МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2011
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2011
Proceedings of the Fortieth Jubilee Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 5–9, 2011

(ПРЕ)ОТКРИВАНЕ НА СВОЙСТВА НА ЕДНО ЕКВИАФИННО ПРЕОБРАЗУВАНИЕ ЧРЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕ НА ДИНАМИЧЕН СОФТУЕР*

Тони Чехларова

Представен е вариант за организиране на учебно-изследователска работа на учениците по (пре)откриване на свойства на едно еквиафинно преобразувание. За целта се използват динамични конструкции, създадени с GeoGebra.

В училищното обучение по математика се изучават еднаквости и подобности в равнината. Единствено инверсията като преобразувание, което не е подобност, е влязла в учебни програми за избираемо (факултативно обучение) по математика.

В [6] е разработен модел за въвеждане и използване на едно еквиафинно преобразувание, предназначен за избираема подготовка по математика, който обаче е достигнал до малък брой ученици. Една от причините е необходимото време за създаване на прецизни чертежи. Динамичният софтуер ни даде възможност да организираме обучението, свързано с тази тема, като изследователски процес. При това, тъй като свойствата не са очевидни и интуитивно ясни, както например при еднаквостите, дейностите по преоткриването им е свързано с голямо удовлетворение и ефективност по отношение на усвояване на елементи на изследователския процес.

Това еквиафинно преобразувание е посочено в [5] и [7] с наименованието *сдвиг*, разработвано е в [4] с името *огледално отражение от ос*, а в [6] се именова с *хомотетична транслация*.

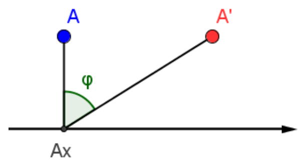
В равнината са дадени ос l с избрана положителна посока и ъгъл $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. *Обобщена транслация*[1] ще наричаме изображението в равнината, при което на произволна точка A се съпоставя точката A' чрез условията $AA' \parallel l$ и $\sphericalangle A'A_xA = \varphi$, където A_x е ортогоналната проекция на A върху l (фиг. 1).

Оста l ще наричаме ос на обобщената транслация, а $m = \operatorname{tg}\varphi$ – параметър. Обобщената транслация с ос l и параметър $m = \operatorname{tg}\varphi$ ще означаваме с $\theta\,(l;\,\varphi)$ или $\theta\,(l;\,m)$, а за това, че A' е образ на A при θ ще използваме символа $\theta\,(A) = A'$.

Натрупаният опит от изследване на геометрични преобразувания с използване на динамични конструкции като симетрия, транслация, ротация и хомотетия ([1], [2]) насочват към проверки с образа на права, на окръжност, с отношение на точки, с търсене на двойни точки, откриване на частни случаи, при които се запазва дължината на отсечка и др.

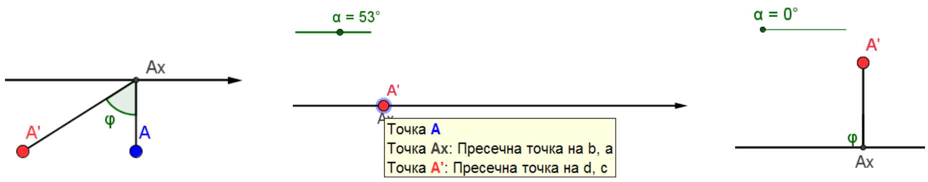
***Ключови думи:** dynamic software, equi-affine transformation, exploratory approach.

[1]Наименованието е предложено от акад. Кендеров.



Фиг. 1

Нека образът на произволна точка A при $\theta\,(l;\,\varphi)$ е $\theta\,(A) = A'$. Движим **точката** A, като наблюдаваме образа A', когато точката A е: над оста l; под оста l; върху оста l. Използваме параметър – плъзгач за ъгъла φ, което позволява лесно изследване положението на образа при различни стойности на φ (включително при $\varphi = 0$).

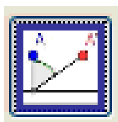


Фиг. 2. Изследване с точка и образа ѝ при обобщена транслация

Всъщност, непосредствено и от определението следва, че при $\varphi = 0$ за всяка точка $X \theta\,(X) = X$, т.е. $\theta\,(l;\,0) = id$.

