

# РАЦИОНАЛНИ ИЗЧИСЛЕНИЯ В 6. КЛАС

Тони К. Чехларова

Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”  
Катедра “Методика на обучението по математика и информатика”

## ANALYTICAL METHODS OF CALCULATION IN THE SIXTH GRADE AT SCHOOL

Tony K. Chehlarova

*The article contains mathematical problems about recurrent sums, which are aimed at 6th grade students and will contribute to the ability to carry out calculations in an analytical manner. In order to solve the paper's mathematical problems, it is of prime importance to find regularity between the addends or the multipliers, as well as to have some familiarity with analytical methods of calculation.*

**KEY WORDS:** recurrent sums; 6th grade

Рационалното извършване на изчисления е показател за математическата култура на учениците. За формирането на знания и умения за извършване на рационални изчисления са необходими специални упражнения. Статията съдържа задачи с рекурентни суми и произведения за учениците от 6. клас, които ще съдействат за формирането на умение за рационално извършване на изчисления. За решаване на предложените задачи е съществено разкриването на закономерност между събираемите или множителите, както и познаването на някои способности за рационални изчисления. Такива способности са представени в [6]. В 6. клас новите знания се отнасят до рационалните числа и свойствата, свързани с действие степенуване.

**Задача 1.** Намерете устно сумата от членовете на редицата [5].

- а)  $-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6$ .
- б)  $-12; -8; -4; 0; 4; 8; 12; 16; 18$ .
- в)  $100; 95; 90; \dots; -85; -90; -95; -100$ .
- г)  $-36; -30; -24; -18; -12; \dots; 24$ .
- д)  $7; 3; -1; -5; -9; -13; -17$ .
- е)  $-55; -51; \dots; 1; 5; 9; 13; 17; 21$ .

Необходимо е учениците да осмислят, че членовете на всяка от редиците не са произволни числа, а са получени по правило. Важно е да се установи, че има противоположни числа, които ще се унищожат при събиране.

За подточка б) трябва да се прецени кои числа ще останат след унищожаване на противоположните числа.

Новото за следващите подточки е, че не са записани всички членове на редицата, но учениците няма да бъдат затруднени при решаване на задачата.

Между членовете на редицата от подточка д) няма противоположни числа, но всяко число се получава от предходното чрез изваждане на числото 4. Сборовите на числата, равноотдалечени от първо и последно число, са равни, което е насока за рационалното изчисляване.

Задачата може да бъде предложена за решаване и в този вариант: “Изчислете устно  $-6-4-2-0+2+4+6$ ”. Тогава изпъкват противоположните числа, а не закономерността между събираемите. Учениците ще се справят лесно с първите четири случая, но ще срещнат

трудности в търсенето на рационален начин за изчисление при решаване на задачи като д) и е).

**Задача 2. Изчислете.**

- а)  $0,7 - 0,07 + 0,007 - 0,0007 + 0,000007 - 0,0000007 + 0,00000007 - 0,000000007$
- б)  $-0,7 + 0,07 - 0,007 + 0,0007 - 0,000007 + 0,0000007 - 0,00000007 + 0,000000007$
- в)  $0,7 + 0,07 - 0,007 + 0,0007 + 0,000007 - 0,0000007 - 0,00000007 - 0,000000007$
- г)  $0,7 - 0,007 + 0,00007 - 0,0000007 + 0,000000007 - 0,00000000007$
- д)  $0,18 + 0,18 \cdot (0,01) + 0,18 \cdot (0,01)^2 + 0,18 \cdot (0,01)^3 + 0,18 \cdot (0,01)^4$
- е)  $-0,2 + 0,002 - 0,00002 + 0,0000002 - 0,000000002 + 0,00000000002$
- ж)  $0,2 - 0,002 + 0,00002 - 0,0000002 + 0,000000002 - 0,00000000002$

Указания. Задачата е важна за развитие на вниманието и съсредоточеността. Често допускана грешка е пропускане на нули в крайния отговор.

а) След намиране на  $0,7 - 0,07$ , а при нужда и на  $0,007 - 0,0007$ , се прави извод за резултатите от изваждането на останалите двойки числа. Числата се групират по две, и накрая се събират получените разлики.

б) Сравнете с подточка а) и запишете крайния отговор, без да извършвате изчисления.

д) Важно е да се прецени кои са събираемите след първото събираемо.

