

ФОРМИРАНЕ НА ПРЕДСТАВА ЗА ЕДНАКВОСТ В ПРОСТРАНСТВОТО

Сава И. Гроздев, Тони К. Чехларова

Формирането на представа за еднаквост в пространството развива пространственото въображение на учениците, което е цел на обучението по математика, и повишава математическата им култура. Една възможност за това дава използването на конструкции от кубчета. Като се има предвид, че еднаквостите в пространството са движения (запазващи ориентацията) и отражения (променящи ориентацията) [1, с. 58], подходящи за процеса на обучение са следните три етапа:

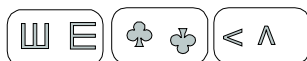
- опериране с конструкции от кубчета, които могат да заемат едно и също положение в пространството;
- опериране с конструкции от кубчета и огледалните им образи;
- опериране с еднакви конструкции от кубчета.

Настоящата статия е посветена на първия етап. Представено е учебно съдържание за формиране на знания и умения за разпознаване и опериране с конструкции от кубчета, които могат да заемат едно и също положение в пространството.

Под конструкция от кубчета ще разбираме тяло, което е съставено от единични кубчета. Свързването на единичните кубчета в тялото може да се дефинира индуктивно: от тяло с n единични кубчета се получава тяло с $n + 1$ единични кубчета, като се добави ново единично кубче така, че едно от единичните кубчета на първото тяло и новото кубче да имат обща стена. Оттук следва, че ако две единични кубчета в една конструкция имат обща точка, то те имат общ връх, общ ръб или обща стена. Различни конструкции и един клас задачи във връзка с тях, са разгледани в [2]. Задачите, които следват по-долу, са авторски и са свързани с отбелязвания в резюмето първи етап на формиране на понятието “еднаквост” в пространството. Те са предназначени за ученици от 9 клас и нагоре, т.е. за тези, които са запознати с понятието “еднаквост” в равнината. Някои от задачите са достъпни и за по-малки ученици, поради което вариации около тях се срещат в темите за 3–8 клас от различни математически състезания

Добре известно е, че еднаквостта в геометрията се дефинира като преобразуване, което запазва разстоянието. Подобна дефиниция е добра, защото е достатъчно обща, но не е много подходяща за ученици. Причината е, че учениците я осъзнават трудно. Във връзка с формирането на интуитивна представа за еднаквост в равнината се използва следната дефиниция: *Две фигури в равнината са **еднакви**, когато могат да се “наложат” една върху друга така, че да съвпадат.* Съществено е да

се отбележи, че в някои случаи за да се реализира “налагане”, не е необходимо да се напуска равнината, в която са разположени фигурите. Достатъчно е едната от фигурите да бъде завъртяна на подходящ ъгъл (за буквата “ш” от първия пример на фигурата долу вляво – на 90° по посока на часовниковата стрелка) и след това преместена до положение на втората фигура). В този случай “налагането” се осъществява с помощта на ротация и трансляция. В други случаи обаче ротациите и



транслациите в равнината не са достатъчни (вж. примерите горе вдясно). Ако не искаме да използваме само завъртания и премествания (ротации и трансляции), напускането на равнината, в която са разположени фигурите, е задължително. Причината е в различната **ориентация** на двойките фигури. За двете ръчички например, тръгвайки от палеца към показалеца и т.н. до кутрето, посоката е различна. При едната ръчичка тази посока е обратна на часовниковата стрелка, а при другата – по часовниковата стрелка. В този случай е необходимо огледално отражение, т.е. осева симетрия. Едно възможно онагледяване е, когато прегънем по средата листа, на който са нарисувани двете ръчички. Реализацията на “налагането” на ръчичките една върху друга става с излизане в пространството и при тази процедура осевата симетрия се заменя с прегъване на листа. При пространствените фигури нещата се усложняват, защото огледалното отражение в пространството е вече симетрия спрямо равнина (а не спрямо права) и аналогия за онагледяване едва ли съществува (излизането от тримерното пространство наподобява телепортиране). В тази връзка ще разгледаме следната занимателна:

Задача 1. Три конструкции се огледали в езерото.

— Това аз ли съм? – попитала първата конструкция.

— Това е огледалният ти образ – отговорила втората.

