

Научни приноси на публикациите за участие в конкурс за заемане на академична длъжност професор, обявен в "Държавен вестник бр. 63/10.07.2026 г., в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, научна специалност Изследване на операциите (Финансова математика).

на доц. дн Цветелин Стефанов Заевски

август 2026 г.

Общият списък на научните публикации на кандидата съдържа 63 заглавия. За участие в конкурса са представени 16 от тях. Те са излезли от печат през периода 2022 - 2026 г. Кандидатът потвърждава, че нито една от тези публикации не е участвала като доказателство за предходни процедури. Всички те са публикувани в списания с импакт фактор (IF), освен две, които са публикувани в списания, реферирани в Scopus.

Научните приноси са в няколко насоки и могат да се систематизират по следния начин:

1. Изследване на различни модификации на разпределението на Кийс.
2. Идентифициране на хаос в смутени динамични системи.
3. Финансова математика.
 - (а) Анализ и управление на риска.
 - (б) Американски тип деривати.
 - (в) Крива на доходност.

По-долу са представени получените от кандидата резултати в контекста на съществуващата теория. Ще се използват наименованията на английски език на някои от термините, за които няма наложен превод на български.

1 Изследване на различни модификации на разпределението на Кийс.

Следните публикации влизат в тази група:

1. Zaeviski, T., Kyurkchiev, N.. Some Notes on the Four-parameter Kies Distribution. Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 75, 10, „Prof. Marin Drinov“ Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 2022, ISSN:1310-1331, DOI:10.7546/CRABS.2022.10.01, 1403-1409. SJR (Scopus):0.182, JCR-IF (Web of Science):0.3 Q3 (Scopus)
2. Zaeviski, T., Kyurkchiev, N.. On some composite Kies families: distributional properties and saturation in Hausdorff sense. Modern Stochastics: Theory and Applications, 10, 3, VTeX, 2023, ISSN:2351-6054, DOI:10.15559/23-VMSTA227, 287-312. SJR (Scopus):0.48, JCR-IF (Web of Science):0.7 Q2 (Scopus)
3. Zaeviski, T., Kyurkchiev, N.. On min- and max-Kies families: distributional properties and saturation in Hausdorff sense. Modern Stochastics: Theory and Applications, 11, 3, VTeX, 2024, ISSN:2351-6054, DOI:10.15559/24-VMSTA244, 265-288. SJR (Scopus):0.499, JCR-IF (Web of Science):1 Q2 (Scopus)
4. Zaeviski, T., Kyurkchiev, N.. On some mixtures of the Kies distribution. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 53, 5, Hacettepe University, 2024, ISSN:2651-477X, DOI:10.15672/hujms.1482377, 1453-1483. SJR (Scopus):0.346, JCR-IF (Web of Science):0.9 Q2 (Web of Science)
5. Zaeviski, T., Kyurkchiev, N.. On the Hausdorff saturation of some trigonometric-Kies families. Palestine Journal of Mathematics, 13, 2, Palestine Polytechnic University, 2024, ISSN:2219-5688, 249-262. SJR (Scopus):0.374 Q3 (Scopus)

Разпределението на Кийс, за пръв път въведено в литературата в [Kies \(1958\)](#), се явява модификация на разпределението на Уейбул и от там, на експоненциалното разпределение. То е базирано на дробно-линейната трансформация, като задава кумулативната функция на разпределение чрез

$$H(t) := 1 - e^{-\lambda \left(\frac{t}{1-t}\right)^b} \quad (1.1)$$

върху интервала $(0, 1)$. По този начин, едно разпределение, дефинирано върху положителната реална ос, може да се модифицира върху краен интервал.

В споменатите по-горе статии са изследвани различни модификации, базирани на итеративни влагания, мин и макс на няколко такива разпределения, смеси от разпределения, както и някои тригонометрични трансформации. Особено внимание е обърнато на т.нар. Хаусдорфово насищане, което може да се разглежда като апроксимация от първи ред на кумулативната функция на разпределението спрямо осите. То може да намери поле за приложение в различни области като управление на химични реакции, анализ на ROC-криви (в медицината), управление на риска, и др.

- 1.1 Zaeovski, T., Kyurkchiev, N.. Some Notes on the Four-parameter Kies Distribution. Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 75, 10, „Prof. Marin Drinov“ Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 2022, ISSN:1310-1331, DOI:10.7546/CRABS.2022.10.01, 1403-1409. SJR (Scopus):0.182, JCR-IF (Web of Science):0.3 Q3 (Scopus)**

В своето изследване [Kumar and Dharmaja \(2014\)](#) допълнително обобщават разпределението на Кийс, използвайки произволен интервал за дефиниционно множество. Така то се базира на четири параметъра – допълнителните два свързани с краищата на дефиниционната област. Оказва се обаче, че в това изследване са допуснати някои неточности. Това наложи ревизиране на някои резултати, и по-конкретно на тези свързани с моментите и с функцията на средното на остатъчния живот (mean residual life function). Коректните твърдения са формулирани и доказани в термините на гама функцията, както и на хипергеометричните функции на Трикоми и Уитакър.

- 1.2 Zaeovski, T., Kyurkchiev, N.. On some composite Kies families: distributional properties and saturation in Hausdorff sense. Modern Stochastics: Theory and Applications, 10, 3, VTeX, 2023, ISSN:2351-6054, DOI:10.15559/23-VMSTA227, 287-312. SJR (Scopus):0.48, JCR-IF (Web of Science):0.7 Q2 (Scopus)**

В тази статия е изследвана една комбинация от две разпределения на Кийс, базирана на факта, че дефиниционната им област е интервала $(0, 1)$, както и на факта, че кумулативната функция на разпределение е изображение именно в този интервал. Нека кумулативните функции на двете първоначални Кийс-разпределения са:

$$\begin{aligned} H(t) &:= 1 - e^{-k\left(\frac{t}{1-t}\right)^b} \\ G(t) &:= 1 - e^{-\lambda\left(\frac{t}{1-t}\right)^a}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Базирайки се на тях, дефинираме новото разпределение чрез неговата кумулативна функция като

$$F(t) := G(H(t)) = 1 - e^{-\lambda\left(e^{k\left(\frac{t}{1-t}\right)^b} - 1\right)^a}. \tag{1.3}$$

Преди да изследваме тази модификация, обръщаме специално внимание на плътността на оригиналното Кийс-разпределение. В Твърдение 2.1 е показано, че тя може да има пет вида, като при всички от тях дясната крайна точка (за $t = 1$) е нула. По-конкретно, плътността: (A) започва от нулата при $t = 0$, расте до максимум, и намалява

до нула; (B) също като в (A), но с положителна начална точка; (C) монотонно намаляваща от положителна стойност до нула; (D) също като в (C), но с начало в $+\infty$; (E) функция с начало в $+\infty$, която има както локален минимум, така и локален максимум. Показано е кои стойности на параметрите до кои случаи водят.

Базирайки се на тези резултати, извеждаме основните вероятностни свойства на новото разпределение. В Част 3 е обърнато особено внимание на свойствата на опашките, като са изведени формули (или уравнения) за две основни мярки, произлизащи от теорията на финансовия риск, както и една сравнително нова: VaR (Value-at-Risk), AVaR (Averaged-Value-at-Risk), ExVaR (Value-at-Risk базиран на експектил).

Както споменахме по-горе, основно място в нашите изследвания заема т.нар. Хаусдорфово насищане. Неговата математическа формулировка произлиза от Хаусдорфовото разстояние между две графики в смисъл на [Sendov \(1990\)](#):

Дефиниция 1.1. Хаусдорфовото разстояние $d(g, h)$ между две криви g и h е

$$d(g, h) := \max \left\{ \sup_{A \in g} \inf_{B \in h} \|A - B\|, \sup_{B \in h} \inf_{A \in g} \|A - B\| \right\}. \quad (1.4)$$

Дефиниция 1.2. Хаусдорфовото насищане се дефинира чрез Хаусдорфовото разстояние между графиката на кумулативната функция на разпределението и Γ -образната крива, свързваща точките $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$.

