

Рецензия

за присъждане на научната степен „доктор на науките“ към Института по математика и информатика, Българска академия на науките по направление на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, изготвено от чл.-кор. проф. дн Младен Светославов Савов от катедра “Вероятности, операционни изследвания и статистика“ към Факултет по математика и информатика, Софийски университет “Св. Климент Охридски” и катедра “Изследване на операциите, вероятности и статистика“, Институт по математика и информатика, Българска академия на науките, член на журито съгласно Заповед No. 457/03.12.2024г. на директора на ИМИ-БАН и съставящ рецензия след взето решение на журито по време на първото заседание, проведено на 09.12.2024.

Реценцията е изготвена въз основа на Заповед No. 457/03.12.2024г. на директора на ИМИ-БАН, издадена на основание решение на Научния съвет на Института по математика и информатика, Българска академия на науките (протокол No. 15/29.11.2024) в съответствие с изискванията на Института по математика и информатика, Българска академия на науките за присъждането на научната степен „доктор на науките“, които превишават националните минимални изисквания за тази степен.

Като член на научното жури получих всички документи, представени от кандидата доц. д-р Цветелин Стефанов Заевски (Институт по математика и информатика, Българска академия на науките).

1. Биографични данни за кандидата

Цветелин Заевски е роден през 1974г. През 1999г. придобива магистърска степен по приложна математика във Факултет по математика и информатика, Софийски Университет „Св. Климент Охридски“. През 2013г. защитава докторска дисертация по вероятности под ръководството на проф. д-р Рачо Денчев. Цветелин Заевски е назначен за асистент в Института по математика и информатика, Българска академия на науките през 2014г., а през 2021г. получава званието доцент. Той е продуктивен математик, както се вижда от автобиографията му. Също така доц. Заевски извършва и редица административни дейности като ръководител на катедра, член на научния съвет на ИМИ-БАН и др. Понастоящем Цветелин Заевски е ръководител на един докторант, който той привлича от практиката.

2. ИЗПЪЛНЕНИЕ НА МИНИМАЛНИТЕ НАУКОМЕТРИЧНИ ИЗИСКВАНИЯ

Доц. Заевски е представил 13 статии за тази процедура. Дванадесет от тези публикации са в списания с импакт фактор, разпределени както следва: 7 в Q1, 1 в Q2, 1 в Q3 и 3 в Q4. Той е представил и 35 цитирания, 29 от които са индексирани в WoS и SCOPUS. Всички минимални изисквания във всяка категория са надхвърлени, а всички допълнителни институционални изисквания са изпълнени.

3. НАУЧНИ ПРИНОСИ НА ДИСЕРТАЦИЯТА

В дисертацията систематично се разработват основите за оценка на деривати от американски тип, базирани на класическия модел на Блек-Шолс. По-конкретно, при предположението, че цената на актива следва геометрично Брауново движение, работата въвежда унифицирана методология за оценка на различни деривати от американски тип с краен или безкраен падеж. Отчитайки, че подобни задачи за оценка обикновено водят до проблеми със свободни граници - ситуация, в която често няма аналитично решение - кандидатът посвещава значителна част от изследването на разработването и прилагането на бърз и ефективен числен подход за решаване на тези проблеми със свободни граници. Изложението на дисертацията ясно показва постепенното развитие на това изследване, за което свидетелстват и взаимозависимите глави.

Чрез този единен подход кандидатът разглежда цялостно няколко специфични деривата. Обхващат се както *put*, така и *call* опции, разглеждат се деривативи с краен и безкраен падеж и се изследва въздействието на различните права и задължения, наложени както на издателя, така и на притежателя. Следователно може да се очаква, че този труд ще бъде подобаващо оценен в литературата и че някои от постиженията му ще бъдат възприети от практиците.

Изследваните деривати имат обединяваща черта, изразяваща се в наличието както на едностранни, така и на двустранни области на ранно упражняване. Това свойство първоначално се илюстрира за конкретна структура на плащане, а след това се разширява до много по-обща рамка. Когато матуритетът е безкраен, както оценката, така и определянето на областта на ранно упражняване обикновено могат да бъдат получени явно чрез единна методология, основана на $\sup \inf$ проблеми и мартингали. За краен падеж аналитичните резултати са разбираемо по-оскъдни и обикновено предоставят информация за някои общи свойства на кривите, които разделят областите на упражняване и продължаване, например монотонност. За да оцени съответните деривати с краен падеж, кандидатът използва начупена линейно-експоненциална крива, за да апроксимира граници на ранното упражняване, метод, мотивиран от ясните теоретични формули за геометричното Брауново движение, достигащо такива граници, и след това пристъпва

към числено решаване на съответната ЧДУ. Всичко това се допълва от обширни конкретни числени изследвания.

