

СУМИ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ В 5. КЛАС

Тони Чехларова

В статията са представени някои възможности за разширяване на задачния състав в учебниците и учебните помагала по математика за 5. клас на българското училище чрез включване на изчислителни задачи с рекурентни суми и произведения. Решаването им ще съдейства за усъвършенстване на уменията за извършване на аритметични действия с естествени и с дробни числа, за формиране на умения за рационално извършване на изчисления, за развитие на качества на мисленето, на въображението, за осъществяване на пропедевтика на суми и произведения.

За рационалните изчисления от съществено значение е съобразяването с основната и със специфичната информация, които се отделят в етапа “разбиране на задачата”. В [1] се подчертава, че специфичната информация определя индивидуалността на задачата и насочва към частни, оригинални решения. Разкриването на специфичната информация приучва учениците към внимателно взиране в обектите, към вникване в същността на данни и зависимости.

За формиране на умения за рационални изчисления е важно и усвояването и систематизирането от учениците на различни способности за рационални изчисления. В [7] са предложени някои такива способности: извършване на подходящо размятане или групиране на числа, на подходящо допълване на числов израз, представяне на число със сбор, представяне на число с произведение, замяна на едно действие с друго, използване на рекурентна зависимост между числата, използване на доказани тъждества, извършване на полагане, използване на бройна система с основа p , използване на геометрични средства. Някои от тези способности се използват за рационално решаване на задачите:

Задача 1. Изчислете

б) $9+98+997+9996+...+9999999990$

г) $1+11+111+1111+...+1\ 111\ 111\ 111$

е) $123456789+234567891+345678912+456789123+567891234+$

$+678912345+789123456+891234567+912345678$

ж) $1+12+123+1234+12345+...+123456789$

з) $1\ 000-(1\ 000-(1000-(1000-(1000-(1000-(1000-999))))))$

а) $9+99+999+9999+...+9999999999$

в) $9+89+899+8999+...+8999999999$

д) $9+89+889+8889+...+8888888889$

Указания. а) Ясно е, че последователното извършване на действие събиране е нерационално. Подходящо е да се използва способът – извършване на подходящо допълване. Това, че цифрата на единиците на всяко от събираемите е 9, ни насочва към идеята, че ако към всяко събираемо се прибави числото 1, вероятно изчисленията ще се опростят.

б) По аналогия с решението на подточка а) в случая е удобно да се извърши допълване до 10; 100; и т.н. В случая се прибавят последователно числата 1; 2; 3; ...; 10.

в) Решаването на задачата може да се сведе до решаването на подточка а) чрез прибавяне на числата 10; 100... Ако се решава самостоятелно, подходящо е да се допълват числата съответно до 90; 900...

г) Решаването на задачата може да се сведе до решаването на подточка а) чрез умножение с числото 9.

д) Ако се предложи за решаване непосредствено след предходната подточка, на учениците се осигурява неявно помощ. Добре е обаче те сами да открият, че може да се използва решението на предходната подточка. Първоначално се търси аналогия с подточка а). Но ако за решаването на подточка а) допълването до 10, 100, 1000 и т.н. се осъществява с числото 1, на подточка б) – с числата 1 ; 2 ; 3, в случая допълването се осъществява с 1 ; 11 ; 111 ; 1111 , а тези числа ни насочват към предходната точка.

е) Разсъжденията могат да се провеждат както по отношение на цифрите на единиците, цифрите на десетиците и т.н., така и по отношение на това всяка от цифрите от 1 до 9 какво място заема в събираемите.

Задача 2. Пресметнете: а) $1+2+3+\dots+100$ б) $2+4+6+\dots+200$

в) $1+3+5+7+\dots+199$

г) $20+50+80+110+140+170+200+230$

д) $6120+6150+6180+6210+6240+6270+6300+6330$.

Подточка а) се предлага за решаване както за актуализиране на идеята на Гаус за събиране на естествените числа от 1 до 100, с която е подходящо да се запознаят учениците до 4. клас, така и за предоставяне на възможност за използване на получения отговор при решаване на следващи подточки. Например подточка б) може да се реши с прилагане на идеята на Гаус, но е възможно използване на разпределителното свойство и свеждане до подточка а): $2+4+6+\dots+200=2(1+2+3+\dots+100)$. Полученият резултат за подточка б) може да се използва при решаване на в). При решаване на подточка д) може да се използва получения вече резултат от подточка г).