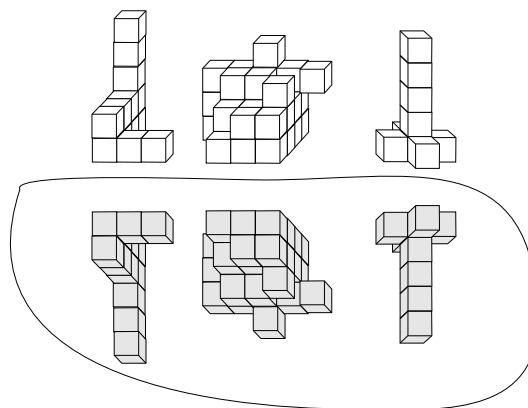
— Ако се потопя във водата, същото положение ли ще заема?

— Не, но ти и огледалният ти образ сте еднакви.

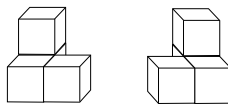
— Аз съм перфектна – казала третата. – Така съм конструирана, че аз и огледалният ми образ можем да заемем едно и също положение в пространството.

Коя е третата конструкция?

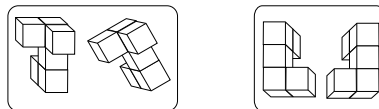
Тук използвахме понятието “едно и също положение в пространството”, което е аналог на равнинното налагане до съвпадане, т.е. до еднаквостта. Примерът по-горе обаче показва, че в пространството не винаги две еднакви тела могат да бъдат наложени едно върху друго, т.е. да заемат едно и също положение. От друга страна е естествено да считаме, че огледалният образ на едно тяло е еднакъв със своя първообраз (здравият разум го изисква). Оттук следва, че дадената по-горе дефиниция



за еднаквост в равнината няма аналог в пространството. Работеща е споменатата обща дефиниция: Ако фигурата F^* е образ на фигурата F при дадено геометрично преобразуване f в пространството и за всеки две точки A и B от F и съответните им образи $f(A) = A^*$ и $f(B) = B^*$ от F^* е изпълнено $AB = A^*B^*$, то фигурите F и F^* се наричат **еднакви**. Както и в равнинния случай (когато не искаме да напускаме равнината), причината за две еднакви тела да не могат винаги да бъдат доведени до едно и също положение само с ротация и транслация е в ориентацията. Еднаквостта като преобразуване, запазващо разстоянието, може да бъде движение, което не променя ориентацията, или отражение, което променя ориентацията. Вторият “вид” еднаквост е показана по-долу с две конструкции от по 4 кубчета.



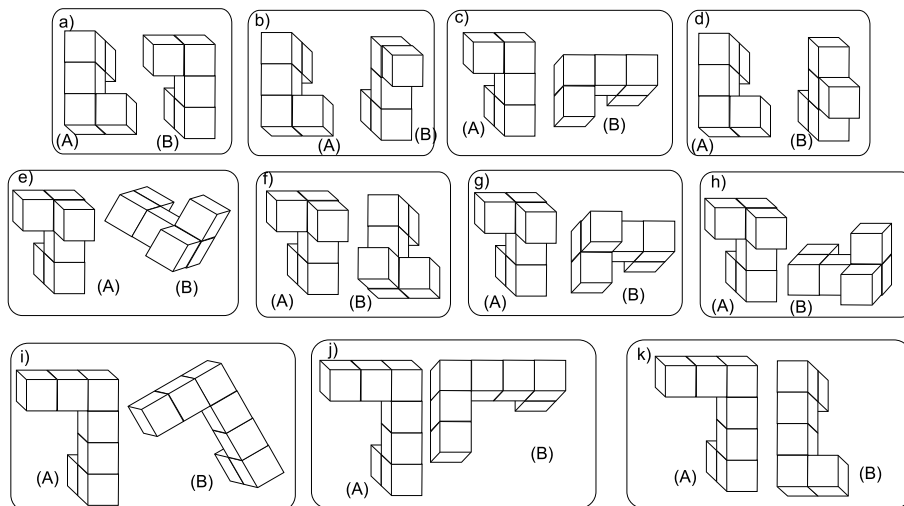
Именно различната ориентация на двете конфигурации е причина да не може едната да бъде получена от другата чрез типичното за равнината “налагане”. Настоящата статия няма за цел да навлиза в подробностите на пространствената ориентация, защото това изисква допълнителни разглеждания и излиза извън рамките на училищния курс по математика. Симетрията спрямо равнина в пространството се осъзнава по-трудно от ротацията и транслацията, поради което формирането на представа за пространствена еднаквост изисква специално внимание. Този аргумент е в основата на статията. Както стана ясно, аналогията с равнината не работи и за да останем на интуитивно ниво, ще казваме, че: *Две тела в пространството са еднакви, когато едното от тях може да заеме положението на другото до съвпадане или когато едното е огледален образ на другото.*