Кандидатът демонстрира много високо ниво на технически познания в областта на съвременните математически финанси и обяснява ясно основните идеи и резултати. Въпреки това дисертацията съдържа някои повтарящи се, несъществени грешки (в този случай), които отразяват тенденцията в приложните направления да се пренебрегват някои технически подробности. Нямам съмнения относно достоверността на основните резултати и валидността на предложената методология.

По-нататък ще разгледам поотделно всяка глава от дисертацията.

3.1. Глава 2. Свойства на времената на достигане. В тази глава са представени резултати за формата и асимптотичното поведение на трансформациите на Лаплас на времето на достигане на линейни и частично-линейни граници на стандартното Брауново движение. Новата информация за тези величини служи за основа на някои от другите резултати в тази дисертация, особено в контекста на апроксимацията на кривата на предварителното упражняване за съответната област. Резултатите са получени с помощта на добре известни изрази от литературата; някои от изчисленията обаче са технически, поради което са публикувани.

Ще обобща резултатите. Нека $b := b(\cdot)$ е линейна или частично-линейна крива, а τ е времето на първото достигане на b . Тогава в общия случай кандидатът изследва формата и асимптотиката, при $T \rightarrow \infty$, на трансформациите на Лаплас

$$\mathbb{E} \left[e^{-\theta\tau} 1_{\tau \leq T} \right], \mathbb{E} \left[e^{\theta B_T} 1_{\tau > T, B_T > y} \right], \theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Тук препоръчвам z да не се използва за реална променлива в Глава 2 и да се запази y за тази цел.

Когато b е линейна крива, Теорема 2.1, Твърдение 2.2 и Твърдение 2.5 дават израз за $\mathbb{E} \left[e^{-\theta\tau} 1_{\tau \leq T} \right]$ по отношение на ф.р. на стандартното нормално разпределение. Този израз обхваща случаите, в които $b(0)$ и θ са положителни или отрицателни. Резултатите се основават на съществуващите формули за плътността на времето на първо достигане. Изводите са ясни, но изискват технически изчисления. Важно е да се отбележи, че въпреки че $\mathbb{E} \left[e^{-\theta\tau} 1_{\tau \leq T} \right]$ е аналитична по θ , изразът в Теорема 2.1 включва очевидно отстранима особеност, поради което Твърдение 2.2 го преформулира. В доказателството на Твърдение 2.2 границите на интеграла, включващи комплексни променливи ($y \in [0, \sqrt{T}] \mapsto icy - b_2 y^{-1}$), трябва да бъдат ясно определени чрез дефиниране на контура на интегриране, а знаците трябва да бъдат внимателно проследени (също и в Забележка 2.2).

Теорема 2.2, 2.4 и 2.5 разглеждат $\mathbb{E} [e^{-\theta\tau} 1_{\tau \leq T}]$, $\mathbb{E} [e^{\theta B_T} 1_{\tau > T, B_T > y}]$ за линейни и частично-линейни b . Тези теореми дават формули за трансформацията на Лаплас на тези величини, изразени в термините на кумулативната функция на разпределение N на стандартното нормално разпределение (обръщам внимание, че твърдението от 2.4 съдържа $b(T)$, докато доказателството - $b_n(T)$). Резултатите се основават на наличния израз за $\mathbb{P}(\tau > T | B_T = y)$, но изискват внимателно интегриране, манипулиране и прилагане на основните свойства на Брауновото движение. В доказателствата има една неуточнена величина $\mathbb{V}$ и тя трябва да бъде въведена. Φ_T се появява в Теорема 2.5 и внася обръкване. Не се съмнявам във валидността на твърденията, но изложението трябва да се подобри.