Едно незабавно следствие от дефиниция 1.2 е, че Хаусдорфовото насищане може да се намери като единствено решение на уравнението $F(d) = 1 - d$. Основните резултати за него са в две насоки. Първо, изведена е формула в полу-затворен вид (Теорема 4.4) и второ, получена е релацията между него и някои подходящи апроксимиращи константи.

Последно, но не и по значение, разгледано е едно приложение на модифицираното Кийс-разпределение чрез база от данни от финансовите пазари, като е направено сравнение с оригиналното Кийс-разпределение, както и с експоненциалното и това на Уейбул.

1.3 Zaeovski, T., Kyurkchiev, N.. On min- and max-Kies families: distributional properties and saturation in Hausdorff sense. Modern Stochastics: Theory and Applications, 11, 3, VTeX, 2024, ISSN:2351-6054, DOI:10.15559/24-VMSTA244, 265-288. SJR (Scopus):0.499, JCR-IF (Web of Science):1 Q2 (Scopus)

В тази статия оригиналното разпределение е заменено с негова модификация, дефинирана върху произволен интервал (a, b) . Това се постига като първоначалната дробно-линейна трансформация $t \rightarrow \frac{t}{1-t}$ се заменя с $t \rightarrow \frac{t-a}{b-t}$. Споменатото по-горе твърдение, което описва свойствата на плътността, е модифицирано към този случай.

Нека λ и β са положителни вектори с размерност n , $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n > 0$, и полинома $P(\cdot; \lambda, \beta)$ е дефиниран като

$$P(x; \lambda, \beta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^{\beta_i}. \quad (1.5)$$

Нека $\mathcal{P}$ е множеството, което се състои от всички такива полиноми. Да отбележим, че то е затворено спрямо операцията събиране. Разглежданите в тази публикация нови разпределения върху интервала (a, b) се дефинират на база на полиномите от $\mathcal{P}$ чрез тяхната кумулативна функция на разпределение:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-P\left(\frac{t-a}{b-t}; \lambda, \beta\right)\right) \equiv 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{\beta_i}\right). \quad (1.6)$$

Теорема 3.5 обяснява наименованието мин-Кийс разпределение. Тя гласи, че ако два полинома $P_1(\cdot)$ и $P_2(\cdot)$ от множеството $\mathcal{P}$ генерират две независими случайни величини ξ_{P_1} и ξ_{P_2} , то случайната величина $\min\{\xi_{P_1}, \xi_{P_2}\}$ се генерира от полинома $P_1(\cdot) + P_2(\cdot)$. Да отбележим, че както множеството $\mathcal{P}$ е затворено спрямо оператора сума, така и мин-операторът затваря множеството от тези случайни величини.

Веднъж дефинирайки новото разпределение, продължаваме с изследването на плътността (Твърдение 3.7), квантилната функция (Твърдение 3.8), както и на очакванията (Твърдение 3.10). Интересно следствие, доказано в Твърдение 3.11, гласи, че очакването на една специфична функция от мин-Кийс разпределена случайна величина се задава чрез гама функцията. В допълнение, в Глава 4 изучаваме опашките чрез по-горе споменатите рискови мярки VaR, AvAR, и ExVaR. Също така, в Глава 5 са изведени формулите за Хаусдорфовото насищане.

Изследването продължава с т.нар. дуални разпределения, които се дефинират чрез кумулативните функции като $G(t) = 1 - F(b + a - t)$. Да припомним, че оригиналното разпределение е зададено върху интервала (a, b) . Нека дефинираме макс-Кийс разпределението като дуално на мин-Кийс. Името му се дължи на един резултат, доказан в Твърдение 6.5, който гласи, че ако ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ са независими случайни величини, разпределени спрямо дуалния Кийс-закон върху интервала (a, b) , то случайната величина $\max\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ има макс-Кийс разпределение. Използвайки дуалността между мин- и макс-Кийс разпределенията, извеждаме съответните резултати за свойствата на новото разпределение, за поведението в опашките, както и за Хаусдорфовото насищане.

Не на последно място, нововъведените разпределения са приложени върху две бази от данни – и двете произтичащи от финансовия сектор (първата е вече споменатата по-горе).

1.4 Zaeovski, T., Kyurkchiev, N.. On some mixtures of the Kies distribution. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 53, 5, Hacettepe University, 2024, ISSN:2651-477X, DOI:10.15672/hujms.1482377, 1453-1483. SJR (Scopus):0.346, JCR-IF (Web of Science):0.9 Q2 (Web of Science)

Следващото изследване в областта на Кийс-разпределенията е посветено на т.нар. смеси. Да припомним, че оригиналното разпределение, дефинирано чрез (1.1), се задава чрез два параметъра – λ и β . В тази статия допускаме, че това са случайни величини. Поради някои нужди от сходимост, налагаме следните изисквания:

$$\mathbb{E} \left[\frac{\beta}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right] < \infty \quad (1.7)$$

$$\mathbb{E} [\lambda] < \infty \quad (1.8)$$

$$\mathbb{E} [\lambda\beta] < \infty. \quad (1.9)$$

$$(1.10)$$

Да отбележим, че те са достатъчни, но не и необходими, така че сходни резултати може да се получат и при други условия. На тяхна база в Твърдение 3.5 доказваме, че кумулативната функция на разпределение, както и плътността, могат да се получат чрез очакване по случайните величини λ и β в съответните функции на оригиналното разпределение. Формата на плътността на смесеното Кийс-разпределение е изследвана в Твърдение 3.6, докато резултатите за Хаусдорфовото насищане са изведени в Глава 4.

Множество конкретни примери са разгледани. Някои от тях са базирани на дискретни разпределения за λ и β , които водят до уни-, би- и мулти-модалност. Използвани са биномното и геометричното разпределение. Също така, изследвани са смеси, базирани на непрекъснати разпределения – експоненциално, гама и бета. Интересно следствие е, че стандартното равномерно разпределение се явява смесено Кийс-разпределение като $\beta = 1$, а λ е експоненциално разпределена с интензитет едно. Да отбележим, че въпреки че тази смес не удовлетворява условие (1.7), тя е добре дефинирана.

Не на последно място, практическата приложимост на получените резултати е валидирана чрез споменатите по-горе бази от данни.

1.5 Zaeovski, T., Kyurkchiev, N.. On the Hausdorff saturation of some trigonometric-Kies families. Palestine Journal of Mathematics, 13, 2, Palestine Polytechnic University, 2024, ISSN:2219-5688, 249-262. SJR (Scopus):0.374 Q3 (Scopus)

Последната статия в тази област разглежда някои тригонометрични трансформации, приложени към разпределението на Кийс. Съответните кумулативни функции са

$$\begin{aligned}
H_{sin}(t) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-k\left(\frac{t}{1-t}\right)^b}\right)\right) \\
H_{cos}(t) &= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-k\left(\frac{t}{1-t}\right)^b}\right)\right) \\
H_{tan}(t) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-k\left(\frac{t}{1-t}\right)^b}\right)\right) \\
H_{cot}(t) &= 1 - \cot\left(\frac{\pi}{4}\left(2 - e^{-k\left(\frac{t}{1-t}\right)^b}\right)\right).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Теорема 2.7, която е вярна и при по-общи допускания, задава зависимост между Хаусдорфовите насищания на някои дуални разпределения – такива са двойките $\{\tilde{G} - sin; G - cos\}$, $\{\tilde{G} - cos; G - sin\}$, $\{\tilde{G} - tan; G - cot\}$ и $\{\tilde{G} - cot; G - tan\}$. С вълна е отбелязана кумулативната функция на дуалното разпределение, дефинирана чрез $\tilde{G}(t) = 1 - G(1 - t)$. Функцията $G(t)$ задава оригиналното разпределение върху интервала $(0, 1)$. Конкретни резултати за Хаусдорфовите насищания са доказани в Твърдение 4.1 ($cos - H$), Твърдение 4.2 ($sin - H$), Твърдение 4.3 ($sin - \tilde{H}$), Твърдение 5.1 ($tan - H$) и Твърдение 5.2 ($cot - H$).

Да отбележим, че стойностите на плътностите на тригонометричните трансформации (1.11) в дясната крайна точка (за $t = 1$) са нулеви, докато стойностите при $t = 0$ са изведени в Твърдение 3.1.

