

НЯКОИ СПОСОБИ ЗА РАЦИОНАЛНИ ИЗЧИСЛЕНИЯ

Тони Чехларова Пепа Сотирова
Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”
ОМГ “Акад. К. Попов” Пловдив

SOME METHODS FOR DOING RATIONAL CALCULATIONS

Tony Chehlarova Pepa Sotirova
Plovdiv University “Paissii Hillendarski”
Mathematical School “K. Popov”

Experience shows that schoolchildren lack the tendency and skills to be rational in doing calculations. In order to deal with that shortcoming in school education in mathematics it is important to be acquainted with different methods of doing rational calculations. The article contains a description of some major methods for doing calculations rationally.

**“В математиката са синтезирани три идеала за човешки дейности –
разбирането, убеждаването и икономичността.”**

През всички етапи на обучението е необходимо да се поддържа и развива естественият стремеж на учениците към творчество. Математическото творчество има многообразни форми. Откриването на рационален способ за решаване на задача е една от тези форми.

В търсене на задачи, които да увличат учениците, да ги заставят продължително да мислят, да търсят различни средства за решаването им, се насочихме към изчислителните задачи. От една страна, тези задачи са с малка сложност на решения - в тях се включват като обекти числа от изучавано числово множество и изучавани аритметични действия. Т.е., работи се с елементарни обекти, които са от задължителния минимум в обучението по математика за съответния клас. От друга страна, решението на някои изчислителни задачи, особено рационалното им решение, е свързано с преодоляване на различни трудности – необходимо е

осмисляне на специфичната информация, разкриване на закономерности, проява на гъвкавост и дълбочина на мисленето, прилагане на свойства...

В училищния курс по математика се изучават някои знания, които са насочени към рационално извършване на изчисления. В някои източници са използвани отделни способи за рационално изчисление [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. Независимо от това, наблюденията показват, че у учениците липсват стремеж и умения за рационалност при извършване на някои изчисления. За преодоляване на този недостатък в училищното обучение по математика е важно учениците да познават различни способи за рационални изчисления. Статията съдържа описание на няколко основни способа за рационално извършване на изчисления. Ще си позволим изрично да подчертаем, че рационалните изчисления се основават на свойствата на извършваните аритметични действия.

Извършване на подходящо размятане или групиране на числата

Това е основен способ за рационално извършване на означените действия. Още в началното училище се изучават свойствата на действията събиране и умножение. У учениците и при сега използваното учебно съдържание се формират знания и умения за прилагането им. Има възможности за усложняване на задачния състав, както и за увеличаване броя на задачите за устно изчисление. Ще отбележим и факта, че останалите способи се използват обикновено в съчетание с подходящо размятане или групиране.

Задача. Изчислете:

а) $4.7.25$

б) $1+2-3-4+5+6-7-8+\dots+301+302$

в) $125+26+347+24+11+23+29$

След целенасочено обучение учениците трайно трябва да усвоят, че $4.25=100$. Затова изчисленията при решаване на подточка а) се извършват в следната последователност: $4.7.25=4.25.7=100.7=700$.

Абсолютните стойности на събираемите от подточка б) са последователни естествени числа. Затова се проверява удобно ли е да се използва идеята на Гаус за събиране на последователни естествени числа. При събирането на първо и последно събираемо, на второ и предпоследно събираемо и т.н. се получават съответно числата 303; 303; -303; -303; 303 и т.н. Остава да се прецени кои от получените сборове ще останат след унищожаване на противоположните числа.

Забелязва се обаче, че знаците “+” и “-” се променят периодично през два. Това дава основание да се групират числата по четворки. Наистина, сборът на числата във всяка четворка е равен на -2. Остава да се прецени колко са на брой групите четворки, както и колко и кои числа остават, без да образуват четворка.

По-удобно е групирането по четворки да стане от второто събираемо, защото сумата на числата във всяка четворка ще е равна на нула. Решението е:

$$1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\dots+(298-299-300+301)+302=1+302=303$$
$$=0 \qquad =0 \qquad =0$$

В подточка в) събираемите са седем. Не се забелязва специфична закономерност между тях, която да бъде използвана за опростяване на изчислението. Удобно е числата да се запишат едно под друго по познатия на учениците начин. При

събиране на единиците е подходящо да се извърши групиране, при което ще се получат суми, равни на 10. Това ще позволи дори изчислението да се осъществи устно: $5+6+7+4+1+3+9=5+(6+4)+(7+3)+(1+9)$.