Следващият набор от резултати се отнася до времената на достигане на ивици, определени от две линейни или частично-линейни ивици. Теорема 2.6-8 дават изрази за $\mathbb{E} [e^{-\theta\tau} 1_{\tau \leq T}]$, излиза от една от кривите, $\mathbb{E} [e^{\theta B_T} 1_{\tau > T, B_T > y}]$. Тези изрази са доста дълги, но съдържат стандартни величини. Доказателството на Теорема 2.6 е много кратко и трябва да се разшири, докато доказателството на Теорема 2.7 е небрежно (появяват се $s_0, \sum_{k=0}^4, \sum_{k=1}^4$). Отново $\mathbb{V}$ е неопределено в доказателствата. Тъй като извеждането се основава на установени факти и основни свойства, мисля, че това е въпрос на изясняване и излагане.

Глава 2 завършва с резултати за поведението на границата при $T \rightarrow \infty$ на $e^{kT} \mathbb{E} [e^{\theta B_T} 1_{\tau > T}]$, виж Теорема 2.10, и $e^{kT} \mathbb{E} [e^{\theta B_T} 1_{\tau > T, B_T > y(T)}]$, за линейни b и подходящи линейни $y := y(T)$. Твърденията са изчерпателни и дълги, тъй като обхващат всички възможни сценарии при промяна на k, θ, b, y . Резултатите са доказани след няколко предварителни технически лема. Доказателството на Лема 2.10 е неточно, тъй като $\pm\infty$ се изважда в границата на стр. 45. Това може да се коригира чрез добавяне и изваждане на членовете в самата граница. Също така изглежда, че I_2, I_3 клонят към нула и тяхното обсъждане е излишно.

3.2. Глава 3. Предварителни бележки. Тази глава представя основния подход в дисертацията. Тя въвежда общата рамка за оценка на деривати, включително широко признатите частични интегрално-диференциални уравнения, управляващи цената на актива. Моделът на Блек-Шолс е разгледан отделно (като отбелязвам, че t липсва в раздел 3.5 и други подобни случаи), като в дискусията са включени ситуацияите при изплащане на дивиденди. Кандидатът въвежда и алтернативна параметризация, предложена от Ширяев, и показва, че моделът с дивиденди е еквивалентен на модел без дивиденди с модифицирани параметри. Заслужава да се отбележи, че рамката допуска отрицателни лихвени проценти - сценарий, който наскоро се оказа правдоподобен.

Доказателството на Твърдение 3.5 не е ново или алтернативно. То е стандартен пример от книгите и в доказателството липсва подходяща обосновка чрез теоремата за ограничената сходимост.

Накрая е представен и численият метод и са въведени константи, които ще бъдат от съществена роля по-късно.

3.3. Глава 4. Нов подход за оценка на дисконтирани Американски опции. Глава 4 започва с кратка мотивация относно проблема за оценяването на дисконтирани американски опции и показва защо плащането на дивиденди може да бъде включено в такъв модел, т.е. те могат да бъдат отхвърлени. Очертани са и основните резултати.

В тази глава официално се въвеждат областта на ранно упражняване (Υ) и областта на продължаване ($\tilde{\Upsilon}$) за *call* опции. Широко признатият резултат, че недисконтираните американски *call* опции имат празна област на ранно упражняване ($\Upsilon = \emptyset$), е строго доказан.

Освен това Твърдение 4.2 установява монотонност за *call* опциите: ако $(t, x) \in \Upsilon$, то $(t, y) \in \Upsilon$ за $y > x$. По подобен начин за *put* опциите обратната монотонност е показана в Твърдение 4.3: ако $(t, x) \in \Upsilon$, то $(t, y) \in \Upsilon$ за $y < x$. Тези резултати осигуряват позадълбочено структурно разбиране на областите, свързани с ранното упражняване и продължаването на американските опции. Използването на Лема 3.1 трябва да бъде по-добре обяснено в доказателствата. Също така, $c(t)$ е въведена случайно в текста, докато би трябвало да има отделна дефиниция. Стойността $c(T)$ се оценява както за *put*, така и за *call* опции в Твърдения 4.5 и 4.4 и тази стойност е важна за последващия алгоритъм за оценка на цената на опциите. Доказателствата трябва да се подобрят, например къде се използва диференцируемостта на N , защо V има лява производна на падежа и $t \mapsto T$ на едно или две места.

