

Yakaboylu, Enderalp, Mikhail Shkolnikov, and Mikhail Lemeshko. "Quantum groups as hidden symmetries of quantum impurities."
Physical Review Letters 121.25 (2018): 255302.

We present an approach to interacting quantum many-body systems based on the notion of quantum groups, also known as q-deformed Lie algebras. In particular, we show that, if the symmetry of a free quantum particle corresponds to a Lie group G, in the presence of a many-body environment this particle can be described by a deformed group, G_q. Crucially, the single deformation parameter, q, contains all the information about the many-particle interactions in the system. We exemplify our approach by considering a quantum rotor interacting with a bath of bosons, and demonstrate that extracting the value of q from closed-form solutions in the perturbative regime allows one to predict the behavior of the system for arbitrary values of the impurity-bath coupling strength, in good agreement with nonperturbative calculations. Furthermore, the value of the deformation parameter allows one to predict at which coupling strengths rotor-bath interactions result in a formation of a stable quasiparticle. The approach based on quantum groups does not only allow for a drastic simplification of impurity problems, but also provides valuable insights into hidden symmetries of interacting many-particle systems.

Якабойлу, Ендералп, Михаил Школников и Михаил Лемешко. "Квантови групи като скрити симетрии на квантовите примеси."
Physical Review Letters 121.25 (2018): 255302.

Представяме подход към взаимодействието в квантовите системи от много тела, базиран на понятието за квантови групи, известни още като q-деформирани алгебри на Ли. В частност, показваме, че ако симетрията на свободна квантова частица съответства на група на Ли G, в присъствието на система от много тела тази частица може да бъде описана чрез деформирана група G_q. Ключовият момент е, че единственият параметър на деформация, q, съдържа цялата информация за взаимодействия в системата. Илюстрираме нашия подход, като разглеждаме квантов ротор, взаимодействащ с баня от бозони (Bosonic bath), и показваме, че стойността на q, получена от аналитични решения в пертурбативния режим, позволява да се предскаже поведението на системата при произволни стойности на силата на взаимодействие квантов примес-среда, в съгласие с непертурбативни изчисления. Освен това стойността на параметъра на деформация позволява да се предскаже при какви стойности на сдвояване взаимодействията между ротора и банята водят до образуването на стабилна квазичастица. Подходът, основан на квантови групи, не само значително опростява задачите с примеси, но и предоставя ценни сведения за скритите симетрии на взаимодействащи системи от много частици.

7

Kalinin, Nikita, and Mikhail Shkolnikov. "Tropical formulae for summation over a part of SL(2,Z)."European Journal of Mathematics 5.3 (2019): 909-928.

Let $f(a,b,c,d) = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} - \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, let (a,b,c,d) stand for $a,b,c,d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $ad-bc=1$. Define

$$F(s) = \sum_{(a,b,c,d)} f(a,b,c,d)^s.$$

In other words, we consider the sum of the powers of the triangle inequality defects for the lattice parallelograms (in the first quadrant) of area one. We prove that $F(s)$ converges when $s>1$ and diverges at $s=\frac{1}{2}$. We also prove that

$$\sum_{(a,b,c,d)} \frac{1}{(a+c)^2(b+d)^2(a+b+c+d)^2} = \frac{1}{3},$$

and show a general method to obtain such formulae. The method comes from the consideration of the tropical analogue of the caustic curves, whose moduli give a complete set of continuous invariants on the space of convex domains

Калинин, Никита, и Михаил Школников. "Тропически формули за сумиране върху част от SL(2,Z)."European Journal of Mathematics 5.3 (2019): 909-928.

Нека $f(a,b,c,d) = \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}-\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ и нека (a,b,c,d) означава $a,b,c,d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такива че $ad-bc=1$. Дефинираме

$$F(s) = \sum_{(a,b,c,d)} f(a,b,c,d)^s.$$

С други думи, разглеждаме сумата от степените на дефектите на неравенството на триъгълника за решетъчните успоредници (в първи квадрант) с лице единица. Доказваме, че $F(s)$ е сходяща за $s>1$ и разходяща при $s=\frac{1}{2}$. Също така доказваме, че

$$\sum_{(a,b,c,d)} \frac{1}{(a+c)^2(b+d)^2(a+b+c+d)^2} = \frac{1}{3},$$

и показваме общ метод за получаване на такива формули. Методът се основава на разглеждането на тропическия аналог на каустичните криви, чиито модули дават пълен набор от непрекъснати инварианти в пространството на изпъкналите области.