Ето още два примера на двойки тела, които илюстрират типичните за пространството еднаквости. При първия е достатъчно второто тяло да се “изправи”, след което възможността за преместването му до положение на първото тяло става очевидна. При втория пример както и да се върти едното тяло или да се мести, то не може да заеме положението на второто. В този случай е необходимо огледално отражение, т.е. симетрия.

Следващите задачи са свързани с конструкции от кубчета, които могат да заемат едно и също положение в пространството. Всички конструкции са съставени от еднакви единични кубчета.

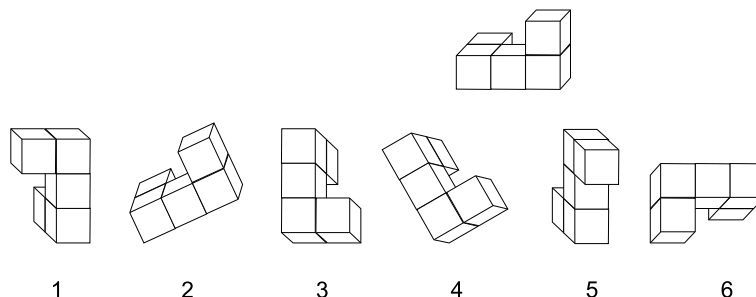
Задача 2. Дадени са следните двойки конструкции от кубчета (вж. фигурите). Възможно ли е конструкцията от една двойка да заеме положението в пространството на другата конструкция от двойката?



Най-често задачи, подобни на горната, се решават чрез мислено завъртане и преместване на едната конструкция до съвпадане с другата или до установяване, че такова съвпадане е невъзможно. В някои случаи обаче не е необходимо да се осъществяват такива завъртания и премествания. За да се убедим във верността на последното, ще използваме понятието “размери” (понякога се използва “габарити”) на една конструкция от кубчета. Да допълним конструкцията (A) от а) до паралелепипед с добавяне на 7 нови единични кубчета. Какво се разбира под “размери” на получения паралелепипед е добре известно. Тези размери са $2 \times 2 \times 3$. Под “размери” на една конструкция от кубчета ще разбираме размерите на най-малкия по обем паралелепипед от единични кубчета, който съдържа конструкцията. Сега за решаване например на b) е достатъчно да се забележи, че конструкцията (A) има размери $2 \times 2 \times 3$, а конструкцията (B) е с размери $1 \times 3 \times 3$. Оттук следва, че едната не може да заеме мястото на другата в пространството. За решаване на k) пък е достатъчно да се установи, че броят на единичните кубчета, от които е конструирана (A), е различен от броя на единичните кубчета, от които е конструирана (B). При решаване на f) е удобно да се имат предвид конструкциите от е). Конструкция (A) от е) и конструкция (A) от f) заемат едно и също положение. След като сме установили, че (A) и (B) от е) могат да заемат едно и също положение в пространството, подходящо е да сведем задачата до сравняване на конструкция (B) от е) и конструкция (B) от f). Понеже те могат да заемат едно и също положение, изводът е, че (A) и (B) от f) също могат да заемат едно и също положение. В случай, че те не можеха да заемат едно и също положение в пространството, изводът за (A) и (B) от f) би бил противният. Тук използвахме транзитивност, а именно: ако $x = y$ и $y = z$, то $x = z$.

Отговори. а) да; б) не; в) да; г) не; е) да; ф) да; г) да; h) да; i) да; j) да; k) не.