Задача 3. Пресметнете:

а) $(3+6+9+12+15+18+21+24+27):3$

б) $(5+10+15+20+25+\dots+100):5$

в) $(1122+2233+3344+4455+5566+6677+7788+8899):11$

г) $(111+222+333+444+555+666+777+888+999):111$

д) $(3+33+333+3333+33333+333333):3$

е) $(9+99+999+9999+99999+999999):9$

ж) $(110+220+330+\dots+990):(10+20+\dots+90)$

з) $(1100+2200+3300+\dots+9900):(100+200+\dots+900)$

и) $(100100+200200+\dots+500500):(100+200+\dots+500)$

Указания. и) $100100+200200+\dots+500500=100100(1+2+3+4+5)$

Задачата е подходящо да се реши както в темата “Делимост на сбор”, така и след изучаване на признаците за делимост на 2, на 3, на 5, а в избираемото обучение – и на 9, 11 и др.

Задача 4. Пресметнете:

а) $25.24-24.23+23.22-22.21+21.20-20.19+19.18-18.17+17.16-16.15$

б) $100.98-98.96+96.94-94.92+\dots+4.2-2.0$

Указание. Наличието на закономерност между участващите множители насочва към търсене на рационален начин на работа. Ако се групират числата по двойки, във всяка двойка има общ множител, следователно може да се приложи разпределителното свойство. Нещо повече. Във всяка от получените скоби разликата е равна на 2.

$$\begin{aligned} &25.24-24.23+23.22-22.21+21.20-20.19+19.18-18.17+17.16-16.15= \\ &=24.(25-23)+22.(23-21)+\dots+16.(17-15)=2.(24+22+20+18+16) \end{aligned}$$

За намиране на сбора в скобите се използва правилото на Гаус.

Задача 5. Пресметнете [6]:

а) $1,1+2,1+3,1+\dots+9,1+10,1$

б) $1,5+2,5+\dots+100,5$

в) $1,25+1,5+1,75+2+2,25+2,5+2,75$

г) $5\frac{1}{3}+10\frac{1}{3}+15\frac{1}{3}+\dots+45\frac{1}{3}+50\frac{1}{3}$ д) $2,43+2,45+2,47+2,49+2,51+2,53+2,55+2,57$

е) $2,7+3,8+4,9+6+7,1+8,2+9,3+12,5+14,5+16,5+18,5+20,5+22,5$

ж) $25,3-1,7+23,2-2,2+20,7-2,7+18,4-3,2+16,1-3,7+13,8-4,2$.

Указания. Задачата е свързана с прилагане на идеята на Гаус за събиране на естествените числа от 1 до 100, като събираемите в случая са дробни числа.

е) За първите седем числа може да се приложи на идеята на Гаус, за следващите шест числа – също.

ж) Подчертайте числата на четно място. Приложете идеята на Гаус за неподчертаните числа, а после – за подчертаните числа.

Задача 6. Пресметнете:

а) $0,7+0,07+0,007+0,0007+0,00007$

- б) $1,9+1,09+1,009+1,0009+1,00009+1,000009$ в) $0,1+0,01+0,001+0,0001+0,00001$
 з) $1,1+1,01+1,001+1,0001+1,00001+1,000001$ д) $0,6+0,006+0,00006+0,0000006$
 е) $0,66+0,066+0,0066+0,00066+0,000066$
 ж) $0,9+0,99+0,999+0,9999+0,99999+0,999999$
 з) $1+1,1+1,11+1,111+1,1111+1,11111$.

Решаването на задачата няма да затрудни учениците. Подходящо е да се използва за организиране на състезание с отчитане и на времето за работа. Решаването на задачата съдейства за развитие на вниманието и съобразителността на учениците. Обикновено се допускат грешки при решаване на последните четири подточки.

Задача 7. Изчислете: а) $\frac{120+120+120+120+120}{5}$ б) $\frac{120+121+122+123+124}{5}$ [4]
 в) $\frac{12+13+14+15+16+17+18+19+20+21}{11}$.

Указание. б) Има различни възможности за пресмятане. Най-удобно е числителят да се представи с 5.122. До този резултат може да се стигне така:

1. Всяко от събираемите се представя със сбор, едното събираемо на който е 122. Тогава за числителя се получава $122-2+122-1+122+122+1+122+2=5.122$.

2. В числителя събираемите са последователни естествени числа. Затова $120+124=121+123=2.122$. Така за числителя се получава 5.122.