2 Идентифициране на хаос в смутени динамични системи. Zaevski, T., Kyurkchiev, N., Iliev, A., Kyurkchiev, V., Rahnev, A.. Studying chaos in a modified dynamical model: some applications. Axioms, 15, 5, MDPI, 2026, ISSN:2075-1680, DOI:10.3390/axioms15050327, 327. JCR-IF (Web of Science):1.5 Q2 (Web of Science)

В това изследване е изучено възможно хаотично поведение на динамична система при добавено смущение. То обобщава и уточнява някои резултати на [Wu and Feng \(2000\)](#). Разглежданата система е модификация на SIQR епидемиологичен модел – съкращението идва от английски език и означава *чувствителни, заразени, изолирани (под карантина) и възстановени индивиди*. Математически, моделът е зададен от системата от диференциални уравнения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -y + x^2 - \epsilon \left(\alpha y + xy + y \sum_{j=1}^N a_j \cos(j\omega t) \right), \end{cases} \quad (2.1)$$

Несмутената система е Хамилтонова, като

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + xy - \frac{x^3}{3}. \quad (2.2)$$

В Теорема 1 е доказано, че съществува единствена хомоклинична орбита със седлова точка $(0, 0)$ и център $(-1, 1)$. Тази орбита се задава чрез

$$\begin{aligned} x_h(t) &= -\frac{3}{2} \left(\operatorname{sech} \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2 \\ y_h(t) &= \frac{3}{2} \left(\operatorname{sech} \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2 \left(\tanh \left(\frac{t}{2} \right) + 1 \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Базирайки се на формули (2.3), можем да приложим теорията на Андронов-Мелников, [Melnikov \(1963\)](#), и да дефинираме съответния интеграл за смутената система (2.1)

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_h + y_h) \left(\alpha y_h + x_h y_h + y_h \sum_{j=1}^N a_j \cos(j\omega(t + t_0)) \right) dt. \quad (2.4)$$

Оценявайки числено Мелниковата функция (2.4) и нейните евентуални корени, прилагаме критерия на Мелников, за да идентифицираме наличието на хомоклинично запли-

тане между стабилните и нестабилните многообразия, което би довело до хаотично поведение.

В Глава 4 е предложено едно обобщение на модел (2.1) като, след нормиране, константите a_j се разглеждат като вероятностите на случайна величина, дефинирана върху първите N естествени числа. Използвайки комплексното представяне на косинуса, преобразуваме модела чрез характеристичната функция на тази случайна величина до

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x^2 - \epsilon \left(\alpha y + xy + \bar{a}y \frac{\Psi(\omega t) + \Psi(-\omega t)}{2} \right).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Да обърнем внимание, че в представянето (2.5), конкретният вид на разпределението не е от значение, така че можем да използваме произволно. При тези допускания, Мелниковият интеграл (2.4) се превръща в

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_h + y_h) \left(\alpha y_h + x_h y_h + \bar{a}y_h \frac{\Psi(\omega(t+t_0)) + \Psi(-\omega(t+t_0))}{2} \right) dt. \quad (2.6)$$

Аналогично, можем да добавим и смущение в първата компонента. За да получим по точни резултати, трябва да се разгледат конкретни разпределения. В статията това са равномерно върху интервал (c, d) и нормално. Имайки предвид, че за тях

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_{un}(x) + \Psi_{un}(-x)}{2} &= \begin{cases} \frac{\sin(dx) - \sin(cx)}{x(d-c)}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases} \\ \frac{\Psi_{norm}(x) + \Psi_{norm}(-x)}{2} &= e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}} \cos(\mu x),\end{aligned}\quad (2.7)$$

получаваме модел

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y + \epsilon \bar{A} e^{-\frac{\sigma^2 \nu^2 t^2}{2}} \cos(\mu \nu t) \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x^2 - \epsilon \left(\alpha y + xy + \bar{a}y \frac{\sin(d\omega t) - \sin(c\omega t)}{\omega t(d-c)} \right),\end{aligned}\quad (2.8)$$

на който съответства Мелниковият интеграл

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \bar{A} (x_h^2 - y_h) e^{-\frac{\sigma^2 \nu^2 (t+t_0)^2}{2}} \cos(\mu \nu (t+t_0)) + (x_h + y_h) \left(\alpha y_h + x_h y_h + \bar{a}y_h \frac{\sin(d\omega(t+t_0)) - \sin(c\omega(t+t_0))}{\omega(t+t_0)(d-c)} \right) \right\} dt. \quad (2.9)$$

Не на последно място, разгледани са и някои възможни приложения в теорията на антенните решетки.

3 Финансова математика.

В полето на финансовата математика са представени девет публикации, които попадат в трите най-важни области в тематиката – анализ и управление на риска, оценка на деривати и анализ на пазара на облигации (Fixed income).

3.1 Анализ и управление на риска.

Двете традиционни мярки, които се използват в анализа на финансовия риск, са VaR (Value-at-Risk) и AVaR (Averaged Value-at-Risk), също така известна като Expected Shortfall (ES). Основната разлика между тях е, че VaR показва максималната загуба, докато ES измерва средната загуба в най-лошите сценарии отвъд VaR. Въпреки своята фундаменталност, и двете мярки имат своите недостатъци. VaR дава критичното ниво, но не и какви точно са рисковете отвъд него. Също така, от теоретична гледна точка, тази мярка не е кохерентна – невинаги общият риск на портфейл е по-малък от сбора от рисковете на отделните активи. От друга страна, основният недостатък на ES е неговата голяма чувствителност към входните данни – тази мярка може да даде много различни стойности за активи с близък рисков профил. Всичко това мотивира търсенето и изучаването на нови алтернативи.

Вторият основен принос в тази област е използването на стохастични модели при описанието на изследваните активи. По принцип, рисковият профил се определя от редките събития, които се намират в опашките на разпределенията. Това води до неудобството да разполагаме с малък брой наблюдения, което не позволява използването на стандартни статистически методи. От друга страна, прилагането на някой от класическите модели би позволило неговото калибриране към цялата база данни с последващо изчисляване на рисковите мярки. Освен всичко друго, този подход отчасти преодолява основния недостатък на ES.

В тази област са представени три публикации:

1. Zaeovski, Ts., Nedeltchev, D.. From BASEL III to BASEL IV and beyond: Expected shortfall and expectile risk measures. *International Review of Financial Analysis*, 87, Elsevier, 2023, ISSN:1057-5219, DOI:10.1016/j.irfa.2023.102645, 102645. SJR (Scopus):1.83, JCR-IF (Web of Science):7.5 Q1, (Web of Science)
2. Zaeovski, T., Nedeltchev, D.. Moment Generating Function of the Averaged Log-returns in the Heston's Stochastic Volatility Model. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, 78, 3, „Prof. Marin Drinov“ Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 2025, ISSN:1310-1331, DOI:10.7546/CRABS.2025.03.01, 321-330. SJR (Scopus):0.179, JCR-IF (Web of Science):0.4 Q3 (Scopus)
3. Nedeltchev, D., Zaeovski, T.. Measuring market risk through Entropic VaR. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications*, 6, 1, NEU Press, 2026, ISSN:2791-8564, DOI:10.53391/2791-8564.1024, 251-278. SJR (Scopus):0.8 Q1 (Scopus)

3.1.1 Zaeovski, Ts., Nedeltchev, D.. From BASEL III to BASEL IV and beyond: Expected shortfall and expectile risk measures. International Review of Financial Analysis, 87, Elsevier, 2023, ISSN:1057-5219, DOI:10.1016/j.irfa.2023.102645, 102645. SJR (Scopus):1.83, JCR-IF (Web of Science):7.5 Q1, (Web of Science)

В тази публикация, заедно с класическите мярки VaR и ES, прилагаме и една сравнително нова рискова мярка, базирана на експектил (ERM, Expectile Risk Measure) – виж напр. [Bellini and Bernardino \(2017\)](#). Както споменахме по-горе, при анализа на рисковите мярки допускаме, че изследваният актив се задава чрез някой стохастичен модел. Нашият избор пада върху следните пет:

1. Блек-Шолс (Black-Scholes) – поради своята фундаменталност и честото му използване за еталон, [Black and Scholes \(1973\)](#).
2. Хестън (Heston) – модифицира модела на Black-Scholes чрез добавяне на стохастична волатилност. Това е може би моделът с най-малко параметри, който дава достатъчно реалистична конструкция, [Heston \(1993\)](#).
3. Бейтс (Bates) – добавя Гаусови скокове чрез сложен Поасонов процес в модела на Heston, [Bates \(1996\)](#).
4. Експоненциален модифицирано-стабилен (устойчив) модел (ETS, exponential tempered stable model). Активът се моделира като експонента от модифициран стабилен процес – вид безкрайно-активен процес на Леви с много подходяща структура, [Boyarchenko and Levendorskiĭ \(2000\)](#), [Carr et al. \(2002\)](#), [Bianchi et al. \(2010\)](#), [Rachev et al. \(2011\)](#).
5. Модел със стохастична волатилност и модифицирано стабилни скокове (stochastic volatility/tempered stable model, SVTS) – към модела на Heston са добавени скокове, представени от модифициран стабилен процес, [Zaeovski et al. \(2014\)](#).

