

Рецензия

от акад. Юлиан Ревалски

върху дисертационния труд на Светозар Златков Станков на тема
Симетрия и метрична геометрия в банахови пространства
за присъждане на образователната и научна степен "доктор" в
професионално направление 4.5 математика

Светозар Станков е зачислен в докторантура на самостоятелна подготовка през януари 2023 г. със срок 3 години. Отчислен е с право на защита на 23.12.2024 г., а предзащитата се състоя на 17.01.2025 г.

Дисертационният труд на Св. Станков е в обем от 71 страници, състоящ се от въведение, четири глави, заключение и цитирана литература от 54 заглавия. Дисертацията е написана на английски език, като авторефератът е представен и на български.

Дисертацията е посветена на една класическа и важна област във Функционалния анализ - метрична геометрия на банаховите пространства. Изследванията в тази област произлизат от класически резултати, свързани с въпроса дали всяко безкрайномерно банахово пространство съдържа безкрайномерно банахово пространство, което е изоморфно с някое от пространствата c_0 или l_p , $1 \leq p < +\infty$. Въпреки отрицателния отговор на този въпрос, даден от Цирелсон, интересът към тази тематика продължава с редица важни резултати, изучаващи геометричната структура на банаховите пространства, получени от световно известни специалисти в областта на теория на банаховите пространства. Свързан с тези свойства е и въпросът за съществуване на базисни редици в дадено банахово пространство, които са симетрични. Да напомним, че дадена редица е базисна, ако е базис на Шаудер за своята затворена обвивка и симетрична, ако е еквивалентна на всички свои пермутации. В представената дисертация се изучава въпросът за съществуването на такива редици, както и на едно тяхно обобщение - субсиметрични базисни редици - в някои банахови пространства. Субсиметричните базисни редици са такива, които са безусловни и са еквивалентни на всяка своя подредица.

Глава първа съдържа увода на дисертацията, който е посветен на постановката и основните въпроси, които ще се изследват в дисертационния труд, както и на представяне на основните резултати получени в дисертацията.

Глава втора изучава въпроса за съществуване на субсиметрични базисни редици в спрегнатото пространство на така нареченото пространство на Тирилман. Тези изследвания са породени от поставен въпрос, от няколко автори, за съществуване на пространство с единствена, с точност до еквивалентност, субсиметрична базисна редица, която не е симетрична. Пространството на Тирилман е въведено от Касаса и Шура, като модификация на известно пространство

на Тцафрири и е наречено на румънското му фамилно име. Това пространство, означавано с $Ti(p, \gamma)$, където $1 < p < +\infty$, $0 < \gamma < 1$, се дефинира като попълнението на c_{00} , снабдено с подходящо дефинирана норма, зависеща от p, γ . Основната теорема в тази глава, Теорема 29, гласи, че за достатъчно малки γ , всяка субсиметрична базисна редица в спрегнатото $Ti^*(p, \gamma)$ е еквивалентна на субсиметричния каноничен базис, като последния не е симетричен. С други думи, в спрегнатото пространство на Тирилман има единствена, с точност до еквивалентност, субсиметрична базисна редица, която не е симетрична. Като съпътстващ помощен резултат (Лема 27) е получено, че $Ti^*(p, \gamma)$ не съдържа изоморфно копие на l_q , където q е спрегнатото на p ($1/p + 1/q = 1$). Изведени са и следствия свързани с фактор-пространства на пространството на Тирилман.

Глава трета е посветена на геометричната структура на симетризацията на дуалното пространство на Шлупрехт. Пространството на Шлупрехт S се дефинира като попълнението на c_{00} , снабдено с подходящо дефинирана норма. Известно е, че каноничният базис на S е субсиметричен, но не е симетричен. Симетризираната версия $S(S^*)$ на дуалното пространство на Шлупрехт S^* представлява пространството S^* , снабдено със симетризирана норма. Основният резултат в тази глава, Теорема 33, гласи, че пространството $S(S^*)$ съдържа подпространство, което е изоморфно на l_1 . Както е отбелязал докаторантът, този резултат не е в сила за симетризацията на дуалното пространство на известното пространство на Цирелсон.