След това кандидатът представя алгоритъма за ценообразуване на *call* и *put* опции. Идеята е следната: приема се стратегия, при която опцията се упражнява при условие, че експонентата на начупена линейна крива, дефинирана върху дял от $[0, T]$, е достигната от цената на актива. Кривата трябва да удовлетворява $e^{a_i t_i + b_i} = e^{a_{i+1} t_i + b_{i+1}} = C_i$ във всеки възел. Константата $C_n = c(T)$ не е нищо друго освен вече изведената стойност на кривата на упражняване при падежа. След това, връщайки се назад, се определят рекурсивно $C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_1$ чрез решаване на специфична последователност от оптимизационни задачи, която трябва да се опише по-добре (има много печатни грешки в (4.7) и неясни обяснения), но която несъмнено е оригинален принос на Ц. Заевски. След

това се въвеждат две схеми на Монте Карло и схема на крайните разлики за решаване на тази оптимизационна задача и резултатите изглеждат, че подобряват значително сегашните методи по отношение на скоростта.

И накрая, разглеждат се опции с липса на матуритет ($T = \infty$), при които кривата на упражняване е константа, да кажем c . Теорема 4.1 извежда цената и константата c за *call* опциите, докато Теорема 4.2 прави това за *put* опциите. Доказателствата се основават на границите на Лапласовите трансформации на времената на достигане, получени в глава 2, но смятам, че те може да не са необходими. Например, ако в доказателството на Теорема 4.1 се разглежда $\xi \wedge T$, тогава $S_{\xi \wedge T} \leq c$ и тъй като е ограничена случайна величина, границата при $T \rightarrow \infty$ преминава лесно в очакването. Доказателствата обаче са умело направени и не се нуждаят от допълнителни промени.

3.4. Глава 5: Оценяване на Американски опции при ограничение за цената на основния актив. Ограничените опции имат за цел да рестриктират излагането на продавача на значителни колебания в цената на базовия актив. Тези опции включват вграден таван, който представлява предварително определено ценово ниво, над което стойността на опцията не се регистрира. За ограничена *call* опция вграденият таван определя горна граница. Ако цената на базовия актив надхвърли тази горна граница, стойността на опцията е ограничена и продавачът не е задължен да плаща над това ниво. За ограничена *put* опция ограничението определя долната граница. Ако цената на базовия актив падне под тази горна граница, изплащането е ограничено, което предотвратява по-нататъшни загуби за продавача.

Кандидатът е направил задълбочено проучване на американските ограничени опции и е получил следния основен набор от резултати:

(1) **Граници на регионите:**

- За *put* опции, както е установено в **Теорема 5.1**, границата на регионите се определя от:

$$c^A(t) \wedge L,$$

където:

- L е лимитираното ниво, а
- $c^A(t)$ е границата на упражняване на неограничена американска опция.

- За *call* опции, както е установено в **Теорема 5.3**, границата на регионите се определя от:

$$c^A(t) \vee L.$$

- В специалния случай, когато $T = \infty$ (опции без матуритет), границите се опростяват до константи, както е описано подробно в **Следствия 5.1 и 5.2**.

(2) **Оценка на опции:**

- цените на ограничени *put* и *call* опции са изведени съответно в **Теореме 5.2 и 5.4**.
- Случаят $T = \infty$ е специално разгледан в **Следствия 5.1 и 5.2**.

Важно е да се подчертае, че цените на ограничените опции зависят от нивото на рестрикцията и от граничната стойност на падежа на неограничената американска опция. Доказателствата са както технически сложни, така и предизвикателни. Въпреки че резултатите са точни, изложението изисква подобрене в няколко области:

- не е ясно посочено дали $(c^A(t) \in (D_2, D_1))$ или $(c^A(t) \in (D_1, D_2))$, което следва преди всичко от потенциалната монотонност на границата и от факта, че (D_2) представлява граничната стойност на опция без матуритет;
- прилагането на формулата на Динкин изисква по-подробно и задълбочено обяснение за яснота;
- необходимо е да се направи ясно разграничение между работата с времето до падежа и естественото време, за да се избегне объркване;
- изчисляването на V в най-сложния сценарий изисква значително по-добро обяснение и повече детайли.

Кандидатът е разработил и приложил числени схеми за определяне на границата на упражняване и изчисляване на цената на ограничени американски опции. Числените експерименти са изключително убедителни, което на практика превръща цялата глава в цялостно и самостоятелно изследване върху тези производни.