Имайки предвид, че всички тези модели водят до хомогенна структура, можем да изчислим логаритмичната доходност на актив с ценови процес S_t като

$$\xi = \frac{1}{\Delta} \ln \frac{S_{t+\Delta}}{S_t}. \quad (3.1)$$

Ако бележим с $q(\cdot)$ квантилната функция на случайната величина ξ , мярките VaR и ES на ниво ϵ се дефинират като

$$\begin{aligned} VaR(\epsilon; \xi) &= -q_\xi(\epsilon) \\ ES(\epsilon; \xi) &= \frac{\int_0^\epsilon VaR(u; \xi) du}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В Твърдение 2.1 доказваме, че ES може да се изчисли чрез

$$ES(\epsilon; \xi) = \frac{\mathbb{E}[(\xi - q(\epsilon))^-]}{\epsilon} - q(\epsilon). \quad (3.3)$$

Да припомним, че по аналогия на квантила, който може да бъде намерен чрез линейната оптимизационна задача

$$q_\xi(\alpha) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \mathbb{E}[\alpha(\xi - x)^+ + (1 - \alpha)(\xi - x)^-] \right\}, \quad (3.4)$$

експектилът се дефинира като решението на следната квадратична задача

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \mathbb{E} \left[\epsilon((\xi - x)^+)^2 + (1 - \epsilon)((\xi - x)^-)^2 \right] \right\}. \quad (3.5)$$

В термините на финансовата математика се използва следното уравнение, чието решение е експектилната рискова мярка ERM

$$\epsilon \mathbb{E}[(\xi + x)^+] = (1 - \epsilon) \mathbb{E}[(\xi + x)^-]. \quad (3.6)$$

Както във формула (3.3) за ES, така и в (3.6) за ERM, изчисляването се базира на отрязаните очаквания. От друга страна, за всички по-горе споменати модели, с изключение на този на Black-Scholes, разполагаме само с характеристичните функции на възвръщаемостите, но не и с плътността. Затова в Твърдение 3.2 намираме отрязаните очаквания чрез характеристичните функции. Като следствие, в Теорема 3.2 извеждаме съответните формули за ES и ERM.

Теоретичните резултати са валидирани чрез изследване на рисковия профил на финансовия индекс S&P 500 за периода между 6-ти октомври 2004 и 1-ви юли 2022.

3.1.2 Zaeovski, T., Nedeltchev, D.. Moment Generating Function of the Averaged Log-returns in the Heston's Stochastic Volatility Model. Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, 78, 3, „Prof. Marin Drinov“ Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 2025, ISSN:1310-1331, DOI:10.7546/CRABS.2025.03.01, 321-330. SJR (Scopus):0.179, JCR-IF (Web of Science):0.4 Q3 (Scopus)

Въпреки че резултатите от тази статия са важни сами по себе си, те се използват съществено и в следващата публикация, посветена на т.нар. Ентропийна VaR. Нуждата от тях се поражда от факта, че настоящата стойност на волатилността (риска) в модела на Хестън е ненаблюдаем пазарен сигнал. Така че когато този модел се използва в практиката, се налага конкретната стойност да бъде екстраполирана на всяка стъпка. Освен всичко, няма единомислие в научната и финансовата общност как точно да се направи това. Решението, което предлагаме, е да усредним спрямо стационарното разпределение на волатилността, вместо да работим с конкретна стойност.

Моделът със стохастична волатилност на [Heston \(1993\)](#) е базиран на двумерен дифузионен процес – едната компонента е за цената на актива, а втората за неговата волатилност:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dB_t \\ dV_t &= \xi (\eta - V_t) dt + \theta \sqrt{V_t} d\tilde{B}_t. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Този модел се определя от пет параметъра: μ е доходността, ξ е скоростта на завръщане към дългосрочното средно η , θ е волатилност на волатилността, а ρ е корелационният коефициент между двата Винерови процеса. Можем да считаме, че $S_0 = 1$, докато за началната стойност за волатилността задаваме $V_t = v$. Процесът на волатилността V_t допуска стационарно разпределение, което е гама с параметри $\alpha = \frac{2\xi}{\theta^2}$ и $\beta = \frac{2\xi\eta}{\theta^2}$. Именно по него ще усредняваме началната волатилност v .

Основният проблем, който е изследван в тази статия, е свързан с функцията пораждаща моментите след усредняването. Да припомним, че въпреки връзката с характеристичната функция, функцията генерираща моментите не е дефинирана навсякъде. Нейната дефиниционна област в оригиналния модел е определена в [del Baño Rollin et al. \(2010\)](#) – тя е интервал (x^-, x^+) около нулата. Основна роля имат корените $x_{1,2}$ на квадратното уравнение

$$-x^2\theta^2(1 - \rho^2) + x\theta(\theta - 2\rho\xi) + \xi^2 = 0. \quad (3.8)$$

Нека да означим с $\psi(u; v)$ функцията пораждаща моментите, ако началната волатилност е v . В Твърдение 3.1 е доказано, че съществува случайна величина $\tilde{V}$, чиято функция пораждаща моментите е

$$\tilde{\Psi}(u) = \int_0^\infty \psi(u; v) g_\gamma(v) dv, \quad (3.9)$$

където $g_\gamma(\cdot)$ е плътността на гама разпределението.

Основните резултати са свързани с дефиниционната област на функцията (3.9) и местоположението на двете абсциси на сходимост спрямо константите $x^{-,+}$ и $x_{1,2}$. Тези резултати са доказани в Теорема 3.1–4.

3.1.3 Nedeltchev, D., Zhevski, T.. Measuring market risk through Entropic VaR. Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications, 6, 1, NEU Press, 2026, ISSN:2791-8564, DOI:10.53391/2791-8564.1024, 251-278. SJR (Scopus):0.8 Q1, (Scopus)

В тази публикация е изследвана Ентропийната стойност под риск (Entropic-Value-at-Risk, EVaR), въведена от [Ahmadi-Javid \(2012\)](#). Тя е избрана измежду наличните мерки въз основа на нейните предимства – тя е кохерентната горна граница на VaR и ES. Тази мярка е приложена към петте по-горе използвани модели. За всички тях са получени

формули в затворена или полузатворена форма. Получените теоретични резултати са приложени към историческа извадка за индекса S&P 500. Както споменахме по-горе, има няколко предимства от използването на стохастичен модел вместо директното прилагане на мярката към статистическите данни. Основното от тях е, че подходящ модел може да улови присъщите характеристики на финансовия актив, които са скрити във времевите редове поради недостатъчен брой наблюдения. Това е особено вярно за опашките на разпределението, които са тясно свързани с измерването на риска.