Четвърта глава третира въпроса за крайната представимост на c_0 в дадено банахово пространство. Известен е резултат на Юнгер, Куцарова и Одел, че c_0 е крайно представимо в пространството на Тирилман $Ti(2, 1/2)$ по непресичащ се начин с каноничния базис. Авторът използва идеи от това доказателство и така наречената "yardstick" конструкция, за да докаже такъв резултат за параметри от значително по-широк клас. А именно, за всяко $1 < p < +\infty$ и $0 < \gamma < 3^{-\frac{1}{q}}$, където $1/p + 1/q = 1$, пространството c_0 е крайно представимо в пространството на Тирилман $Ti(p, \gamma)$ по непресичащ се начин по отношение на каноничния базис. Доказателството показва по алтернативен начин, че каноничният базис в съответното Тирилманово пространство не е симетричен.

Пета глава е посветена на изучаване на геометрията на банахови пространства по един от класическите начини, а именно, чрез търсене на пространства, които се влагат билипшицово в разглежданото пространство. Мотивиран от резултати на Бурген и Джонсън и Шехтман, които характеризират пространства, които не са суперрефлексивни чрез влагане на бинарни дървета, така наречените диамантени графи и Лааско графи чрез изображения с равномерно ограничена дисторция, авторът разглежда подобни въпроси за влагания на диамантени и Лааско графи. По-специално, в Теорема 47, за всяко банахово пространство X , което не е суперрефлексивно, авторът представя конструкция на влагане на Лааско граф от произволно ниво $n \geq 1$ в X с дисторция $2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Подобен

резултат за влагане на диамантени графи е доказан от Пизие. За пространството $L_1[0, 1]$ в Теорема 49 е доказано даже повече, а именно, за всеки Лааско граф от ниво $n \geq 1$ съществува влагане в $L_1[0, 1]$ с дисторция $4/3$. Съответният резултат за диамантени графи е получен от Лии и Рагавендра. За частните случаи на $n = 2$ за Лааско графи и диамантени графи е доказано съответно в Теореме 52 и 54, че влаганията в $L_1[0, 1]$ са с дисторции, минорирани съответно от $9/8$ и $5/4$. Авторът е съставил и компютърна програма за постигането на последните две оценки.

Изследванията на докторанта са в съвременна и трудна област на математиката, каквато е геометрията на банаховите пространства. Проучил е широк кръг от съществуващи резултати по темата на дисертацията и е усвоил тежък и силно нетривиален апарат за постигане на своите резултати. Доказателствата на голяма част от твърденията в дисертацията са доста трудни и обемни. Резултатите на автора са оригинални приноси към геометрията на банаховите пространства и в по-голямата си част представляват по-нататъшно развитие на резултати постигнати от високо изтъкнати специалисти в областта.

Докторантът има 3 публикации по дисертацията, всичките в списания с импакт фактор, които са съвместни, като с това напълно покрива изискванията на правилниците по ЗРАС и на БАН и ИМИ. По моя преценка приносът на докторанта в съвместните публикации е равностоеен.

Авторефератът отразява адекватно съдържанието на дисертационния труд. Като бележки могат да се посочат разминаване на номера на основни резултати с тези в самата дисертация, както и че преводът на български език не е добър, както в стилистично, така и в граматическо отношение.

Заключение: На основа на казаното по-горе, считам, че дисертацията на Светозар Станков е оригинален принос към теорията на банаховите пространства, която удовлетворява с излишък изискванията на ЗРАС и на правилниците на БАН и ИМИ за получаване на образователната и научна степен доктор. Ето защо убедено препоръчвам на почитаемото жури да предложи на НС на ИМИ-БАН да присъди на Светозар Златков Станков образователната и научна степен "доктор".

София, 21.05.2025

акад. Юлиан Ревалски