При събиране на десетиците се забелязва, че цифрата на десетиците на няколко от числата е равна на 2, което насочва към използване на действие умножение. В случая $2+2+4+2+1+2+2=5.2+4+1$.

Извършване на подходящо допълване на числовия израз

Задача. Изчислете: а) $\cos 20^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ} \cdot \cos 80^{\circ}$

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048}$

в) $9+98+997+9996+ \dots +9999999990$.

В подточка а) се забелязва, че аргументът на втория множител е два пъти по-голям от аргумента на първия множител, а също и аргументът на третия множител е два пъти по-голям от аргумента на втория множител. Това насочва към използване на формула за представяне на тригонометрични функции чрез половинки ъгли. За целта е необходимо изразът да се умножи (и раздели) с $2 \cdot \sin 20^{\circ}$:

$$\cos 20^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ} \cdot \cos 80^{\circ} = (2 \cdot \sin 20^{\circ} \cdot \cos 20^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ} \cdot \cos 80^{\circ}) : 2 \cdot \sin 20^{\circ}.$$

Всяко събираемо след първото е два пъти по-малко от предходното. Удвоеното последно събираемо е равно на предходното, а сборът им е равен на удвоеното предпоследно събираемо и т.н. Следователно, ако се прибави (и извади) последното събираемо и ако събирането започне от дясно наляво, изчислението ще се опрости. Така за учениците, които не познават формулата за намиране сумата на първите n члена на геометрична прогресия, рационалното решение на б) е свързано с прибавяне и изваждане на дробта $\frac{1}{2048}$.

Събираемите в подточка в) са близки съответно до 10; 100; 1000 и т.н. Затова прибавянето и изваждането последователно на числата 1; 2; 3; ...; 9; 10. ще улесни изчисленията. Всъщност задачата може да илюстрира и следващия способ. Числото 9 се представя като разликата $10-1$. Числото 98 се представя като $100-2$ и т.н.

Представяне на число като сбор по подходящ начин

Задача. Изчислете а) $27,5+26,6+28,1+ 27,6+26,4+27,2+26,9$

б) 63742-29998 в) $20,4+16-16,4-7,84$ г) $\frac{244.395-151}{244+395.243}$

Когато трябва да се съберат близки по големина числа, избира се число, което е близко до тях (по възможност това число трябва да е цяло), и всяко от събираемите се представя чрез него. В подточка а) всяко от събираемите е удобно да се представи чрез числото 27: $27,5+26,6+28,1+27,6+26,4+27,2+26,9=27.7+(0,5-0,4+1,1+0,6-0,6+0,2-0,1)$.

Този способ е удобно да се използва например за намиране на средноаритметично при статистически изследвания.

Понякога е удобно събираемо (умяляемо, умалител) да се допълни или намали до подходящо число (например завършващо на нула). В подточка б) числото 29998 може да се представи като $30000-2$, тогава: $63742-29998=63742-30000+2=33742+2=63744$.

За подточка в) дробните части на първото и третото събираемо, както и целите части на второто и третото събираемо дават основание третото и първото събираемо да се представят като сбор на цялата и дробната част.

Множителите в произведенията в числителя и знаменателя на подточка г) ни насочват към представяне на числото 244 като сбор $243+1$. Тогава

$$244.395=395.243+395. \quad \frac{243.395 + 395 - 151}{395.243 + 244} = 1.$$

Разлагане на число на множители по подходящ начин

В някои случаи, макар че е необходимо да се извърши действие умножение, подходящо е да се разложат някои от множителите на множители (не непременно прости, а подходящи). Например:

Задача. Пресметнете: а) 32.25 б) $\sqrt{14.10.21.15}$ в) $\frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35}$

На учениците е известно, че $25.4=100$. Затова, когато един от множителите е 25, се проверява дали има множител 4, или дали някой от множителите се дели на 4. В подточка а) е подходящо числото 32 да се разложи на два множителя, единият от които е 4. Тогава $32.25=8.4.25=8.100=800$.

За да се реши подточка б), възможно е първо да се извърши действие умножение, а после да се намери квадратния корен на полученото произведение.

По-удобно обаче е не да се умножат множителите, а да се разложат на множители. Така ще се открият точни квадрати, за които е лесно изнасянето извън знака за квадратен корен. Как да се “досетим” за такава последователност? Две от числата се делят на числото 3, учениците трайно знаят признака за делимост на 2, на 3, на 5, а някои и признак за делимост на 4, на 8, на 9, на 11. В резултат на разлагането на множители се получава: $\sqrt{7.7.5.5.2.2.3.3} = 7.5.2.3 = 210$.