Нека отново бележим с ξ случайната величина, която представя логаритмичната доходност, и за момент да допуснем, че функцията пораждаща моментите ѝ е дефинирана върху цялата реална ос, както в оригиналната статия на [Ahmadi-Javid \(2012\)](#). Използвайки неравенството на Чернов, може да покажем, че

$$VaR(\epsilon; \xi) \leq \inf_{z>0} \frac{1}{z} \ln \left(\frac{M(-z; \xi)}{\epsilon} \right), \quad (3.10)$$

където $M(\cdot; \xi)$ е функцията пораждаща моментите на случайната величина ξ . Това дава основание EVaR при ниво ϵ да се дефинира като

$$EVaR(\epsilon; \xi) = \inf_{z>0} \frac{1}{z} \ln \left(\frac{M(-z; \xi)}{\epsilon} \right). \quad (3.11)$$

Първият проблем, който се появява, е, че, с изключение на модела на Black-Scholes, всички разглеждани модели нямат функция пораждаща моментите навсякъде. Естествено решение на този проблем е да редуцираме интервала, в който се взема $\inf$, до дефиниционната ѝ област. Оказва се, че въпреки направената модификация, Ентропийната VaR запазва кохерентността си. Да отбележим, че резултатите от предходната публикация се използват именно на това място, понеже три от разглежданите модели са базирани на [Heston \(1993\)](#).

Основните теоретични резултати са доказани в Глава 3 – изведени са съответните формули за EVaR за всичките пет модела.

Не на последно място, проведено е детайлно емпирично изследване на VaR, ES, ERM, и Ентропийната VaR, приложени върху финансовия индекс S&P 500 за периода между 25-ти септември, 2008 г и 1-ви юли, 2022 г. Той включва както спокойни пазарни цикли, така и кризисни. Всички модели са калибрирани върху подвижен прозорец с размер 1 000 дни, което позволява да се провери динамиката на четирите рискови мярки. Наред с всички направени изводи трябва да отбележим, че Ентропийната VaR реагира много бързо при промяна на пазарните реалности.

3.2 Американски тип деривати.

Американските деривати са едни от най-търгуемите финансови инструменти на съвременните борси. Да отбележим, че определението не се дължи на страна на произход или търговия. Определението американски означава, че дават право на собственика си да избере момента на упражняване. Това ги различава от другия голям клас, а именно европейските, които могат да се изпълнят единствено при падежа. Математически погледнато, дериватите в американски стил водят до задача от теорията на оптималното спиране (трябва да определим кога упражняването е най-добрата стратегия), която може да се разглежда и като диференциално уравнение със свободна граница.

От друга страна, канселируемите американски деривати дават право и на издателя да прекрати контракта преди падежа, заплащайки за това неустойка над обичайния пейоф. Тези инструменти водят до задача от теорията на игрите.

Нашите изследвания са ситуирани в термините на класическия модел на Black-Scholes чрез допускането, че основният актив е задвижван от лог-нормалния процес

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (3.12)$$

спрямо рисково-неутралната мярка – r е безрисковият лихвен процент, а σ е волатилността. Дивидентите, които основният актив плаща, са въведени по подобие на McKean (1965) и Shiryaev et al. (1995) чрез допълнителен дисконтиращ фактор λ към пейофите. Връзката с класическия подход, базиран на намаляване на безрисковия процент с нивото на дивидента, е доказана в Твърдение 2.2 от Zhevski (2025), публикация, която е представена в настоящия конкурс. Налагаме изискване за неотрицателност на λ , както и на общия дисконтиращ фактор, $r + \lambda > 0$.

В областта са представени шест публикации – по три за обикновените американски деривати и за техните канселируеми варианти:

1. Zhevski, T.. On the American style futures contracts. Croatian Operational Research Review, 15, 1, Croatian Operational Research Society, 2024, ISSN:1848-0225, 1848-9931, DOI:10.17535/crorr.2024.0004, 39-50. SJR (Scopus):0.251, JCR-IF (Web of Science):0.4 Q3 (Scopus)
2. Zhevski, T., Sariev, H., Savov, M.. A Fast and Accurate Numerical Approach for Pricing American-Style Power Options. Mathematics, 13, 12, MDPI, 2025, ISSN:2227-7390, DOI:10.3390/math13122031, 2031. SJR (Scopus):0.497, JCR-IF (Web of Science):2.3 Q1, (Web of Science)
3. Zhevski, T.. On the ϵ -optimality of American options. China Finance Review International, 15, 4, Emerald, 2025, ISSN:2044-1398, DOI:10.1108/CFRI-06-2024-0361, 688-714. SJR (Scopus):1.818, JCR-IF (Web of Science):10.8 Q1 (Web of Science)
4. Zhevski, T.. Pricing finite maturity game call options with convertible features. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 55(8), 3361–3384. Taylor and Francis Ltd.,

2026, ISSN:0361-0918, DOI:10.1080/03610918.2025.2488972, SJR (Scopus):0.47, JCR-IF (Web of Science):0.9, Q2 (Scopus)

5. Zhevski, T.. On the impact of the penalty on the cancellable American options. Modern Stochastics: Theory and Applications, 13, 1, VTeX, 2026, ISSN:2351-6054 (Online) 2351-6046 (Print), DOI:10.15559/25-VMSTA286, 83-115. SJR (Scopus):0.598, JCR-IF (Web of Science):1.2 Q2 (Scopus)
6. Zhevski, T.. On the put-call duality of the game options. Mathematical Modelling and Analysis, 31, 3, Vilnius Tech, 2026, ISSN:1392-6292, 1648-3510, DOI:10.3846/mma.2026.24619, 542-560. SJR (Scopus):0.504, JCR-IF (Web of Science):1.6 Q1, (Web of Science)

3.2.1 Zhevski, T.. On the American style futures contracts. Croatian Operational Research Review, 15, 1, Croatian Operational Research Society, 2024, ISSN:1848-0225, 1848-9931, DOI:10.17535/crorr.2024.0004, 39-50. SJR (Scopus):0.251, JCR-IF (Web of Science):0.4 Q3 (Scopus)

Фючърсните контракти са финансови инструменти, които фиксират дата и цена за покупка на основния актив. Има няколко причини, поради които тези деривати са в европейски стил, т.е. нямат право на ранно упражняване. Първо, в реалния финансов свят почти няма борсово търгувани фючърси, които да позволяват предсрочно изпълнение – те са по-скоро стандартизирани договори с твърд падеж. Също така, лесно е да се покаже, че ако основният актив не плаща дивиденди, то американският вид фючърси се изражда, в смисъл, че ранното упражняване никога не е оптимално за дълги позиции, и е винаги оптимално за къси. В тази връзка в практиката фючърсите се използват в търговията основно на суровини като нефт, газ, жито, и т.н., които не плащат дивиденди – това прави наличието на фючърси от американски вид безсмислено. От друга страна, в тази статия показваме, че задачата не е тривиална, когато основният актив плаща дивиденди. Пейофите за дълга и къса позиция са съответно $N(t, x) = e^{-\lambda t}(x - K)$ и $N(t, x) = e^{-\lambda t}(K - x)$. Константата λ е допълнителният дисконтиращ фактор, който може да се разглежда и като дивидент. Функцията $N(t, x)$ дава стойността, която собственикът на деривата би получил, ако упражни в момент t при спот-цена $S_t = x$.

Някои аналогии с добре изучения клас на опциите показват, че оптималното множество за фючърс в дълга позиция е над дадена граница (известна като оптимална граница) и под друга за къса позиция. Имайки предвид това, продължаваме по следната схема:

1. Намираме стойността на оптималната граница, когато времето до падежа клони към 0.
2. Решаваме задачата за намиране на оптимална граница и цена в явен вид за безсрочни фючърси ($T = \infty$).

3. В случая на краен падеж, апроксимираме оптималната граница чрез някои свойства за първо достигане на ниво от Брауново движение.
4. Веднъж имайки приближение на оптималната граница, диференциалното уравнение със свободна граница, което описва цената на деривата, се превръща в задача в известна област. За нейното решаване е приложена схемата на Crank-Nicolson.

3.2.2 Zaeovski, T., Sariev, H., Savov, M.. A Fast and Accurate Numerical Approach for Pricing American-Style Power Options. Mathematics, 13, 12, MDPI, 2025, ISSN:2227-7390, DOI:10.3390/math13122031, 2031. SJR (Scopus):0.497, JCR-IF (Web of Science):2.3 Q1, (Web of Science)

В тази публикация са изследвани финансови инструменти с пейофи

$$\begin{aligned} N(t, x) &:= e^{-\lambda t} G(x) = e^{-\lambda t} (x^n - K^n)^+ - \text{call} \\ N(t, x) &:= e^{-\lambda t} G(x) = e^{-\lambda t} (K^n - x^n)^+ - \text{put}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

където n е положителна степен. При $n > 1$ тези инструменти биха били от интерес за инвеститори, които търсят по-голяма премия за позиции далече от страйка, и обратно за $n < 1$.