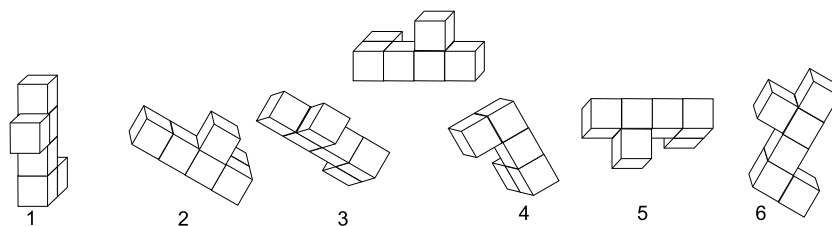
Задача 3. Коя от посочените 6 конструкции **не** може да заеме положението в пространството на дадената конструкция?



Освен чрез последователно сравняване на дадената конструкция с останалите, възможен подход за отхвърляне на обекта 5 е да се прецени, че размерите на 5 са различни от тези на дадената конструкция.

Отговор. 5

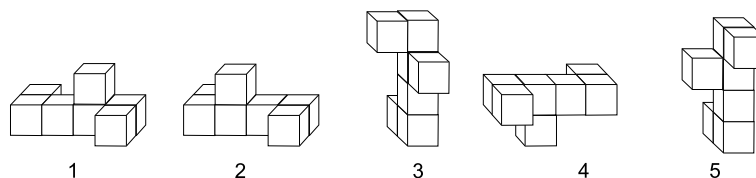
Задача 4. Коя от посочените 6 конструкции може да заеме положението в пространството на дадената конструкция?



Конструкция 4 съдържа по-малък брой кубчета от дадената, а размерите на 1, 3 и 6 са различни от тези на дадената конструкция. Остава да се направи проверка за конструкции 2 и 5.

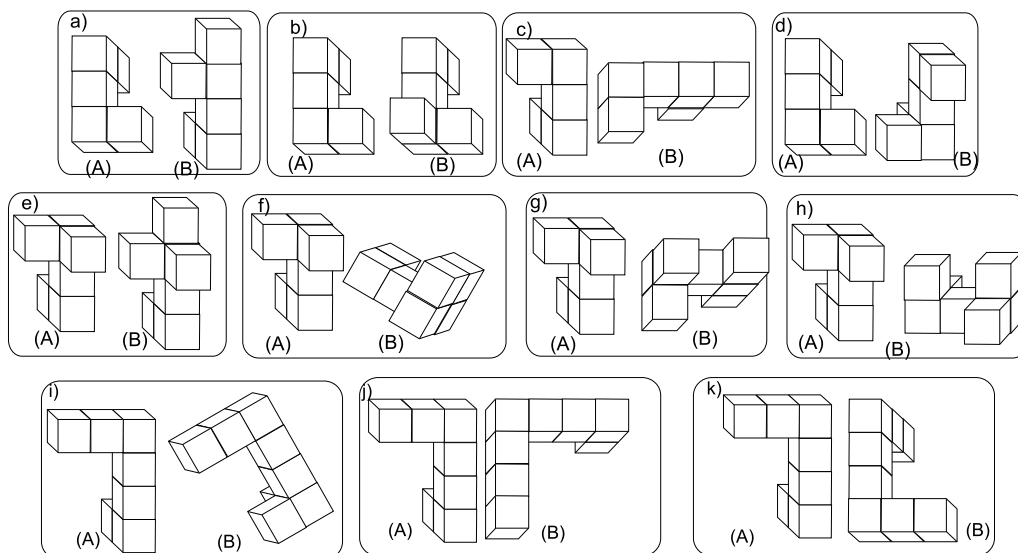
Отговор. 5

Задача 5. Коя от посочените 5 конструкции не може да заеме положението в пространството на всяка една от останалите?