Задача 8. Изчислете:

а) $\frac{23}{99} + \frac{2323}{9999} + \frac{232323}{999999} + \frac{23232323}{99999999} + \frac{2323232323}{9999999999} + \frac{232323232323}{999999999999}$
 б) $\frac{123}{456} + \frac{123123}{456456} + \frac{123123123}{456456456} + \frac{123123123123}{456456456456}$

Решение. а) Сходството между числителите и знаменателите на събираемите ни насочва към търсене на рационален начин за изчисление. На пръв поглед правилата за делимост, които са познати, не могат да се използват за съкращаване на някои от дробите. Ясно е, че 2323 се дели на числото 23, като резултатът е 101. Остава да се провери дали и 9999 се дели на 101. Тогава дробта $\frac{2323}{9999}$ е съкратима; $\frac{2323}{9999} = \frac{23.101}{99.101} = \frac{23}{99}$. Аналогично

$\frac{232323}{999999} = \frac{23.10101}{99.10101} = \frac{23}{99}$. Следователно търсената сума е равна на $\frac{23}{99} \cdot 6 = \frac{46}{33}$.

Решаването на задачата трябва да се свърже с изводи за резултатите при: умножение на едноцифрено число с 1; 11; 111; и т.н; умножение на двуцифрено число със 101; 10101; 1010101; и т.н.; умножение на трицифрено число с 1001; 1001001; 1001001001; и т.н.; умножение на четирицифрено число с 10001; 100010001; и т.н. Това може да стане:

1. Преди решаване на предложената задача. Така ще се осигури предварителна подготовка на учениците.

2. По време на решаване на предложената задача – дава се като помощ, която да осигури досещането. Така учениците имат възможност самостоятелно да решат задачата, или пък с помощ при нужда.

3. След решаване на предложената задача. Формулира се извод за посочените произведения, който има самостоятелно значение.

В зависимост от състава на класа учителят преценява кой вариант да използва. Подходящо е да се постави за самостоятелна работа задача за съставяне на задача по аналогия на решаваните.

Задача 9. Изчислете: а) $\frac{2+4+6+8+10}{3+6+9+12+15}$ б) $\frac{2.3+4.6+8.12+14.21}{3.5+6.10+12.20+21.35}$
 в) $\frac{1.2.3+2.4.6+4.8.12+7.14.21}{1.3.5+2.6.10+4.12.20+7.21.35}$ [2] з) $\frac{3.5.7+6.10.14+9.15.21+12.20.28}{2.3.11+4.6.22+6.9.33+8.12.44}$

$$d) \frac{4 + 44 + 444 + 4444 + 44444}{5 + 55 + 555 + 5555 + 55555}$$

$$e) \frac{4 + 404 + 40404 + 4040404 + 404040404}{5 + 505 + 50505 + 5050505 + 505050505}$$

Решение. а) $\frac{2+4+6+8+10}{3+6+9+12+15} = \frac{2(1+2+3+4)}{3(1+2+3+4)} = \frac{2}{3}$

$$b) \frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35} = \frac{1.2.3(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)}{1.3.5(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)} = \frac{2}{5}$$

Задача 10. Изчислете а) $\frac{1+(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64})}{3+(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64})}$ б) $\frac{4+(\frac{4}{11}-\frac{4}{13})}{1+(\frac{1}{11}-\frac{1}{13})}$ в) $\frac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}}{7+\frac{7}{4}+\frac{7}{16}+\frac{7}{64}}$

Задача 11. Изчислете: а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$

$$в) \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \quad г) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} \quad д) \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \frac{7}{6} \quad е) \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \frac{9}{5} + \frac{11}{6}$$

Указания. а) Групирайте се числата последователно по двойки:

1 начин. Ако се групират първо и второ, трето и четвърто, пето и шесто число, се получава $\frac{3}{2} + \frac{7}{12} + \frac{11}{30} = \frac{90 + 35 + 22}{60} = \frac{147}{60} = \frac{49}{20}$.

2 начин. По аналогия на идеята на Гаус за събиране на първите сто естествени числа, се групират първо и последно събираемо, второ и предпоследно и т.н. и се получава:

$$\frac{7}{6} + \frac{7}{10} + \frac{7}{12} = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{21}{30} = \frac{49}{20}$$

Очакванията за голямо улеснение на изчисленията, както например при събиране на последователни естествени числа, не се оправдават. Въпреки това се получава известна икономия на пресмятанията.