3.5. Глава 6. Някои обобщения на Американските опции. В тази глава кандидатът развива теорията на обобщените американски опции, чието въвеждане и предназначение е много добре мотивирано. Последните финансови инструменти имат принципно по-обща структура на изплащане, която обаче запазва съществуването на област на упражняване. Обикновено два пъти диференцируеми функции $G(x)$ и структура на плащане $N(t, x) = e^{-\lambda t} G(x)$ удовлетворяват това изискване. Подробно се разглежда специалният случай, когато $G(x) = Mx^n + C$. Теоретичната рамка изглежда солидна, но има много неясни моменти и мъгляви доказателства, които правят четенето много трудно. Ще изложа коментарите си по тези пропуски и неясноти, като се надявам да получа разяснения от кандидата.

- (1) Твърдение 6.1 не е правилно доказано. Повтаряща се грешка в тази дисертация е, че $a_n - b_n > 0 \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n > 0$ или подобни заключения. Фактът, че границата в доказателството е неотрицателна, не означава, че плащането е по-голямо; то винаги може да бъде по-малко, но в границата може да стигне до

нула. Понастоящем изглежда, че $(t, x) \in \Upsilon \implies \mathcal{BG}(x) \leq 0$. Като се има предвид важността на това твърдение, то трябва да се разгледа внимателно. Достатъчно ли е да се промени Дефиниция 6.1!? Какви са последствията от Твърдение 6.5?

- (2) Твърдение 6.3 изглежда правилно, но неговото доказателство трябва да бъде изяснено. Изглежда, че $\bar{x}i$ така или иначе не може да надвишава τ !?
- (3) Твърдението в доказателството на Твърдение 6.4, че областта е непрекъсната функция, трябва да бъде изяснено.
- (4) Твърдение 6.6 е формулирано за глобален максимум, но се прилага за локален такъв. Това твърдение трябва да се докаже. Лемма 6.2 не е написана добре; в нея се използва Твърдение 6.6, но то никога не се споменава.

Твърденията за случая на *put call* опциите също трябва да бъдат проверени. В раздела за комбиниранияте опции с краен падеж *put-call* са изключени по някакви причини, но те никога не са били въвеждани. В 6.6 K се използва като произволна константа, докато през цялото време това е страйкът; трябва да се припомнят p, q .

Като цяло очаквам тази глава да бъде надлежно обсъдена на следващия етап.

3.6. Глава 7. Американски стренгъл-стратегии с произволни цени на изпълнение. Структурата на тези опции съчетава елементи на *call* и *put* опция, като предлага гъвкавост на притежателя.

Ключови характеристики на опцията:

1. **Двойна природа:** Притежателят може да избере да изпълни опцията или като:
 - *put* опция със страйк K_1 , осигуряваща изплащане на $C_1(K_1 - x)^+$, или
 - *call* опция със страйк K_2 , осигуряваща печалба от $C_2(x - K_2)^+$.
2. **Коефициенти на претегляне:**
 - C_1 : тежест или брой акции в компонента „*put*“;
 - C_2 : тегло или брой акции в компонента „*call*“.
3. **Страйк цени:**
 - K_1 : цената на упражняване на пут компонента;
 - K_2 : цената на упражняване на кол компонента.
4. **Експоненциален спад:** Печалбата се дисконтира с $e^{-\lambda t}$, което представлява коефициент на спад, отчитащ времето t и скоростта λ .

Структура на плащането:

$$N(t, x) = e^{-\lambda t} \max\{C_1(K_1 - x)^+, C_2(x - K_2)^+\}.$$

Ако $x = D_0$, което е изчислено в дисертацията, тогава приносят на всеки компонент е еднакъв и може да се каже, че опцията е балансирана. Всеки елемент *put* или *call* има своя област на упражняване, означена съответно с Υ^p, Υ^c .

Първата група резултати описва тези региони със следния резултат:

- (1) ако $\lambda = 0$, then $\Upsilon^c = \emptyset$, вижте Твърдение 7.1;
- (2) ако $\lambda > 0$, тогава $\Upsilon^c \neq \emptyset$ и $(t, x) \in \Upsilon^c \implies (t, y) \in \Upsilon^c$, за $y > x$, вж. Твърдение 7.2;
- (3) $\Upsilon^p \neq \emptyset$ и $(t, x) \in \Upsilon^c \implies (t, y) \in \Upsilon^c$, за $y < x$, вж. Твърдение 7.3;
- (4) Твърдение 7.4 дава монотонност на границите на упражнението;
- (5) Твърдения 7.5-6 дават стойността на границите на падежа.