Базирайки се на Твърдение 3, можем да заключим, че поведението на степенните опции е подобно на това на обикновените американски – упражняването на кол опция се извършва, когато активът е над оптималната граница, и под нея за пут. Също така, тази граница е намаляваща функция по времето за кол опции и растяща за пут вариантите. Оказва се, че константата L , дефинирана като

$$L = (n - 1) \left(r + \frac{\sigma^2}{2} n \right) - \lambda \quad (3.14)$$

има голямо значение за кол опциите – ранното упражняване никога не е оптимално, когато $L \geq 0$ (Твърдения 4 и 9, Следствие 1). Този резултат е в съгласие с добре известния факт, че упражняване преди падежа не е оптимално за обикновена кол опция, ако основният актив не плаща дивиденди ($\lambda = 0$). В тези случаи американските опции се превръщат в европейски – в Твърдение 8 са изведени цените на тези деривати. Те се явяват аналози на класическите формули на Black-Scholes.

По-горе представената схема за оценка на американски фючърсни контракти е приложена и към степенните опции, като задачата при липса на падеж е решена в затворена форма. Влиянието на степента n е изследвано в детайли.

Също така, в част 2.3 са разгледани т.нар. опции с ограничение за цената, чиито пейофи са

$$\begin{aligned} N(t, x) &= e^{-\lambda t} (x^n \wedge F^n - K^n)^+ - \text{call} \\ N(t, x) &= e^{-\lambda t} (K^n - x^n \vee F^n)^+ - \text{put}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тези варианти въвеждат ограничение за цената на основния актив, при която опцията може да бъде упражнена – то се задава чрез константата F .

3.2.3 Zaevski, T. On the ϵ -optimality of American options. China Finance Review International, 15, 4, Emerald, 2025, ISSN:2044-1398, DOI:10.1108/CFRI-06-2024-0361, 688-714. SJR (Scopus):1.818, JCR-IF (Web of Science):10.8 Q1 (Web of Science)

В тази статия разглеждаме американски опции при допускането за суб-оптимално упражняване, т.е. притежателят не упражнява в оптималния момент (при достигане на оптималната граница). Пейофите за тези опции се дават чрез

$$\begin{aligned} N(t, x) &= e^{-\lambda t} (x - K)^+ - \text{call} \\ N(t, x) &= e^{-\lambda t} (K - x)^+ - \text{put}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

където K е страйкът. Да припомним, че кол опцията дава право (но не и задължение) за купуване на основния актив на цена K , докато пут опцията дава право за продажба. На реалните финансови пазари тези права се трансформират в получаване на пейофа.

Първата задача е да дефинираме по подходящ математически начин тази суб-оптималност. Идеята е да използваме следната аналогия от класическия анализ: ако една непрекъснатата функция $f(\cdot)$ има строг максимум в точка x_0 , то за всяко достатъчно малко ϵ съществуват константи x_1 и x_2 , такива че $x_1 < x_0 < x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$ и $x_2 - x_1 = \epsilon$. В случая на американски опции, търсим ивица $(a(\cdot), b(\cdot))$ (отговаря на интервала (x_1, x_2)) около оптималната граница $c(t)$ (отговаря на точката x_0) с ширина ϵ , такава, че упражняването при достигане до ниво $a(t)$ има същия финансов резултат както и до $b(t)$. Разбира се, изискването за ширина ϵ води до $b(t) = a(t) + \epsilon$.

Нека да разгледаме кол опциите. За разлика от функционалния случай, тук има една тънкость, която трябва да се докаже, за да има смисъл горната конструкция. Да допуснем, че в момент t_0 активът има спот цена $S_{t_0} = x$, $x < a(t_0)$ и функциите $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ удовлетворяват горните изисквания. Ако бележим с T падежа, трябва да покажем, че за всяка двойка (t, x) (начален момент–спот цена), такава че $t \in [t_0, T]$ и $x \leq a(t)$, изискването за един и същ финансов резултат на стратегиите за упражняване при достигане на $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ е валидно (Твърдение 3.2). Това означава, че ϵ -оптималната ивица не зависи от началната стойност на актива. Разглеждайки граничния случай $x = a(t)$ за спот цената, можем да дефинираме функцията $a(\cdot)$, която наричаме *ϵ -оптимална граница*, чрез равенството (Дефиниция 3.1)

$$(a(t) - K)^+ = M(t, a(t); a(\cdot) + \epsilon), \quad (3.17)$$

където $M(t, x; f(\cdot))$ е финансовият резултат на стратегия за упражняване при достигане на ниво $f(t)$. Ако бележим със ζ Марковския момент (stopping time) свързан с достигането до това ниво, то

$$M(t, x; f(\cdot)) = \mathbb{E}^{t,x} [e^{-r(\zeta-t)} N(\zeta, S_\zeta)] \equiv \mathbb{E}^{t,x} [e^{-r(\zeta-t)} N(\zeta, f(\zeta))] . \quad (3.18)$$

Да отбележим, че лявата страна на формула (3.17) е финансовият резултат на стратегията за упражняване при достигане до функцията $a(\cdot)$ ако спот цената е върху нея (граничния случай), което става веднага.

Изведени са основните свойства на ϵ -оптималната граница. Първо, доказваме, че тя е над страйка – Твърдение 3.1. След това намираме стойността на тази граница в падежа – оказва се, че тя не зависи от ϵ , т.е. винаги е равна на същинската оптимална граница (Твърдение 3.3), която се достига за $\epsilon \rightarrow 0$. Задачата при липса на падежни ограничения е решена в затворена форма – част 3.3. След това, в части 3.4 и 3.5 конструираме алгоритъм за апроксимиране на цялата ϵ -оптимална граница при краен времеви хоризонт.

Задачата за път опции е решена по аналогия. Фактът, че множеството от възможните стойности на основния актив е ограничено отдолу (от нулата), за разлика отгоре, налага да се направят някои промени в дефиницията за ϵ -оптималност. Вместо да използваме формула (3.17), ние я модифицираме до

$$(K - a(t))^+ = M(t, a(t); \max\{a(\cdot) - \epsilon, 0\}), \quad (3.19)$$

след което прилагаме предложения метод за кол опции.

Също така, да отбележим, че представената схема работи и когато ϵ не е константа, а функция по времето.

3.2.4 Zaeviski, T. Pricing finite maturity game call options with convertible features. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 55(8), 3361–3384. Taylor and Francis Ltd., 2026, ISSN:0361-0918, DOI:10.1080/03610918.2025.2488972, SJR (Scopus):0.47, JCR-IF (Web of Science):0.9, Q2 (Scopus)

Следващите три публикации са посветени на т.нар. канселируеми американски опции. Те са въведени в литературата под името *игрови опции* от Kifer (2000). Както се вижда от самото име, оценяването на този вид финансови инструменти е задача от теорията на игрите (Dynkin (1969), Ekström and Peskir (2008), Peskir (2009)). Основната разлика със стандартните американски опции е, че канселируемите предоставят на издателя също право за прекратяване на контракта, като той дължи определена неустойка за него. Първоначално, е прието тя да е константа по времето.