**Задача 3. Изчислете.**

- а)  $-2, 1-4, 1-6, 1-8, 1-10, 1-12, 1$
- б)  $2, 1-4, 1+6, 1-8, 1+10, 1-12, 1+14, 1$
- в)  $1, 1-2, 2+3, 3-4, 4+5, 5-6, 6$
- г)  $1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5, 5+6, 6+7, 7+8, 8+9, 9$
- д)  $1, 1-2, 2-3, 3+4, 4+5, 5-6, 6-7, 7+8, 8+9, 9$
- е)  $-9, 9+9, 99-9, 999+9, 9999-9, 99999+9, 999999-9, 9999999+9, 99999999$
- ж)  $-4+5-4+5-4+5-4+5-4+5$
- з)  $-1+10-100+1000-10000+100000-1000000$
- и)  $1, 1-1, 11+1, 111-1, 1111+1, 11111-1, 111111$
- к)  $4 - 4^2 + 4^3 - 4^4 + 4^5 - 4^6$

Указания. б) Подходящо е числата да се групират по двойки, като са възможни поне два рационални начина за това.

г) Може да се използва идеята на Гаус, тогава се получава  $(1, 1+9, 9) \cdot 4$ . Удачно е обаче и да се изнесе общ множител:  $1, 1 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 1, 1 \cdot 45$ .

**Задача 4. Изчислете.**

- а)  $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12+13-14+15-16+17$
- б)  $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12+13-14$
- в)  $1-2+3-4+\dots-100$
- г)  $2-4+6-8+10-12+14-16+18-20$
- д)  $1-3+5-7+9-11+13-15+17-19+21-23$ .

Указания. а) Има няколко рационални начина за работа. Абсолютните стойности на числата са поредни естествени числа, затова се проверява рационално ли е използване идеята на Гаус за събиране на последователни естествени числа. В резултат от събирането на първо и последно събираемо, на второ и предпоследно събираемо и т.н. се получават съответно 18; -18; 18; -18 и т.н. Отговор: 9.

Числата могат да се групират по две и така:

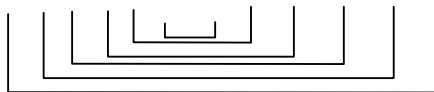
$$(1-2)+(3-4)+(5-6)+(7-8)+(9-10)+(11-12)+(13-14)+(15-16)+17.$$

Сборът на числата във всяка двойка е равен на -1.

За подточка б) първото и последното събираемо са с различни знаци, второто и предпоследното събираемо също са с различни знаци и т.н., поради което събирането им не дава очаквания резултат. Затова при решаване на подточка б) е по-добре групирането по

двойки да започне от второто събираемо (или първо събираемо да се групира с предпоследно):

$$1-2+3-4+5-6+7-8+9-10+11-12+13-14$$



Сумите на съответните двойки са  $-16, 16, -16, 16, -16, 16$ , а тяхната сума е равна на нула. Остава да се съберат числата 1 и  $-8$ .

Подходящо е да се поиска от учениците да направят прогноза за отговора на подточка в), и тогава да започнат изчисленията.

При решаване на г) някои ученици се насочват към такова групиране, при което ще се получат суми, равни на 10 или на  $-10$ , например:  $(2-12)+(-4+14)+(6-16)+(-8+18)+(10-20)$ . Така освен общите идеи от решаването на предните подточки се използва и нова специфична информация.

**Задача 5. Изчислете.**

а)  $1+2-3-4+5+6-7-8+\dots+301+302$

б)  $2+4-6-8+10+12-14-16+\dots+402+404$

в)  $1+3-5-7+9+11-\dots+401+403$

г)  $1+4-7-10+13+16-19-22+25+28-31$

д)  $1+2-3-4+5-6+7-8-9+10-11-12+13-14+15+16-17+18$

е)  $2+4-6-8+10-12+14+16-18+20-22-24+26-28+30+32-34+36$

Указания. а) Използвайте идеите за решаване на предходната задача. Когато се групират последователни събиратели, подходящо е числата да се групират по четири. По-добре в случая е групирането да започне от второто събираемо, защото тогава сборът на числата във всяка четворка ще е равен на нула.