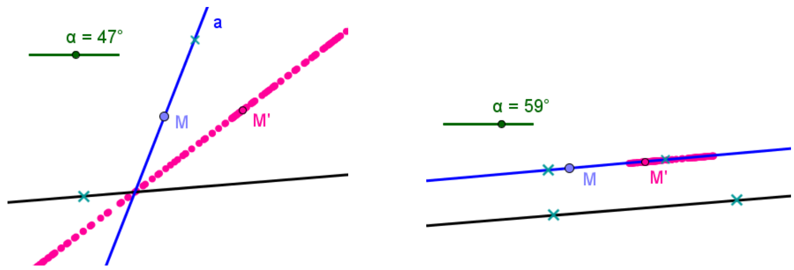
Всяка точка от оста l на обобщена транслация се изобразява в себе си, т.е. точките от оста l са двойни. Причината е, че точките от оста l съвпадат с ортогоналните си проекции върху оста l, а следователно и с образите си при обобщена транслация с тази ос. Забелязваме, че $\uparrow\uparrow l$ или $\uparrow\downarrow l$ при фиксиран ъгъл, в зависимост от полуравнината спрямо l, в която е разположена точка A.

За удобство създаваме бутон, чрез който при въведена точка, ос и ъгъл, се построява образ на точката при обобщената транслация с посочените ос и ъгъл.



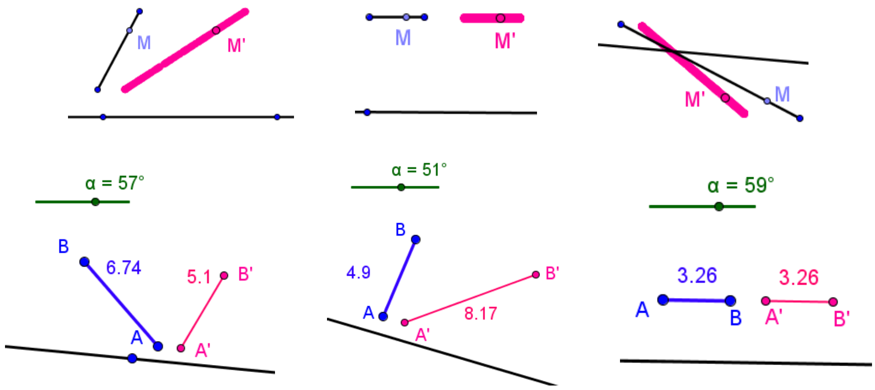
Фиг. 3. Бутон „обобщена транслация"

Продължаваме изследванията с **права** a. Върху a избираме точка M, построяваме образа ѝ $\theta\,(M) = M'$, който настройваме в режим следа. Така, при движението на M върху a, наблюдаваме следата, която оставя M'. Получава се права, която пресича a в точка от оста l. Това е вярно за различни положения на a, с изключение на случаите, когато $a \parallel l$ или $a \equiv l$. При $a \parallel l \quad (a \equiv l)$ правата и образът ѝ съвпадат. Променяме ъгъла φ на обобщената транслация и установяваме, че изводите от наблюденията ни се потвърждават. Затова формулираме хипотезата: *Двойките съответни прави при обобщена транслация $\theta\,(l;\,\varphi)$ се пресичат върху оста l или съвпадат, когато правата е успоредна на l или съвпада с нея.*



Фиг. 4. Изследване с права и образа ѝ при обобщена транслация

Продължаваме изследванията с **отсечки**. Първо може да се използва само следата, която оставя точка от разглежданата отсечка AB при движението си върху нея.

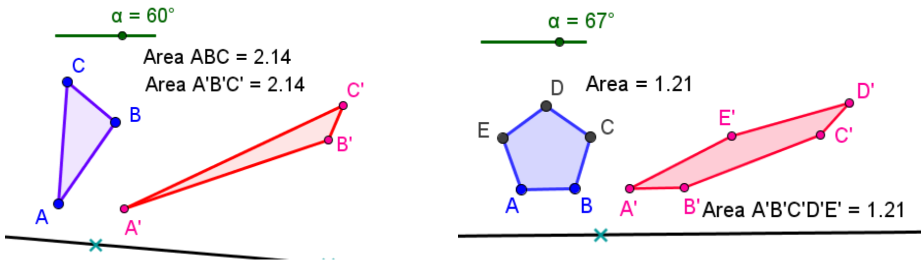


Фиг. 5. Изследване с отсечка и образа ѝ при обобщена транслация

Следваща стъпка е построяване на образите A' и B' на краищата на AB и извеждане на дължините на AB и $A'B'$. Забелязва се, че дължините на отсечките не се запазват в общия случай. Ако отсечката е успоредна на оста (или е върху нея), то дължината на отсечката и на образа ѝ са равни. Проверка на хипотезите може да се осъществява за различни случаи, които могат да се получат както чрез промяна на отсечката при фиксирана обобщена транслация, така и чрез промяна на обобщената транслация – чрез преместване на оста и(или) чрез промяна на ъгъла ѝ.

Забележителният факт е, че обобщената транслация запазва лицата на фигурите (затова това афинно преобразувание е еквиафинно).