8

Lang, Moritz, and Mikhail Shkolnikov. "Harmonic dynamics of the abelian sandpile."Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 116.8 (2019): 2821-2830.

The abelian sandpile is a cellular automaton which serves as the archetypical model to study self-organized criticality, a phenomenon occurring in various biological, physical, and social processes. Its recurrent configurations form an abelian group, whose identity is a fractal composed of self-similar patches. Here, we analyze the evolution of the sandpile identity under harmonic fields of different orders. We show that this evolution corresponds to periodic cycles through the abelian group characterized by the smooth transformation and apparent conservation of the patches constituting the identity. The dynamics induced by second- and third-order harmonics resemble smooth stretchings and translations, respectively, while the ones induced by fourth-order harmonics resemble magnifications and rotations. Based on an extensive analysis of these sandpile dynamics on domains of different size, we conjecture the existence of several scaling limits for infinite domains. Furthermore, we show that the space of harmonic functions provides a set of universal coordinates identifying configurations between different domains, which directly implies that the sandpile group admits a natural renormalization. Finally, we show that the harmonic fields can be induced by simple Markov processes and that the corresponding stochastic dynamics show remarkable robustness. Our results suggest that harmonic fields might split the sandpile group into subsets showing different critical coefficients and that it might be possible to extend the fractal structure of the identity beyond the boundaries of its domain.

Ланг, Мориц, и Михаил Школников "Хармонична динамика на абелева пясъчна купчина."Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 116.8 (2019): 2821-2830.

Абелевата пясъчна купчина е клетъчен автомат, който служи като архетипен модел за изследване на саморганизиращата се критичност – явление, възникващо в различни биологични, физични и социални процеси. Неговите рекурентни конфигурации образуват абелева група, чиято неутрална конфигурация представлява фрактал, съставен от самоподобни участъци. Тук анализираме еволюцията на неутралната конфигурация на пясъчната купчина под действието на хармонични полета от различен ред. Показваме, че тази еволюция съответства на периодични цикли в абелевата група, характеризирани от плавни трансформации и привидно запазване на участъците, съставящи неутралната конфигурация. Динамиката, предизвикана от хармоници от втори и трети ред, наподобява съответно плавни разтягания и транслации, докато тази от хармоници от четвърти ред прилича на скалиране и ротации. Въз основа на обширен анализ на тази динамика върху области с различен размер, изказваме хипотезата за съществуването на няколко граници на скалиране за безкрайни области. Освен това показваме, че пространството на хармоничните функции предоставя набор от универсални координати, идентифициращи конфигурации между различни области, което директно предполага, че групата на пясъчните купчини допуска естествено ренормиране. Накрая демонстрираме, че хармоничните полета могат да бъдат предизвикани от обикновени марковски процеси и че съответната стохастична динамика проявява забележителна устойчивост. Нашите резултати предполагат, че хармоничните полета могат да разделят групата на пясъчните купчини на подмножества с различни критични експоненти и че може да е възможно да се разшири фракталната структура на неутралната конфигурация отвъд границите на нейната област.

9

Kalinin, Nikita, and Mikhail Shkolnikov. "Sandpile solitons via smoothing of superharmonic functions."Communications in Mathematical Physics 378.3 (2020): 1649-1675.

Let $F\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ be the pointwise minimum of several linear functions. The theory of smoothing allows us to prove that under certain conditions there exists the pointwise minimal function among all integer-valued superharmonic functions coinciding with F "at infinity". We develop such a theory to prove existence of so-called solitons (or strings) in a sandpile model, studied by S. Caracciolo, G. Paoletti, and A. Sportiello. Thus we made a step towards understanding the phenomena of the identity in the sandpile group for planar domains where solitons appear according to experiments. We prove that sandpile states, defined using our smoothing procedure, move changeless when we apply the wave operator (that is why we call them solitons), and can interact, forming triads and nodes.