$$1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\dots+(298-299-300+301)+302=1+302=303$$

$$\quad \quad \quad =0 \quad \quad \quad =0 \quad \quad \quad =0$$

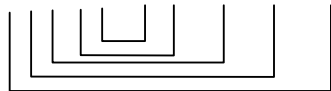
д) На пръв поглед е трудно да се открие закономерност в последователността от знаците “+” и “-“. Събирането на първо и последно събираемо, на второ и предпоследно събираемо и т.н. не дава желаните резултат. При последователно извършване на действията обаче се оказва, че сборът на първите пет събиратели е равен на единица. Сборът на следващите четири числа е нула. При отделяне на съответните четворки се забелязва закономерност и в последователността от знаците “+” и “-“:

$$1+2-3-4+5-6+7-8-9+10-11-12+13-14+15+16-17+18.$$

**Задача 6. Представете със степен:** 1.2.4.8.16.32.64.128.256.512

Множителите са образувани по определено правило. Всяко число след първото е образувано от предходното с умножение с числото 2. По аналогия на идеята на Гаус за намиране сумата на първите сто естествени числа се проверява дали произведенията на равноотдалечените от първия и последния множител числа са равни.

$$1.2.4.8.16.32.64.128.256.512$$



Тъй като това условие е изпълнено, разглежданото произведение се представя със степен с основа 512.

Разбира се, всяко от числата може да се представи със степен с основа 2. Умножават се степените с равни основи и се получава степен с основа 2. Може да се разиска въпросът има ли други възможности за представяне със степен.

**Задача 7.** Представете със степен а)  $3.3^2.3^3.3^4.3^5.3^6.3^7.3^8.3^9.3^{10}$

б)  $3^2.3^4.3^6.3^8.3^{10}.3^{12}.3^{14}.3^{16}$  в)  $7.7^3.7^5 \dots 7^{43}$  г)  $11^2.11^4.11^6 \dots 11^{60}$  [3].

Указания. При решаване на подточка а), по аналогия с решението на задача 6. се установява, че произведенията на равноотдалечените от първия и последния множител степени са равни. Затова  $3.3^2.3^3.3^4.3^5.3^6.3^7.3^8.3^9.3^{10} = (3^{11})^5 = 3^{55}$ . А може да се използва изученото правило за умножение на степени с равни основи. Тогава ще е необходимо да се извърши рационално събиране на степенните показатели.

**Задача 8.** Изчислете: а)  $5.4^2 - 6.4^2 + 7.4^2 - 8.4^2 + 9.4^2$

б)  $2.4^2 + 4.4^2 + 6.4^2 + 8.4^2 + 10.4^2$

в)  $(-1)^6 + (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1)^1$

г)  $(-1)^6(-1)^5(-1)^4(-1)^3(-1)^2(-1)^1$

д)  $(-1)^{20} + (-1)^{18} + (-1)^{16} + (-1)^{14} + (-1)^{12} + (-1)^{10}$ .

Решаването на задачата може да служи и за развитие на уменията за прогнозиране на краен резултат, като предварително се поставят подходящи въпроси.

**Задача 9.** Ако е известно, че  $2^{11} = 2048$ , изчислете

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}.$$

Ясно е, че трябва да се търси рационален начин за изчисление. Фактът, че е дадена стойността на  $2^{11}$ , може да насочи към търсене на начин за представяне на сумата чрез  $2^{11}$ :

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10};$$

$$S = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9);$$

$$S = 1 + 2(S - 2^{10});$$

$$S = 1 + 2S - 2^{11}; S = 2^{11} - 1.$$

Още в древността са намерили решение на задачата. Решаването може да бъде придружено с исторически сведения, както и със задачи за моделиране, при които се стига до такива суми. Подходящо е да се постави предварително индивидуална задача за проучване на конкретни източници и представяне на намерените данни. Ученикът, който е проучил източниците, знае идеята за решаване на задачата. Всъщност това е и идеята за доказване на формулата за намиране на сумата на първите  $n$  члена на геометрична прогресия, която се изучава в 11. клас.

В една клинописна таблица е намерена сумата  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$ . Решението и отговорът  $S = 512 + (512 - 1)$  навеждат на мисълта, че авторът на задачата е използвал формулата  $S_{n+1} = 2^n + (2^n - 1)$  [2].

Може да се предостави възможност на учениците за изследвания, които да доведат до формулиране на хипотеза, свързана със споменатата формула. За целта е необходимо да се предложи таблица със стойностите на  $2^n$ . Например:

| $n$ | $2^n$ | $S_{n+1}$       |
|-----|-------|-----------------|
| 0   | 1     | <b>1</b>        |
| 1   | 2     | <b>1+2=3</b>    |
| 2   | 4     | <b>3+4=7</b>    |
| 3   | 8     | <b>7+8=15</b>   |
| 4   | 16    | <b>15+16=31</b> |
| 5   | 32    | ...             |
| 6   | 64    |                 |
| 7   | 128   |                 |
| 8   | 256   |                 |
| 9   | 512   |                 |
| 10  | 1024  |                 |

**Задача 10. Опростете:**

а)  $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}$

б)  $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$

в)  $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{99} + 3^{100}$ .