Лема 3.1 не е ясно използвана в доказателствата, в които се появява, и в доказателството на Твърдение 7.5 отново има > 0 , а не ≥ 0 (вече отбелязана тенденция).

Случаят, когато падежът е ∞ , се разглежда отделно, тъй като в този случай Теорема 7.1-2 дават границите на упражняването (константи), когато $\lambda > 0$ и $\lambda = 0$. Това се постига чрез оптимизационна задача. Трябва да се отбележи любопитният факт, че дори когато ранното упражняване за комбинацията „*call*“ не е продуктивно, границата на „*put*“ все още зависи от C_2 (но не и от K_2). Силно бих препоръчал на кандидата да опита следната репараметризация, която може да опрости въпроса: $B = A/a; x = yA$; да получи линейна по A функция $f(A, a, y)$, която сравнително лесно може да се максимизира като функция на две променливи.

Доказателствата за гореспоменатите твърдения изглеждат верни, но са необходими допълнителни разяснения.

Главата завършва с числено разглеждане на случая с крайната зрялост, когато са проведени много експерименти, които потвърждават стойността на тези достижения.

3.7. Глава 8. Квадратични Американски стренгъл деривативи като частен случай на задачи, водещи до първи изход от ивица. В тази глава кандидатът разглежда варианти със структура на изплащане $N(t, x) = e^{-\lambda t} G(x)$, където G е такова, че може да възникне двустранно оптимално спиране (Условие 8.1). Обикновено се изискват две производни в пространствената променлива. Мотивацията относно тези опции е, че някои инвеститори предпочитат да се предпазят добре от силни колебания на цената на актива, което компрометира възвръщаемостта, когато цената е близка до страйк.

Твърдения 8.1-3 дават структурата на областите на упражняване, а доказателствата им имат някои от недостатъците, споменати в предишните глави за подобни резултати. Твърдение 8.4 дава дори стойностите на двустранно зависимата от времето ивица на падежа и те съвпадат с универсалните константи $C \leq D$ от условие 8.1. В случай на липса

на матуритет границите на упражнението трябва да бъдат константи $A \leq C \leq D \leq B$. Това води до оптимизационен проблем по A, B , който е подробно изследван от кандидата в Твърдения 8.5-6, които са технически.

За краен падеж се провежда вече стандартната процедура за апроксимиране на границата на упражняване и впоследствие на цената на опцията. Подходът за решаване на задачата е много добре представен.

Последната теоретична част се занимава със случая, когато $G(x) = (x - K)^2$, което съответства на името на самата глава. Представен е обширен анализ, който решава следните две задачи: в зависимост от параметрите да се определи дали оптималното спиране е едностранно или двустранно и да се получи цената на опциите.

Тази глава е ясен атестат, че кандидатът е добре запознат с областта и притежава доста добри технически умения.

3.8. Глава 9. Отменяеми опции при липса на матуритетни ограничения. В тази глава кандидатът разглежда т.нар. израелски опции, които дават право на притежателя и на издателя съответно да упражнят и да отменят опцията. Издателят обикновено е санкциониран за анулирането. Общата структура на плащането в тази част може да бъде създадена по следния начин:

$$N(\zeta, S_\zeta) = N_1(\zeta_1, S_{\zeta_1})1_{\zeta_1 \leq \zeta_2} + (N_2(\zeta_2, S_{\zeta_1}))1_{\zeta_2 < \zeta_1},$$

където $N_1(t, x) = e^{-\lambda t}(x - K)^+$; $N_2(t, x) = e^{-\lambda t}((x - K)^+ + \eta)$.

Целта на представеното изследване е аналитично да се определят, когато е възможно, областта на упражняване на притежателя (Υ^b), областта на анулиране на издателя (Υ^s) и областта на продължаване. След като се получи това, се определя цената на опцията.

Сложността тук се състои в това, че имаме игра между страните и за всяка стратегия, т.е. време на спиране, ζ има оптимална стратегия $A(\zeta, \cdot)$, съответно $B(\zeta, \cdot)$, за другата страна. При оптимизацията се търси $A(B(\zeta)) = \zeta$ или фиксирана точка за $A \circ B$.