При решаване на подточка в) се забелязва, че числителят съдържа четири събираеми, всяко от които е произведение от три множителя. За всяко от събираемите, при множителите се откроява закономерност – вторият множител е два пъти по-голям от първия, а третият множител е три пъти по-голям от първия. Това дава основание да се уточни общ множител за събираемите в числителя – $1.2.3$. Аналогично се разсъждава и за знаменателя. Получава се :

$$\frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35} = \frac{1.2.3(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)}{1.3.5(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)} = \frac{2}{5}$$

Замяна на едно действие с друго

Замяната на едно действие с друго разглеждаме в два аспекта.

1. Използване дефинициите на някои действия.

Например при наличие на равни събираеми се извършва замяна на действие събиране с действие умножение.

2. Използване на някои равенства, с което се осъществява смяна на действието. Например равенството $5=10:2$ дава основание да се замени умножението с числото 5 с по-лесното – деление на числото 2. Равенството $99=100-1$ пък позволява умножението с числото 99 да се сведе до действие изваждане.

Задача. Пресметнете 32.99.

Решение. $32.99=32.(100-1)=3200-32=3168$.

Използване на разкрити рекурентна зависимост между числата

Точно тези задачи са подчертано липсващи в учебното съдържание. Присъствието им е в избираема подготовка, 11. клас, при темата “Метод на математическа индукция”.

А в психологическата литература най-често използван пример за нестандартно, за рационално мислене, е случката с малкия Гаус. Тя е свързана с рационално събиране на първите сто естествени числа и с разкриване на свойства на членовете на аритметична прогресия.

Задача. Изчислете:

а) $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12+13-14$

б) $2+2^2+2^3+2^4+2^5+\dots+2^{99}+2^{100}$

в) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})\dots(\sqrt{99}+\sqrt{98})$

г) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{2048}$

Разкриването на съществената връзка между числата, на закономерността, е в основата на разкриване на рационалното решение.

Използване на доказани тъждества

В 7.-11. клас учениците изучават различни тъждества (формули), използването на които значително подпомага извършването на някои изчисления. Тогава ще се допълнят възможностите с още един способ, като се включат и тези познания. Например:

Задача. Изчислете: а) $21,3^2 - 21,2^2$ б) $5,5,4,5$ в) $\frac{\sin 56^\circ \cos 26^\circ - \cos 56^\circ \sin 26^\circ}{\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \sin 27^\circ \cos 63^\circ}$.

В 7. клас учениците усвояват формули за съкратено умножение, в частност $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Едно от приложението ѝ е за рационално извършване на изчисления. Удобно е да се използва, когато модулът на $a-b$ или на $a+b$ е равен на 1; 0,1; 0,01; ...10; 100;...; 5; 50;...2; 20;...и др. За а) $21,3-21,2=0,1$, следователно е удобно да се използва формулата $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. В резултат се получава:

$$21,3^2 - 21,2^2 = (21,3-21,2).(21,3+21,2)=0,1.42,5=4,25.$$

Когато трябва да се намери произведение на две числа, които могат да се представят съответно като сбор и разлика на едни и същи числа, на които е удобно да се намерят квадратите, тогава се прилага формула за съкратено умножение. За

подточка б) $5,5.4,5=(5+0,5)(5-0,5)=25-0,25=24,75$. При упражняването на формулите съществено се оказва използването им в двете посоки, т.е. осмислянето на симетричността на релацията “=”.

В обучението по математика учениците изучават известен брой тъждества (формули). Учениците трябва да осмислят факта, че голяма част от тъждествата са открити така. Многократно са извършвани едни и същи дейности при аналогични изчисления. Получават се резултати, позволяващи да се направи общ извод. Доказва се съответното тъждество. Тогава не е необходимо да се повтарят съответните дейности за всеки отделен частен случай, а се използва наготово доказани вече резултат.

Към тази група включваме и използване на тъждества, които се съставят специално за решаване на задачите (най-често с метода на непълната индукция) и се доказват с метода на математическата индукция.

Например за намиране на сумата $1.2+2.3+3.4+\dots+100.101$ предварително се доказва тъждеството $1.2+2.3+3.4+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Освен изучаваните тъждества, за решаването на някои групи задачи се използват тъждества, които не са включени в задължителното обучение, но се използват по традиция в избираемото обучение.

Задача. Пресметнете: а) $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{8.10}$ б) $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$.

За рационално решаване на задачите се използва тъждеството $\frac{\kappa}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$.