б) Като се изнесе общ множител пред скоби, задачата се свежда до предходната подточка: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right)$.

в) Групирайте се числата по двойки и се получава $\frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{42}$

г) Задачата се свежда до подточка а) така:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right).$$

А може и да се прибави и извади сумата от подточка а).

д) Всяко от събираемите може да се представи като сума от цяло число и правилна дроб, в резултат се получава: $\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \left(1 + \frac{1}{5}\right) + \left(1 + \frac{1}{6}\right) = 5 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$

е) Има няколко възможности. Всяко от събираемите може да се представи като сума от цяло число и правилна дроб, или пък като разлика между цяло число и правилна дроб. Ще се стигне до решаване горе задача.

Задача 12. Намерете сумата а) $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32}$

$$б) S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} \quad в) S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$$

$$г) S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} \quad д) S = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \frac{4}{243} + \frac{4}{729}$$

При решаване на подточка а) вниманието се насочва към правилото, по което всяко събираемо се получава от предходното и към факта, че последните две събираеми са

равни. От това, че $\frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ и това, че предходното събираемо е равно на $\frac{1}{16}$, се достига до идеята за извършване събирането в обратен на дадения ред.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{2}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

За да се използва идеята на решаване на предната подточка и при решаване на подточка б), необходимо е още едно събираемо. Затова се прибавя и изважда дробта $\frac{1}{2048}$.

При решаване на подточка в) прибавянето и изваждането на дробта $\frac{2}{81}$ няма да

доведе до успех. От една страна, сборът на числата $\frac{2}{81}$ и $\frac{1}{81}$ е равен на предходното събираемо, но след това отново е необходим числител, равен на 2. Затова, за да се използва идеята на решаване на предните две подточки, е необходимо първо да се умножат двете страни на равенството с 2, а после да се прибави и извади $\frac{1}{81}$. Получава се:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}; 2S = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}; 2S = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{1}{81} - \frac{1}{81}.$$

Задача 13. Изчислете устно за 1 минута [5]: а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{99}{100}$ б) $\frac{101.99.97 \dots 5.3.1}{1.3.5 \dots 97}$

Малкото време, с което разполагат учениците за решаване на задачата, ги насочва към търсене на рационален начин за решаване. Бързо съобразяват, че ще се извърши съкращаване. Остава да се прецени кои множители в числителя и кои в знаменателя ще останат. За целта трябва да открият и предпоследния множител за подточка а).

Задача 14. Изчислете: а) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot \dots \cdot 1\frac{1}{9}$ б) $2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \dots \cdot 2\frac{1}{9}$.

Задача 15. Направете прогноза за отговора и за времето, което ще Ви е необходимо за решаване на всяка от задачите. Проверете верността на вашите предположения.

$$а) \frac{11}{11} + \frac{12}{12} + \frac{13}{13} + \frac{14}{14} + \frac{15}{15} + \frac{16}{16} \quad б) \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{30000} + \frac{1}{300000}$$

$$в) (1+2+3+4+5+6+7+8) + (99+98+97+96+95+94+93+92)$$

г)

$$1+2+3+4+5+95+96+97+98+99+1001+1002+1003+1004+1005+995+996+997+998+999$$

$$д) \frac{1+2+3+\dots+100}{2+4+6+\dots+200}$$

$$е) \frac{1+2+3+\dots+100}{1+3+5+\dots+199}$$

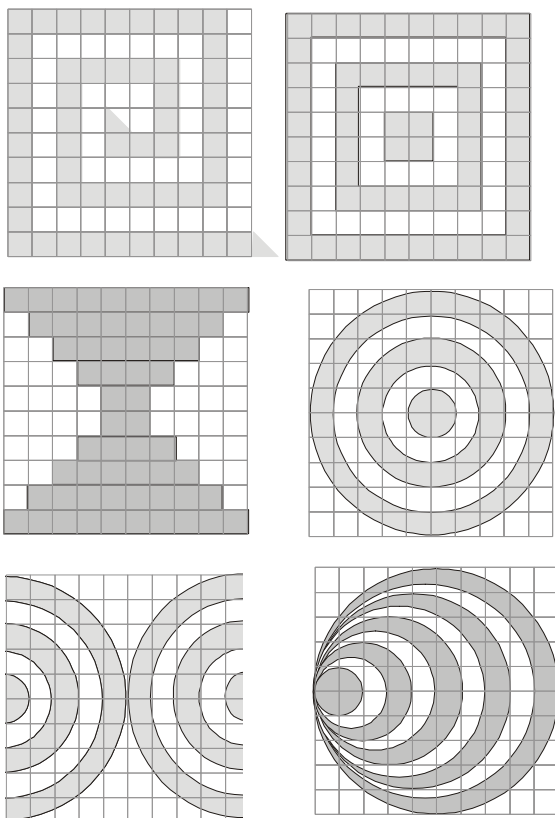
$$ж) \frac{0,48}{0,49} + \frac{0,4848}{0,4949} + \frac{0,484848}{0,494949} + \frac{0,48484848}{0,49494949} + \frac{0,4848484848}{0,4949494949}$$