Първият набор от резултати описва съответните региони със следните резултати:

- (1) за $\lambda = 0$ тогава $\Upsilon^b = \emptyset$, виж Твърдение 9.1;
- (2) ако $\eta \geq K$, тогава $\Upsilon^s = \emptyset$, виж Твърдение 9.2;
- (3) ако $x < K$, тогава $x \notin \Upsilon^s$, виж Твърдение 9.3;
- (4) ако $x \in \Upsilon^b$ и $y > x$, то $y \in \Upsilon^b$, виж Твърдение 9.4;
- (5) ако $x \in \Upsilon^s$; $K < y < x \implies y \in \Upsilon^s$.

Доказателствата са сравнително технически и разкриват способностите на кандидата. Лема 3.1 отново се използва по неясен начин. Доказателството на Твърдение 9.6 е малко объркано: в точка 2 не разбирам защо веднага се появява $K_1 \in \Upsilon^b$; това не следва при

пряко прилагане на Твърдение 9.4; може би се прави чрез противоречие и вземане на граница!?

И накрая, централният резултат в тази работа, т.е. Теорема 9.2, дава възможност да се определят границите и цената на израелската опция. Отлично е, че кандидатът е успял да получи такъв пълен резултат. Не съм сигурен, че в (9.9) има $2c$!? Тогава оптимизацията не е толкова трудна, колкото тази от предишната глава.

3.9. Глава 10. Оценяване на отменяеми Американски пут опции без падеж.

Резултатите, представени в тази глава, са аналогични на тези в Глава 9, но се фокусират конкретно върху *put* опциите. Кандидатът ясно обяснява защо *put* опциите не са по-прости в неговите изследвания, главно поради потенциалното наличие на отрицателна безрискова ставка.

Резултатите могат да се обобщят по следния начин:

- (1) $x > k \implies x \notin \Upsilon^s$, виж Твърдение 10.1;
- (2) $x \in \Upsilon^b \implies y \in \Upsilon^b$, ако $0 < y < x$, виж Твърдение 10.2;
- (3) $x \in \Upsilon^s \implies y \in \Upsilon^s$, ако $x < y < K$, виж Твърдение 10.3;
- (4) $r > 0 \implies \Upsilon^s = \emptyset$ или $\Upsilon^s = \{K\}$, виж Твърдение 10.4;
- (5) Теорема 10.1 предлага пълни резултати за оценката на такива опции.

Доказателствата са аналогични на тези от Глава 9 със същите препоръки. Със сигурност си струва да се провери дали оптимизационната задача не може да бъде решена чрез предложената преди това параметризация. Представено е числено изследване.

3.10. Глава 11. Пропорционални отменими опции без падеж.

Резултатите от тази глава са подобни на резултатите от глави 9-10, тъй като основната разлика е, че санкцията за анулиране не е фиксирана сума, а пропорция от плащането, т.е. $N_2(t, x) = \eta N_1(t, x)$ и би било добре да се спомене, че $\eta \geq 1$. Би било полезно кандидатът да изкаже предположение коя версия е по-добра. На мен ми се струва естествено наказанието да е пропорционално на печалбата, но пазарът може да изисква нещо друго.

По отношение на резултатите ще бъде кратък - областите на упражняване са определени както за *put*, така и за *call* опции; оценката се извършва чрез оптимизация, напомняща тази от предишните глави; доказателствата вече са стандартни, но техниката, чрез която се използват резултати за опции с нулево наказание от предишните глави, е интересна; разглеждат се крайни падежи и се провеждат обширни числени експерименти.

3.11. Глава 12. Общи опции без падеж.

Тази глава продължава задълбоченото изследване на финансовите деривати в съответствие с предположението на Блек-Шолс.

Кандидатът разглежда опции без падеж, анулируеми опции с неустойки, които потенциално включват комбинация от пропорция на плащането, акции и фиксирана неустойка. Следователно плащането на издателя при анулиране е

$$N_2(t, x) = \eta_1 N_1(t, x) + \eta_2 x + \eta_3.$$

Проблемът е ясно изложен и са дадени някои предварителни резултати, в които първата лема трябва да бъде подобрена като изложение и доказателство. Ще разгледам само случая със *call* опциите, тъй като другият вариант е подобен по отношение на резултатите.