В представените статии разглеждаме три-компонентни неустойки – η_1 пропорция от обичайния пейоф, η_2 брой акции от основния актив, и η_3 фиксирана сума. Тази структура е въведена в Zaeviski (2023), където е изучен случаят без падежно ограничение. Пейофите за този вид опции са

$$\begin{aligned} N_1(t, x) &= e^{-\lambda t} (x - K)^+ \\ N_2(t, x) &= e^{-\lambda t} (\eta_1 (x - K)^+ + \eta_2 x + \eta_3), \end{aligned} \quad (3.20)$$

т.е. това са сумите, които издателят дължи, ако той (N_2) или притежателят (N_1) упражни опцията в момент t при спот цена x . За път опциите имаме

$$\begin{aligned} N_1(t, x) &= e^{-\lambda t} (K - x)^+ \\ N_2(t, x) &= e^{-\lambda t} (\eta_1 (K - x)^+ + \eta_2 x + \eta_3). \end{aligned} \quad (3.21)$$

В тази статия разглеждаме само кол вариантите. Нашето изследване започва с определяне на формата на оптималните множества и съответните граници (Глава 3). Както и при стандартните американски опции, ако основният актив не плаща дивиденди ($\lambda = 0$), предварителното упражняване никога не е оптимално за притежателя. От друга страна, ако $\lambda > 0$, те са намаляващи (нерастящи) по времето (обратното по оставащото време до падежа). Оказва се, че следните три варианта са определящи. При достатъчно малко време до падежа, прекратяването на контракта не е оптимално за издателя – за него би било по-изгодно да изчака падежа, отколкото да плати неустойката. Така оптималното му множество е празно, а съответната граница изчезва. За междинните оставащи времена до падежа единствено страйкът е оптимална точка за издателя. И последно, при достатъчно малки неустойки, съществува граница за падежа, отвъд която оптималното множество за издателя е ивица с долна граница страйка. Изведен е метод за намиране на критичните стойности. Оптималното множество за притежателя се формира от всички точки над функция, известна като оптимална граница за притежателя. Тя е винаги над тази на издателя и е равна на границата за стандартната американска опция близо до падежа. Така множеството, в което опцията се задържа и от двамата участници, се състои от две части – точките между двете оптимални граници и тези под страйка.

Базирайки се на тези резултати, в Глава 4 е конструиран метод за апроксимиране на оптималните граници. Оценяването на този вид деривати е направено в Глава 5 чрез схемата на Crank-Nicolson за диференциалното уравнение, до което води съответната задача със свободна граница. В някои случаи са получени формули в затворен вид.

Случаят $\lambda = 0$ е разгледан в Глава 6. Както споменахме по-горе, ако $\lambda = 0$, предварителното упражняване никога не е оптимално за притежателя – неговата оптимална граница става равна на безкрайност. Така стандартните американски опции се превръщат в европейски, чиито цени се дават с формулите на Black-Scholes. Имайки предвид всичко това, модифицираме схемата, представена в Глави 4 и 5.

3.2.5 Zaeovski, T.. On the impact of the penalty on the cancellable American options. Modern Stochastics: Theory and Applications, 13, 1, VTeX, 2026, ISSN:2351-6054 (Online) 2351-6046 (Print), DOI:10.15559/25-VMSTA286, 83-115. SJR (Scopus):0.598, JCR-IF (Web of Science):1.2 Q2 (Scopus)

Както видяхме по-горе, съществуват две критични нива за оставащото време до падежа $\tau_1 < \tau_2$, в които характеристиките на канселируемите опции се променят по следния начин:

1. Ако времето до падежа τ е по-малко от τ_1 , то опцията е стандартна американска.
2. Ако $\tau_1 < \tau \leq \tau_2$, опцията се превръща в специфичен вид американски дериват, (L, v) -опция, който има следните характеристики. (L, v) -опцията изтича в падежа или когато основният актив достигне до страйка при оставащо време до падежа повече от v , като в последния случай плаща стойност L . Притежателят има право да упражни по всяко време, получавайки обичайния пейоф, докато издателят няма права за ранно упражняване. В конкретния случай $L = \eta_2 K + \eta_3$ и $v = \tau_1$.
3. Същинска канселируема опция.

Резултатите за асимптотичния случай без падежно ограничение (безсрочни опции), получени в [Zaevski \(2023\)](#), показват, че горните три варианта остават в сила и за безсрочните опции. Да отбележим, че в този случай времето v за (L, v) -американските опции не е от значение. Следната характеристика за критичните стойности τ_1 и τ_2 (при краен падеж) може да бъде изведена като следствие от вида на съответната безсрочна опция:

1. Ако безсрочната опция е стандартна американска, то $\tau_1 = \tau_2 = \infty$.
2. Ако безсрочната опция е L-американска, то $\tau_1 < \tau_2 = \infty$.
3. Ако безсрочната опция е същинска канселируема опция, то $\tau_1 < \tau_2 < \infty$.

Имайки предвид това, можем да определим съответните стойности на τ_1 и τ_2 , ако те съществуват.

Основните резултати в разглежданата публикация са в идентифицирането на кои стойности на коефициентите η_1 , η_2 , и η_3 , които характеризират неустойката, до кои случаи за безсрочните опции водят. Резултатите за пут опциите са получени в част 4 и формулирани в Теорема 4.16. Като принцип, може да заключим, че малките стойности на неустойката водят до същинска канселируема опция, междинните до L-американска, а големите до стандартна американска. Трябва да отбележим, че ако $r \geq 0$, то пут опцията не може да бъде същинска канселируема. Метод за намиране на критичните стойности за η_1 , η_2 и η_3 е даден в Следствие 4.17. Съответните резултати за кол вариантите са получени в Част 5 и формулирани в Теорема 5.4.

3.2.6 Zaevski, T.. On the put-call duality of the game options. Mathematical Modelling and Analysis, 31, 3, Vilnius Tech, 2026, ISSN:1392-6292, 1648-3510, DOI:10.3846/mma.2026.24619, 542-560. SJR (Scopus):0.504, JCR-IF (Web of Science):1.6 Q1, (Web of Science)

Добре известно е, че съществува дуалност между стандартните пут и кол американски опции, в смисъл, че една пут опция може да се оцени като кол чрез смяна на параметрите – [Peskir and Shiryaev \(2002\)](#), [Fajardo and Mordecki \(2006\)](#), [Eberlein et al. \(2008\)](#). Оказва се, че всички тези аналогии не са валидни при канселируемите опции

с фиксирана неустойка. В тази публикация е получен резултат, който дава дуалност при допускане за три-компонентна неустойка. Случаите за краен и безкраен срок на падежа са разгледани поотделно – Теорема 3 за безсрочните опции и Теорема 4 при краен падеж. Те гласят следното:

Да разгледаме $\{r, \lambda, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ -модел и нека $A(t) < B(t)$ са оптималните граници за канселируема американска пут опция – съответно за притежателя и издателя. Да отбележим, че $B(t)$ не съществува близо до падежа. Нека също така x е константа, такава че

$$0 \leq x \leq \min \{ \eta_1 - 1, \eta_2 \} + \frac{\eta_3}{K}. \quad (3.22)$$

Да разгледаме кол опция спрямо модел с параметри

$$\left\{ -r, r + \lambda, \eta_1 + \frac{\eta_3}{K} - x, x, K(\eta_2 - x) + \eta_3 \right\}. \quad (3.23)$$

Оптималните граници за тази опция са

$$A_{call}(t) = \frac{K^2}{A(t)}; \quad B_{call}(t) = \frac{K^2}{B(t)}, \quad (3.24)$$

съответно за притежателя и издателя. Нещо повече, цените на тези опции, $P(S_0; \cdot)$ и $C(S_0; \cdot)$, са свързани като

$$\frac{S_0}{K} C \left(\frac{K^2}{S_0}; -r, r + \lambda, \eta_1 + \frac{\eta_3}{K} - x, x, K(\eta_2 - x) + \eta_3 \right) = P(S_0; r, \lambda, \eta_1, \eta_2, \eta_3). \quad (3.25)$$

След точката и запетаята са параметрите на модела.

За безсрочните опции извеждаме също така и уравнения в полиномиален вид за оптималните граници. Доказваме съществуване и единственост на техните решения, както и предоставяме метод за тяхното получаване. Този резултат е важен сам по себе си, тъй като настоящата литература в областта се основава на обръщане на няколко функции или на решаване на нелинейни системи, което може да доведе до някои изчислителни трудности и значителни грешки за екстремни стойности на параметрите.

Важно е да се отбележи, че така установената дуалност не е валидна при класическото предположение за фиксирана неустойка. Полученият резултат показва важността на допускането за три-компонентни неустойки – в някакъв смисъл, той дава затвореност на множеството от пут и кол опции.