Извършване на полагане

Основната идея е свързана с опростяване на изчисленията, след като числов израз се превърне в алгебричен с подходящо полагане.

Задача. Изчислете $2\frac{1}{1113} \cdot 2\frac{1118}{1119} + 1\frac{2}{1113} \cdot 2\frac{1}{1119} + \frac{1112}{1113} \cdot 7\frac{1}{1119}$ [1].

Знаменателите на дробите или дробните части на смесените числа са равни на 1113 или 1119. Затова се извършва полагането: $a = \frac{1}{1113}$; $b = \frac{1}{1119}$. Тогава изразът ще

се преобразува във вида: $(2+a)(3-b) + (1+2a)(2+b) + (1-a)(7+b)$. След разкриване на скобите се получава резултат 15.

Използване на знания за числото нула

Тези знания могат да помогнат: за отстраняване на някои събираеми: $a+0=a$; за установяване, че произведение е равно на нула: $a \cdot 0=0$; за ограничаване областта на решаване: $a:0$ не е дефинирано.

Задача. Изчислете а) $-5 \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot 4.5$ б) $\lg 0,1 \cdot \lg 0,2 \cdot \lg 0,3 \cdot \dots \cdot \lg 1,8 \cdot \lg 1,9 \cdot \lg 2$.

При този запис остава скрит множителят нула, а предварителното му разкриване е съществено за бързото получаване на резултата.

Използване на бройна система с основа p

Използването на бройна система с основа p позволява да се намерят по оригинален начин суми от вида [3]:

$$S_2 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

$$S_3 = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$$

.....

$$S_p = 1 + p^1 + p^2 + p^3 + \dots + p^n$$

Използва се, че за произволна бройна система с основа p е изпълнено $p^n = (1000\dots 0)_p$; $p^n - 1 = (p-1)(p-1)(p-1)\dots(p-1)_p$; (с $(p-1)$ е означена цифра).

Например за намиране на S_2 се работи в двоична бройна система.

$$S_2 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 1_{(2)} + 10_{(2)} + 100_{(2)} + \dots + 1000\dots 0_{(2)} = 111\dots 1_{(2)} = 2^{n+1} - 1$$

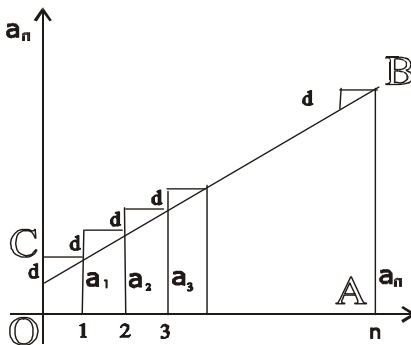
Използване на геометрични средства

За рационални изчисления, за онагледяване на идея, за достигане до идея за рационално изчисление, се използват геометрични обекти или знания от геометрията.

Задача. Докажете, че сборът на първите n члена на аритметична прогресия

$$a_1; a_2; \dots, a_n, \dots \text{ е } S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}.$$

Доказателството може да се осъществи с геометрични средства. Нека $a_1 > 0$ и $d > 0$. Построяват се точки с координати $(1; a_1); \dots; (n; a_n)$.



$$S_n = \frac{OC + AB}{2} n + \frac{nd}{2} = \frac{(a_1 - d)n + a_n \cdot n + n \cdot d}{2} = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}.$$

Считаме, че за формиране на стремеж и на умения за рационални изчисления е необходимо:

- открояване и систематизиране на някои способи за рационално изчисление;
- системно прилагане на тези способи при извършване на изчисления;

- съставяне на специални задачи с акцент – рационално изчисление;
- целенасочена работа по формиране на уменията за рационално извършване на изчисления;
- поставяне на акцент в някои часове по математика върху рационалните изчисления;
- поощряване на постиженията на всеки ученик, свързани с рационалност в работата му.

Литература:

1. Любенов, Л. Аритметични изрази и многочлени. сп. Математика 1989. бр.3, с.32-34
2. Минаева, С. Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике. М., Просвещение, 1983.
3. Маркова, Х. , Д. Дончев, Бройните системи в училищния курс по математика. В: Научни трудове Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, т.22, кн.1, 1985. с.87-98
4. Паскалев, Г. Работата в кръжока по математика. Част 2, С., Народна просвета, 1985.
5. Славов, К., П. Шопова, Кръжочната работа по математика в 4 и 5 клас на ЕСПУ. С., НП, 1987.
6. Степанов, В. Активизация внеурочной работы по математике в средней школе. М., Просвещение, 1991.