- (1) $x < K \implies x \in \bar{\Upsilon}$, виж Твърдение 12.1;
- (2) $\eta_3 \geq K\eta_1 \implies \Upsilon^s = \emptyset$, виж Твърдение 12.2, което зависи от предишни резултати и в чието доказателство трябва да се подобри позоваването на Теорема 4.1;
- (3) $\eta K_1 > \eta_3, x > K, x \in \Upsilon^s, K < y < x \implies y \in \Upsilon^s$, виж Твърдение 12.3, чието доказателство също не е много ясно;
- (4) $\eta_1 = 1, \eta_2 = \eta_3 = 0 \implies \bar{\Upsilon} = (0, K)$, виж Твърдение 12.4;
- (5) $x \in \Upsilon^b; y > x \implies y \in \Upsilon^b$, виж Твърдение 12.5;
- (6) $\lambda = 0 \implies \Upsilon^b = \emptyset$, виж Твърдение 12.6;
- (7) $r < 0 \implies \Upsilon^s = \emptyset$ или $\Upsilon^s = \{K\}$.

След това Теорема 12.1 дава пълно описание на границите на упражняване, които са две константи, намерени чрез оптимизационна процедура, вече използвана в предишните глави, и също така дава цената на опцията. Изглежда, че тук оптимизацията се извършва с малко по-различна репараметризация, която изглежда е по-добра. Накрая се обсъжда плавното напасване, както и случаят $\lambda = 0$. Дадени са обширни числени резултати.

3.12. Глава 13. Оценка на отменени Американски *put* опции с краен падеж.

Тази глава е подходяща за последна в дисертацията. В нея са използвани резултати и подходи от разработената досега теория. Разглеждането на крайния падеж не позволява напълно явни резултати за отменените *put* опции, но предишните резултати дават някои основни аналитични сведения, които се използват за числени резултати. По принцип основните свойства на оптималната област могат да бъдат получени като математически твърдения, докато тяхната форма е числено апроксимирана. Като цяло регионът на автора показва доста богато поведение в зависимост от страйка, предходните безсрочни опции и т.н.

4. ПРЕПОРЪКИ И ЦЯЛОСТНА ОЦЕНКА

Дисертацията представлява обширно изследване на специализирана математическа подобласт, като по този начин изпълнява основния критерий за придобиване на научната степен „доктор на науките“ в Института по математика и информатика, Българска

академия на науките. Освен това доц. Цветелин Заевски е признат за експерт в тази област както в национален, така и в международен план, което се дължи най-вече на качествените му публикации и на уменията му да използва съвременни математически техники. Освен това той отговаря на всички минимални законови изисквания за присъждане на научната степен „доктор на науките“. Убедено препоръчвам на научното жури да присъди научната степен „доктор на науките“ на доцент Цветелин Заевски.

В предходната дискусия подчертах основните проблеми. Освен това би било полезно да се включи доказателство за сходимостта на приближението с експоненциални начупени прави към кривата, разделяща регионите. Макар че числените резултати и основните принципи не оставят съмнение за верността на подхода, за да се завърши изследването, е необходимо строго математическо доказателство. Също така е добре да се видят по-общии резултати в областта на времена на достигане и дали те предлагат по-общии опции чрез гарантиране на региони на продължение и упражняване. Накрая, насърчавам по-нататъшното международно сътрудничество и вярвам, че доцент Заевски вече е на път към тази цел - важен аспект на успешната академична кариера.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Съгласно приложените документи кандидатът доц. д-р Цветелин Заевски отговаря на всички минимални изисквания, определени от Закона за развитието на академичния състав в Република България, Правилника за неговото прилагане и Правилника на Института по математика и информатика, Българска академия на науките, определящ специфичните допълнителни изисквания за присъждане на научни звания и академични длъжности. Професионалното ми мнение относно неговия труд се потвърждава напълно от приложените документи, които ясно показват, че доц. д-р Цветелин Заевски е много добър специалист в научната област на дисертационния труд.

Ето защо давам цялостна положителна оценка на дисертационния труд и работата на доц. д-р Цветелин Заевски и **убедено препоръчвам** на научното жури да присъди на доц. д-р Цветелин Заевски научното звание „доктор на науките“ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика.

.....
проф. дн Младен Савов

гр. София
19.02.2025