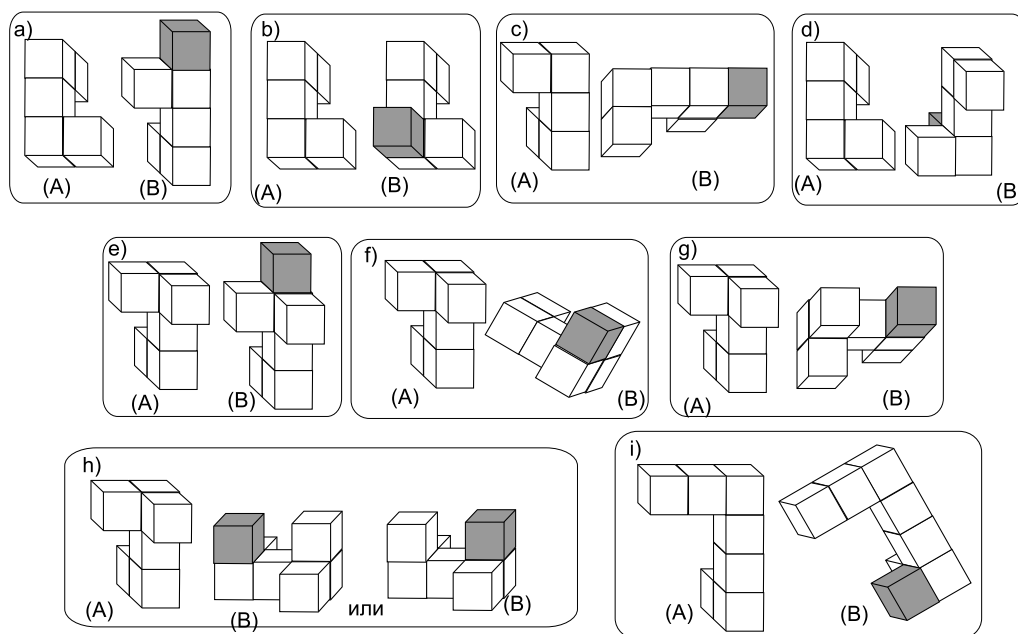


Отговор. 3

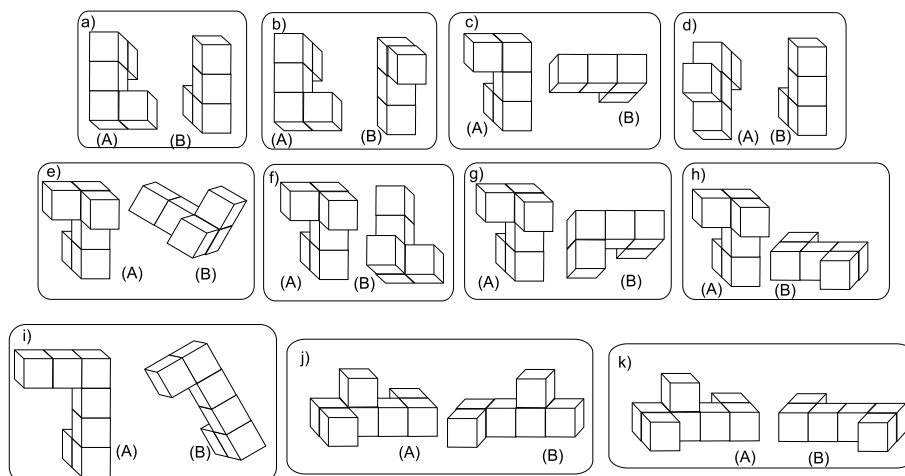
Задача 6. Отстранете точно едно кубче от (B) така, че получената конструкция да може да заеме положението в пространството на конструкция (A).



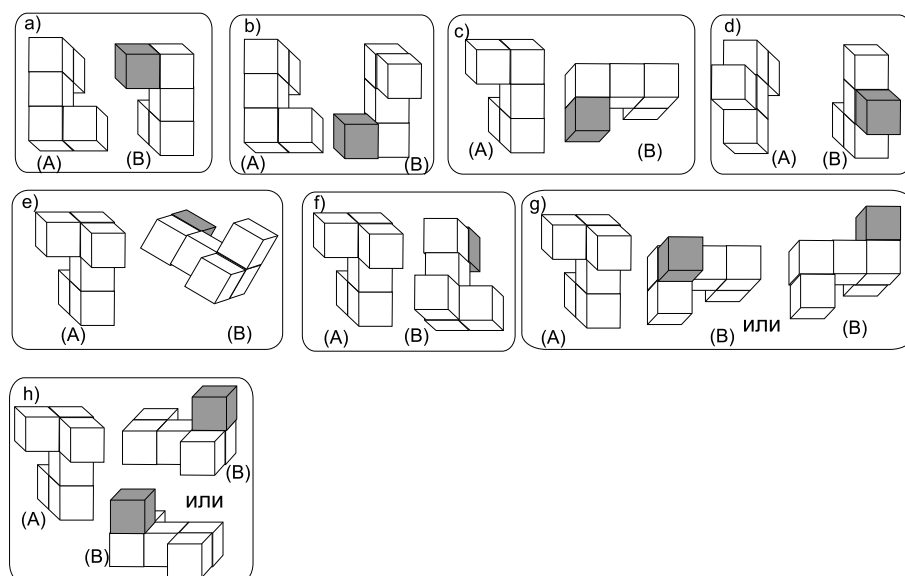
Отговор. По-долу е затъмнено кубчето, което трябва да се отстрани.