3.3 Крива на доходност. Zaeovski, Ts.. Building the yield curve in low-liquidity markets. Data Science in Finance and Economics, 6, 3, AIMS Press, 2026, ISSN:2769-2140, DOI:10.3934/DSFE.2026014, 397-424. SJR (Scopus):0.44, JCR-IF (Web of Science):2.8 Q1 (Web of Science)

Това изследване предлага нов начин за извличане на кривата на доходност при недостатъчна информация и е мотивирано от спецификите на българския пазар на държавни ценни книжа (ДЦК). Държавните облигации представляват дългов инструмент, който изплаща фиксирана стойност в момента на падеж. Постигнатата цена на този инструмент определя каква е доходността до падежа. Облигациите с различни падежи водят до различни доходности, които формират съответната крива. По принцип, когато имаме достатъчно ликвиден (вторичен) пазар, можем да извлечем стойностите в достатъчно точки, след което, чрез подходяща интерполация, да реконструираме цялата крива. Не така стои въпросът, когато няма достатъчно наблюдения или когато има съмнения за тяхната достоверност. Има две фундаментални изследвания по тази тематика, Cortazar et al. (2007) и Nagy (2020), и двете базирани на филтъра на Калман. Въпреки своята значимост, те продължават да се базират на изискване за значително количество данни, макар и по-редки от обичайното.

От друга страна, както споменахме по-горе, в това изследване са отчетени спецификите на пазара на българските ДЦК – цялата информация е достъпна на официалния уеб-сайт на БНБ. За съжаление, наличните данни за вторичния пазар, въпреки стремежа за изчерпателност, практически не позволяват оценяването на кривата на доходност. Основната причина е, че на много дати са докладвани сделки за една и съща емисия, но със значителна разлика в цените. Това се дължи на различни причини, сред които много предварителни договори, оформени по-скоро като фючърсни сделки, но докладвани на датата на изпълнение, много РеПо сделки, и т.н. При това положение, за оценка на кривата на доходност трябва да се разчита на докладите от първичния пазар. Основният проблем от научна гледна точка е, че правителството сравнително рядко емитира нов дълг, а на датите, когато го прави, има само по една емисия. Това прави практически невъзможна апроксимацията на кривата на доходност чрез който и да е от стандартните методи.

Подходът, който е предложен в разглежданата статия, е да запълним липсващата информация с допускането, че някой от класическите афинни стохастични модели за късата лихва работи добре и на българския пазар. В конкретното изследване са използвани моделите на Vasicek и Cox-Ingersoll-Ross. Следващата стъпка е този модел да бъде калибриран. За разлика от стандартните статистически методи, които разчитат на набор от еднородни наблюдения за дадена случайна величина, ние използваме преходните разпределения. С други думи, използвайки серия от наблюдения на цените на разнородни емисии от ДЦК и избрания стохастичен модел, получаваме времева серия за късата лихва. Последната стъпка е да намерим за кои параметри на модела, тази времева серия е най-правдоподобна. Това позволява аналитично построяване на

кривата на доходност.

За да се валидира предложената схема е използвана изчерпателна база от данни за US дългови инструменти за период от 1961г. досега и падежи с период между 1 месец и 30 години. Чрез случайно генериране на 100 числа измежду 1 и 360, създаваме времева серия от цени на бондове с падежи след съответния брой месеци – само по една облигация на ден. След това прилагаме предложения метод върху тази редуцирана база и проверяваме доколко получената крива е близка до реално наблюдаваната. Тази процедура е извършена върху периоди с различна пазарна динамика – спокойни, волатилни, кризисни, КОВИД 19. Получените емпирични резултати потвърждават състоятелността на предложения метод.

Литература

- A. Ahmadi-Javid. Entropic value-at-risk: A new coherent risk measure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 155:1105–1123, 2012.
- D. Bates. Jumps and stochastic volatility: The exchange rate processes implicit in deutsche-mark options. *Review of Financial Studies*, 9:69–107, 1996.
- F. Bellini and E. Di Bernardino. Risk management with expectiles. *The European Journal of Finance*, 23(6):487–506, 2017.
- M. Bianchi, S. Rachev, Y.S. Kim, and F. Fabozzi. Tempered stable distributions and processes in finance: Numerical analysis. In *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*, pages 33–42, Milano, 2010. Springer Milan. ISBN 978-88-470-1481-7.
- F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- S.I. Boyarchenko and S.Z. Levendorskiĭ. Option pricing for truncated lévy processes. *International journal of theoretical and applied finance*, 3(03):549–552, 2000.
- P. Carr, H. Geman, D. Madan, and M. Yor. The fine structure of asset returns: An empirical investigation. *Journal of Business*, 75(2):305–332, 2002.
- G. Cortazar, E.S. Schwartz, and L.F. Naranjo. Term-structure estimation in markets with infrequent trading. *International Journal of Finance & Economics*, 12(4):353–369, 2007.
- S. del Baño Rollin, A. Ferreira-Castilla, and F. Utzet. On the density of log-spot in the Heston volatility model. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(10):2037–2063, 2010. ISSN 0304-4149. doi: <https://doi.org/10.1016/j.spa.2010.06.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414910001560>.
- E.B. Dynkin. A game-theoretic version of an optimal stopping problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 185(1):16–19, 1969. in Russian.
- E. Eberlein, Antonis A. Papapantoleon, and A.N. Shiryaev. On the duality principle in option pricing: semimartingale setting. *Finance and Stochastics*, 12(2):265–292, 2008.
- E. Ekström and G. Peskir. Optimal stopping games for Markov processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(2):684–702, 2008.
- J. Fajardo and E. Mordecki. Symmetry and duality in Lévy markets. *Quantitative finance*, 6(3):219–227, 2006.
- S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.

- J.A. Kies. The strength of glass performance. In *Naval Research Lab Report*, volume 5093. Washington, D.C., 1958.
- Y. Kifer. Game options. *Finance and Stochastics*, 4(4):443–463, Aug 2000. ISSN 0949-2984. doi: 10.1007/PL00013527. URL <https://doi.org/10.1007/PL00013527>.
- C. Satheesh Kumar and S.H.S. Dharmaja. On some properties of Kies distribution. *Metron*, 72(1):97–122, 2014.
- H.P. McKean. A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics. *Industrial Management Review*, 6(2):32–39, 1965.
- V. Melnikov. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 12:1–56, 1963.
- K. Nagy. Term structure estimation with missing data: Application for emerging markets. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 75:347–360, 2020.
- G. Peskir. Optimal stopping games and Nash equilibrium. *Theory of Probability & Its Applications*, 53(3):558–571, 2009.
- G. Peskir and A.N. Shiryaev. A note on the call-put parity and a call-put duality. *Theory of Probability & Its Applications*, 46(1):167–170, 2002.
- S.T. Rachev, Y.S. Kim, M.L. Bianchi, and F.J. Fabozzi. *Financial models with Lévy processes and volatility clustering*. John Wiley & Sons, 2011.
- B. Sendov. *Hausdorff approximations*, volume 50. Springer Science & Business Media, 1990.
- A.N. Shiryaev, Y.M. Kabanov, D.O. Kramkov, and A.V. Mel'nikov. Toward the theory of pricing of options of both European and American types. II. continuous time. *Theory of Probability & Its Applications*, 39(1):61–102, 1995.
- L.-I. Wu and Z. Feng. Homoclinic bifurcation in an siqr model for childhood diseases. *Journal of Differential Equations*, 168(1):150–167, 2000.
- T. Zaeveski. Perpetual cancellable American options with convertible features. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 10(4):367–395, 2023. ISSN 2351-6046 (print), 2351-6054 (online). doi: 10.15559/23-VMSTA230. URL <https://www.vmsta.org/journal/VMSTA/article/273/read>.
- T. Zaeveski. On the ϵ -optimality of American options. *China Finance Review International*, 15(4):688–714, 02 2025. ISSN 2044-1398. doi: 10.1108/CFRI-06-2024-0361. URL <https://doi.org/10.1108/CFRI-06-2024-0361>.
- T. S. Zaeveski, Y. S. Kim, and F. J. Fabozzi. Option pricing under stochastic volatility and tempered stable lévy jumps. *International Review of Financial Analysis*, 31:101 – 108, 2014. ISSN 1057-5219. doi: <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2013.10.004>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1057521913001403>.