Калинин, Никита, и Михаил Школников. "Пясъчни солитони чрез изглаждане на суперхармонични функции."Communications in Mathematical Physics 378.3 (2020): 1649-1675.

Нека $F\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ бъде поточковият минимум на няколко линейни функции. Теорията на изглаждането ни позволява да докажем, че при определени условия съществува поточково минимална функция сред всички целочислени суперхармонични функции, които съвпадат с F "в безкрайността". Развиваме тази теория, за да докажем съществуването на т.нар. солитони (или струни) в модела на пясъчните купчини, изследван от С. Карачоло, Г. Паолети и А. Спортиело. По този начин правим крачка към разбирането на феномените на неутралния елемент в групата на пясъчните купчини за равнинни облати, където според експериментите се появяват солитони. Доказваме, че състоянията на пясъчните купчини, дефинирани чрез нашата процедура за изглаждане, остават непроменени при прилагане на вълновия оператор (затова ги наричаме солитони) и могат да си взаимодействат, образувайки триади и възли.

10

Lang, Moritz, and Mikhail Shkolnikov. "Sandpile monomorphisms and limits." Comptes Rendus Mathématique 360.G4 (2022): 333-341.

We introduce a tiling problem between bounded open convex polyforms $P \subset \mathbb{R}^2$ with colored directed edges. If there exists a tiling of the polyform P_2 by P_1, we construct a monomorphism from the sandpile group $G(\Gamma_1) = \mathbb{Z}^{\Gamma_1}/\Delta(\mathbb{Z}^{\Gamma_1})$ on $\Gamma_1 = P_1 \cap \mathbb{Z}^2$ to the one on $\Gamma_2 = P_2 \cap \mathbb{Z}^2$. We provide several examples of infinite series of such tilings converging to $\mathbb{R}_2$, and thus define the limit of the sandpile group on the plane.

Ланг, Мориц, и Михаил Школников. "Мономорфизми и граници в пясъчни купчини."Comptes Rendus Mathématique 360.G4 (2022): 333-341.

Въвеждаме задача за паркетиране между ограничени отворени изпъкнали полиформи $P \subset \mathbb{R}^2$ с оцветени ориентирани ръбове. Ако съществува паркетиране на полиформата P_2 с копия на P_1, изграждаме мономорфизъм от групата на пясъчните купчини $G(\Gamma_1) = \mathbb{Z}^{\Gamma_1}/\Delta(\mathbb{Z}^{\Gamma_1})$ върху $\Gamma_1 = P_1 \cap \mathbb{Z}^2$ към тази върху $\Gamma_2 = P_2 \cap \mathbb{Z}^2$. Представяме няколко примера на безкрайни редици от такива паркетирания, които клонят към $\mathbb{R}_2$, и по този начин дефинираме границата на групата на пясъчните купчини в равнината.

11

Mikhalkin, Grigory, and Mikhail Shkolnikov. "Non-commutative amoebas." Bulletin of the London Mathematical Society 54.2 (2022): 335-368.

The group of isometries of the hyperbolic space $\mathbb{H}^3$ is the 3-dimensional group $PSL_2(\mathbb{C})$, which is one of the simplest non-commutative complex Lie groups. Its quotient by the subgroup $SO(3)$ naturally maps it back to $\mathbb{H}^3$. Each fiber of this map is diffeomorphic to the real projective 3-space $\mathbb{R}P^3$. The resulting map $PSL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{H}^3$ can be viewed as the simplest non-commutative counterpart of the map $Log : (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{R}^n$ from the commutative complex Lie group $(\mathbb{C}^*)^n$ with the Lagrangian torus fibers that can be considered as a Liouville–Arnold type integrable system. Gelfand, Kapranov and Zelevinsky have introduced amoebas of algebraic varieties $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ as images $Log(V) \subset \mathbb{R}^n$. We define the amoeba of an algebraic subvariety of $PSL_2(\mathbb{C})$ as its image in $\mathbb{H}^3$. The paper surveys basic properties of the resulting hyperbolic amoebas and compares them against the commutative amoebas $\mathbb{R}^n$.