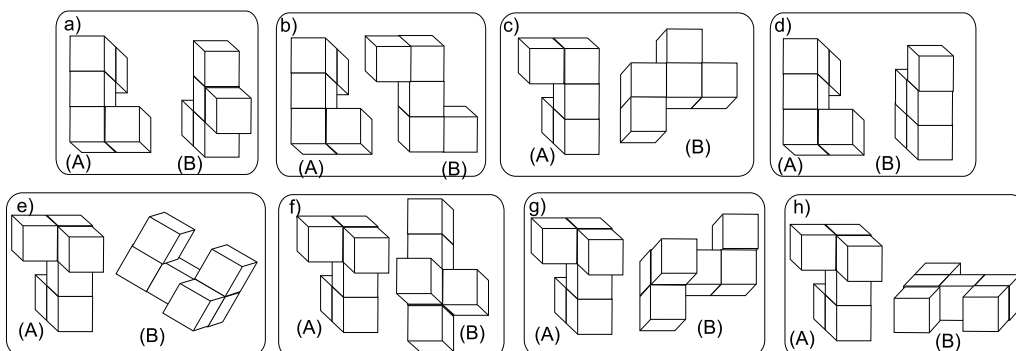
Задача 7. Допълнете с едно кубче (B) така, че получената конструкция да може да заеме положението в пространството на конструкция (A).



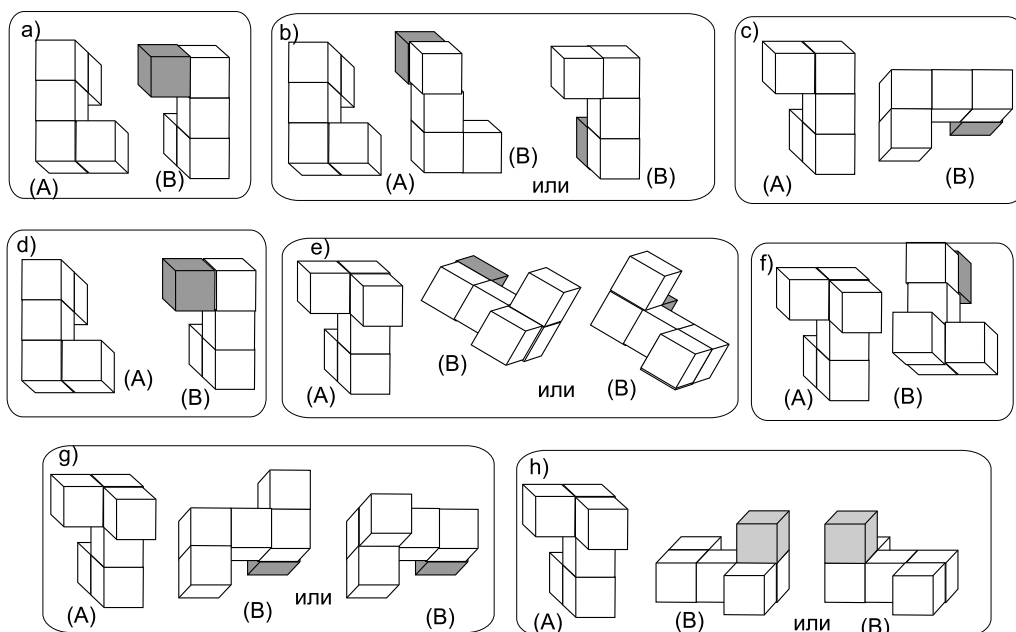
Отговор. Добавеното единично кубче е затъмнено по-долу.



Задача 8. Променете мястото на едно от кубчетата в (B) така, че получената конструкция да може да заеме положението в пространството на конструкция (A).