В тази тема е подходящо да се разкажат историите за Шерам и Сета – създателя на шаха, за Теренций, и др. (виж [4]).

Изучаването на бройни системи с основи 2 и 3 позволява сумите да се намерят рационално и по друг начин.

**Задача 11. Изчислете:**

а)  $\left(\frac{222221}{222222} - \frac{222222}{222223}\right) : \left(\frac{222222}{222223} - \frac{222223}{222224}\right) - \left(\frac{222223}{222224} - \frac{222224}{222225}\right) : \left(\frac{222224}{222225} - \frac{222225}{222226}\right)$

б)  $\left(\frac{222221}{222223} - \frac{222223}{222225}\right) : \left(\frac{222223}{222225} - \frac{222225}{222227}\right) - \left(\frac{222225}{222227} - \frac{222227}{222229}\right) : \left(\frac{222227}{222229} - \frac{222229}{222231}\right)$

в)  $\left(\frac{222223}{222222} - \frac{222224}{222223}\right) : \left(\frac{222224}{222223} - \frac{222225}{222224}\right) - \left(\frac{222225}{222224} - \frac{222226}{222225}\right) : \left(\frac{222226}{222225} - \frac{222227}{222226}\right)$ .

Упътване. а) Използва се, че  $\frac{222221}{222222} - \frac{222222}{222223} = \left(1 - \frac{1}{222222}\right) - \left(1 - \frac{1}{222223}\right)$ .

**Задача 12. Направете прогноза за отговора и за времето, което ще Ви е необходимо за решаване на всяка от задачите. Проверете верността на вашите предположения.**

а)  $(-8) \cdot (-7) \cdot (-6) \cdot (-5) \dots 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

б)  $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3$

в)  $111^3 - 222^3 + 333^3 - 444^3$

г)  $\frac{4^2 + 44^2 + 444^2 + 4444^2 + 44444^2}{5^2 + 55^2 + 555^2 + 5555^2 + 55555^2}$

д)  $\frac{2^9 + 2^8 + \dots + 2}{2^8 + 2^7 + \dots + 2 + 1}$

е)  $\frac{2^{17} + 2^{16} + \dots + 2 + 1}{2^8 + 2^7 + \dots + 2 + 1}$

ж)  $\frac{23}{99} - \frac{2323}{9999} + \frac{232323}{999999} - \frac{23232323}{99999999} + \frac{2323232323}{9999999999} - \frac{232323232323}{999999999999}$

з)  $9 \cdot 99 + 999 - 9999 + \dots - 9999999999$ .

Подходящо е първите две подточки да се решават, когато учениците не разполагат със средства за записване. Това ще ги насочи към устни пресмятания.

Осъщественият частичен експеримент потвърди очакванията ни по отношение на интереса, въздействието и достъпността на експериментираното учебно съдържание.

Каквито и успехи да се постигат по отношение на техническите средства, изчисленията без тях няма да загубят своето значение. Търсенето на рационални способи за изчисления способства за решаване на образователни, възпитателни и развиващи цели. Разработката на съдържанието е съобразена с факта, че “вниманието, разбирането, запомнянето и уменията на учениците да оперират със знания са съществени за ефективността на обучението по математика”[1]. Решаването на предложените в работата математически задачи ще съдейства за усъвършенстване на знанията и уменията на учениците по темата “Числови множества”; за усвояване и затвърдяване на способи за рационални изчисления; за развитие на:

- качества на мисленето на учениците;
- математическата интуиция, която позволява да се прогнозира краен резултат и пътя за получаването му;
- самостоятелност и стремеж към преодоляване на затрудненията;
- въображението, паметта, волята;
- стремеж към рационалност при решаване на проблеми от различен характер.

## Литература

1. Ганчев, И. Основни учебни дейности в урока по математика. Модул-96, С., 1999.
2. Глейзер, Г. Беседи по история на математиката. Част втора, С., Народна просвета, 1987.
3. Колягин, Ю. и др. Сборник задач по алгебре для 6-8 классов. М., Просвещение, 1975.
4. Перельман, Я. Жива математика. С., Народна просвета, 1963.
5. Чехларова, Т. Числови редици за 6. клас. В: Научни трудове на ПУ "П. Хилендарски". т.38 , кн.2 , Методика на обучението, 2001.
6. Чехларова, Т., П. Сотирова, Някои способи за рационални изчисления. В: Научни трудове на СУ – Пловдив, под печат