$$з) \frac{0,48}{0,3} + \frac{0,4848}{0,303} + \frac{0,484848}{0,30303} + \frac{0,48484848}{0,3030303} + \frac{0,4848484848}{0,303030303}$$

$$и) 123\,456+654\,321$$

$$к) 9999999999-9999999999+999999999-99999999+ \dots -9.$$

Задача 16. Намерете лицето на оцветената част.



При решаване на предложените задачи трудностите са свързани най-често с разкриването на закономерности, с намирането на незаписани числа при наличие на многоточие за означаване на част от израза, с правилен избор на рационален способ за изчисление.

За преодоляване на трудностите могат да се предлагат за решаване задачи за разкриване на закономерности между членовете на числови редици (такива задачи има в [7]) и за усвояване на знака "...". Знакът "..." се използва в житейски смисъл и в математиката. В правописния речник на българския език е посочено, че многоточието е знак за отбелязване на недоизказана или прекъсната мисъл. В математиката се използва в смисъл "и така нататък", т.е. мисленето продължава по аналогия на провежданото досега. Записано в края, многоточието означава безкраен процес по аналогия на описания до многоточието. Записано вътре в математически текст, означава известно прекъсване на процеса по аналогия на описания до многоточието. Подходящо е да се предложат специално съставени задачи за разбиране и използване на многоточието в математически текст. Например:

Задача. Кое е следващото събираемо? а) $1+2+3+4+5+ \dots$ б) $2+4+6+8+10+ \dots$

в) $0,7+0,07+0,007+0,0007+0,00007+ \dots$ г) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+ \dots$

Задача. Кое е предпоследното събираемо?

а) $1+2+3+ \dots +100$ б) $25.24-24.23+23.22-22.21+21.20-20.19+ \dots -2.1$

Задача. Кой е следващият множител: $3^2.3^4.3^6.3^8.3^{10}.3^{12}.3^{14}. \dots$?

Задача. Колко са на брой пропуснатите събираеми?

а) $9+89+899+8999+ \dots +8999999999$ б) $106+105+104+103+102+ \dots +94$

$$в) \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \frac{1}{12.13} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

Задача. Колко са на брой пропуснатите множители $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{99}{100}$?

Задача. Какво е правилото, по което се получават събираемите в израза $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$?

Разкриването на закономерности, откриването на рационален начин за решаване на задача е показател за интелекта на учениците. Не е случайно, че такива се предлагат за решаване на състезания, в тренировъчни тестове [3], психологически изследвания. От друга страна, решаването им съдейства за формиране и усъвършенстване на уменията за рационално извършване на изучаваните действия, за развитие на мисленето и вниманието на учениците, следователно е подходящо да намерят място в задължителното и в избираемото обучение по математика.

Литература

1. Ганчев, И. и др. Методика на обучението по математика 5. -7. клас. Макрос 2000, Пловдив, 1997.
2. Гусев, В. и др, Внекласная работа по математике в 6-8 классах. М., Просвещение, 1984.
3. Лазаров, Б., Й. Табов, К. Банков, Тренировъчни тестове за 6-11 клас. С., ЛИК, 1999.
4. Нагибин, Ф., Е. Канин, Математическая шкатулка. М., Просвещение, 1984.
5. Степанов, В. Активизация внеурочной работы по математике в средней школе. М., Просвещение, 1991.
6. Чехларова, Т. Сборник от задачи с числови редици и редици от фигури за 5. и 6. клас. Макрос, Пловдив, 2003.
7. Чехларова, Т., П. Сотирова, Някои способи за рационални изчисления. В: Научни трудове на СУ – Пловдив, 2004.