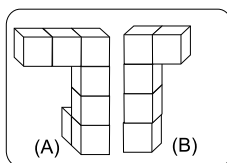


Отговор. Затъмнено е преместеното кубче.

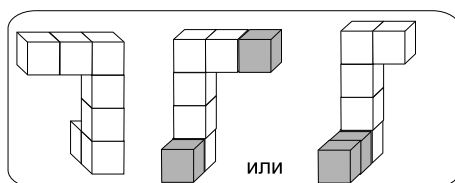


В последните три задачи се осъществява отстраняване, добавяне или преместване на едно единично кубче. Нещата се усложняват значително, ако това трябва да стане с 2, 3 или повече единични кубчета. Ето примери на конструкции, от които трябва да се отстранят или добавят 2 кубчета.

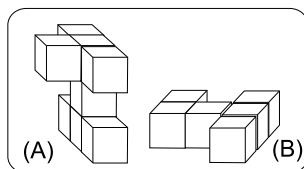
Задача 9. Допълнете с две кубчета (В) така, че получената конструкция да може да заеме положението в пространството на конструкция (А).



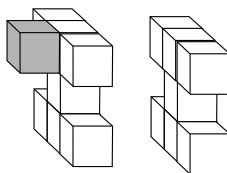
Отговор. Затъмнени са добавените кубчета.



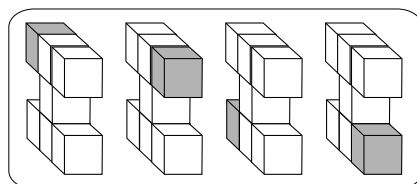
Задача 10. Отстранете две кубчета от (А) така, че получената конструкция да може да заеме положението в пространството на конструкция (В).



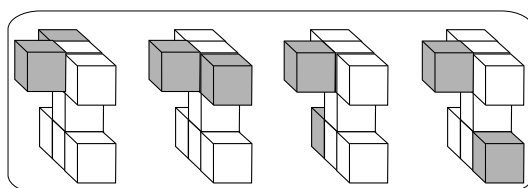
Отстраняването на затъмненото по-долу единично кубче е продиктувано от необходимостта да се изравнят размерите на (А) и (В). От новополучената конструкция, която е съставена от 7 кубчета, може да се отстрани още едно единично кубче по



четири различни начина, водещи до решение на задачата (вж. фигурата по-долу). Всички те реализират конструкции, които могат да заемат положението в пространството на (В).



Отговор. Затъмнени са отстранените кубчета.



Огледалните образи на конструкции от кубчета предлагат още по-големи предизвикателства. Те са свързани с отбелязания в резюмето втори етап на формиране на понятието “еднаквост” в пространството. Оперирането с тях задълбочава развитието на въображението. Различни задачи, свързани с огледални образи, са предмет на друга статия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Й. Николов. Училищен курс по математика – геометрия. Част II, Стереометрия. Университетско издателство “Еп. К. Преславски”; Шумен, 2003.
- [2] S. GROZDEV, T. CHEHLAROVA. Cube constructions. Proc. 3rd Congress of Mathematicians of Macedonia, Struga, 29.09. – 02.10.2005 (to appear).

Сава Гроздев
Институт по Математика и Информатика
Българска Академия на Науките
ул.“Акад. Г. Бончев”, бл. 8
1113 София
e-mail: savagroz@math.bas.bg

Тони Чехларова
ПУ “Паисий Хилендарски”
4000 Пловдив
e-mail: tchehlarova@mail.bg

FORMATION OF 3D CONGRUENCE IDEA

Sava I. Grozdev, Tony K. Chehlarova

The formation of 3D congruence idea develops spatial imagination of students. The last is a goal of mathematical education and increases mathematical culture at the same time. A possibility for this gives the use of cube constructions. Regarding to the fact that 3D congruence is a movement (keeping orientation) or a reflection (changing orientation) [1, p. 58], three stages are suitable for the educational process:

- operations with cube constructions, which can take one and the same position in the 3D space;
- operations with cube constructions and their reflected images;
- operations with congruent cube constructions.

The present paper is dedicated to the first stage. It presents a curriculum for the formation of knowledge and skills in connection with recognition and operation with cube constructions which can take one and the same position in the 3D space.