Михалкин, Григорий, и Михаил Школников. "Некомутативни амеби." Bulletin of the London Mathematical Society 54.2 (2022): 335-368.

Групата на изометрии на хиперболичното пространство $\mathbb{H}^3$ е тримерната група $PSL_2(\mathbb{C})$, която е една от най-простите некомутативни комплексни групи на Ли. Нейната факторизация по подгрупата $SO(3)$ естествено се изобразява обратно в $\mathbb{H}^3$. Всеки слой на това изображение е дифеоморфен на реалното проективно тримерно пространство $\mathbb{R}P^3$. Полученото изображение $PSL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{H}^3$ може да се разглежда като най-простия некомутативен аналог на изображението $Log : (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{R}^n$ от комутативната комплексна група на Ли $(\mathbb{C}^*)^n$ с лагранжеви тороидални слоеве, която може да се интерпретира като интегруема система от типа на Лиувил-Арнолд. Гелфанд, Капранов и Зелевински въвеждат амебите на алгебрични многообразия $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ като изображения $Log(V) \subset \mathbb{R}^n$. Дефинираме амебата на алгебрично подмногообразие на $PSL_2(\mathbb{C})$ като неговото изображение в $\mathbb{H}^3$. Статията разглежда основните свойства на получените хиперболични амеби и ги сравнява с комутативните амеби в $\mathbb{R}^n$.

12

Shkolnikov, Mikhail. "Relaxation in one-dimensional tropical sandpile." Communications in Mathematics 31 (2023). no. 3, 21-31.

A relaxation in the tropical sandpile model is a process of deforming a tropical hypersurface towards a finite collection of points. We show that, in the onedimensional case, a relaxation terminates after a finite number of steps. We present experimental evidence suggesting that the number of such steps obeys a power law.

Школников, Михаил. "Релаксация в едномерна тропическа пясъчна купчина."Communications in Mathematics 31 (2023), № 3, 21-31.

Релаксацията в тропическата пясъчна купчина представлява процес на деформиране на тропическа хиперповърхнина към краен набор от точки. Показваме, че в едномерния случай този процес завършва след краен брой стъпки. Представяме експериментални данни, които индикират, че броят на стъпките се подчинява на степенен закон.

13

Shkolnikov, Mikhail, and Peter Petrov. "Introduction to PSL2 Phase Tropicalization."Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences (2024) Vol. 77. No. 10. 1 pp.1425-1432.

The usual approach to tropical geometry is via degeneration of amoebas of algebraic subvarieties of an algebraic torus $(\mathbb{C}^*)^n$. An amoeba is logarithmic projection of the variety forgetting the angular part of coordinates, called the phase. Similar degeneration can be performed without ignoring the phase. The limit then is called phase tropical variety, and it is a powerful tool in numerous areas. In the article a non-commutative version of phase tropicalization in the simplest case of the matrix group PSL is described, replacing here $(\mathbb{C}^*)^n$ in the classical approach.

Школников, Михаил, и Петър Петров. "Въведение в тропикализацията на фазите на PSL2."Доклади на БАН (2024), том 77, №10, стр. 1425-1432.

Обичайният подход към тропическата геометрия е чрез дегенерация на амеби на алгебрични подмногообразия на алгебричния тор $(\mathbb{C}^*)^n$. Амебата представлява логаритмична проекция на многообразието, която пренебрегва ъгловата част на координатите, наречена фаза. Подобна дегенерация може да бъде извършена и без пренебрегване на фазата. Получената граница се нарича тропическо фазово многообразие и представлява мощен инструмент в множество области. В статията е описан некомуникативен вариант на тропикализацията на фазите в най-простия случай на матричната група PSL, която тук замества $(\mathbb{C}^*)^n$ в класическия подход.