Ето някои от твърденията, на които в [6] са направени доказателства: *При обобщена транслация права се изобразява в права. Двойките съответни прави при обобщената транслация $\theta\,(l;\,\varphi)$ се пресичат върху оста l или съвпадат, когато*



Фиг. 6. Многоъгълник и образът му при обобщена транслация

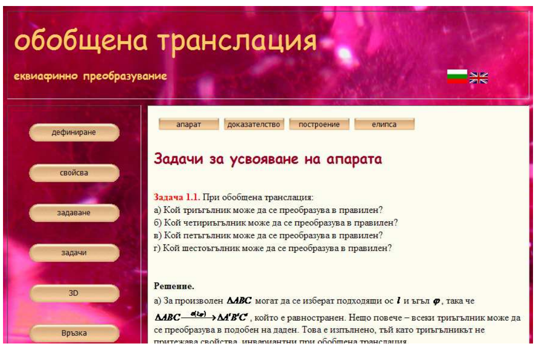
правата е успоредна на l или съвпада с нея. При обобщена транслация отсечка се изобразява в отсечка; успоредните прави – в успоредни прави, полуравнина – в полуравнина, изпъкнала фигура – в изпъкнала. Обобщената транслация запазва простото отношение на три колинеарни точки и лицата на триъгълниците.

Доказателствата в [6] са направени по два начина – чрез знания от елементарната математика от училищния курс и чрез апарата на аналитичната геометрия. Във връзка с вторите доказателства описваме аналитично представяне на обобщена транслация.

Избираме координатна система така: абсцисната ос съвпада с оста l на обобщената транслация $\theta\,(l;\,\varphi)$, а началото е произволна точка O от оста l. Нека $M'\,(x';\,y')$ е образът на произволна точка $M\,(x;\,y)$ при $\theta\,(l;\,\varphi)$. Връзката между координатите на точките M и M' се дава така:

$$\left|\begin{array}{l} x' = x + my \\ y' = y \end{array}\right. .$$

Наистина, от $MM' \parallel Ox$ следва $y' = y$. От правоъгълния триъгълник M_xMM' следва $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\overline{MM'}}{\overline{M_xM}} = \dfrac{x'-x}{y}$, т.е. $x' = x + \operatorname{tg}\varphi . y$.



Фиг. 7. Страница от сайт "Обобщена транслация"

Като най-съществен факт за обобщената транслация като еквиафинно преобразувание ще откроим промяната на формата при запазване на лицето на фигурите и на простото отношение. Това позволява задачи, които са свързани само с прости отношения (съответно успоредност) или лица, да се решават, като се разглежда "по-правилна" от дадената фигура: например вместо триъгълник – равностранен триъгълник; вместо успоредник – квадрат, вместо трапец – равнобедрен трапец. Затова и в разработения сайт първата група задачи са за усвояване на апарата. Задачи за построение, доказателство и с елипса ще бъдат разгледани в следващ материал.

Разработването и внедряването на иновативни дидактически концепции и педагогически стратегии, почиващи на използване на технологиите, за съществено подобряване на учебния процес в европейските страни, са в основата на европейските проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci* [3]. Очаква се чрез тях да се осигури мост, за да може процесът на обучение да излезе от училище. Новият поглед (чрез технологии и изследователски подход) към стари дидактически материали е един от начините за реализиране на целите на тези проекти.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Димкова, Е. Сендова. За най-новото (без да забравяме и малко по-старото) в математическото образование. *Математика и информатика*, кн. 1 (2010), 3–14.

[2] D. Dimkova. 20 Years Later – Inquirybased Learning Again. In: Mathematics Education with Technology – Experiences in Europe (Eds Tamara Bianco. Volker Ulm) University of Augsburg, Augsburg, 2010.

[3] P. Kenderov. Innovations in mathematics education: European projects *InnoMathEd* и *Fibonacci. Math. and Education in Math.*, **39** (2010), 63–72.

[4] В. Милушев. Огледално отражение от ос – дефиниране и основни свойства. *Научни трудове на Пловдивски университет*, **20**, кн. 1 (1983).

[5] Г. Паскалев. Квадратични трансформации в равнината. Пловдивски университет, 1974.

[6] Т. Петрова (Чехларова). Едно еквиафинно преобразувание и някои негови приложения (за школите по математика). Пловдивски университет, 1985.

[7] И. Яглом, В. Ашкинузе. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. Часть I. Учпедгиз, Москва, 1962.

Toni Chehlarova
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: toni.chehlarova@gmail.com

RE(DISCOVERING) THE PROPERTIES OF AN EQUIAFINE TRANSFORMATION BY MEANS OF DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE

Toni Chehlarova

The paper deals with a version of organizing an inquiry-based learning process aiming at the (re)discovering properties of an equiafine transformation. For that purpose, dynamic constructions created by means of GeoGebra, are used.