

ОЦВЕТЯВАНЕ НА КОНСТРУКЦИИ ОТ КУБЧЕТА¹

Сава Гроздев Тони Чехларова***

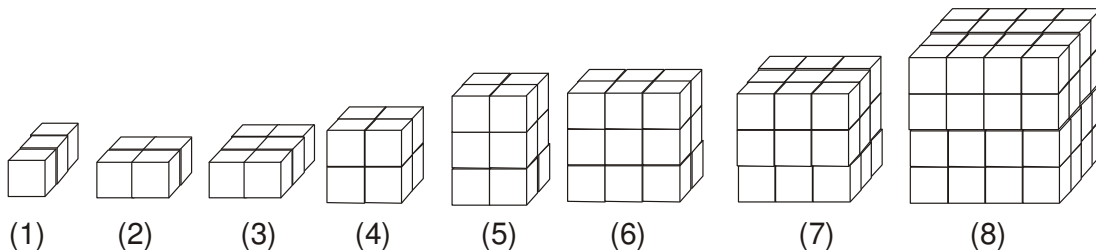
**ИМИ, БАН **Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“*

Конструкцията от кубчета са удобно средство за съставяне на задачи за развитие и за проверка на пространственото въображение. Затова се използват в психологически тестове и математически състезания. В [1] и [2] са представени някои задачи с конструкции от кубчета, решаването на които е свързано както с формиране на математически понятия, така и с развитие на въображението на учениците.

Предлагаме система от задачи с оцветяване на конструкции от кубчета и методика за обучението с тях. За решаване на задачите е необходимо да се наблюдава, съобразява, сравнява, търсят аналогии, брой рационално. Представени са някои възможности за онагледяване на решенията.

Задача 1. От единични кубчета е конструиран правоъгълен паралелепипед, който е потопен в боя. Колко са единичните кубчета, които имат:

- а) точно една оцветена стена;
- б) точно две оцветени стени;
- в) точно три оцветени стени;
- г) точно четири оцветени стени;
- д) точно пет оцветени стени?

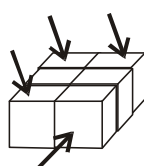


¹ Темата е разработена с финансовото съдействие на фонд “НИ” при ПУ. Дог.№ 05М5.

Ясно е, че ще се оцветят шестте стени на правоъгълния паралелепипед. Затова се интересуваме от броя на тези стени на всяко от единичните кубчета, които са част от стените на съответния правоъгълен паралелепипед. Може да се прави проверка за всяко от единичните кубчета. Рационално е обаче да се прецени, че има кубчета, които са с едно и също разположение спрямо останалите, затова ще имат равен брой оцветени стени. Например за конструкция (1) такива са посочените със стрелка кубчета. Такива са и посочените кубчета за конструкция (3).

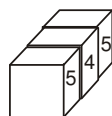


(1)



(3)

За материализиране на решението е подходящо учениците да се насочат към записване върху кубчета на броя на оцветените стени. При намиране на този брой може да се извърши преброяване, както и изваждане от общия брой на стените на кубче броя на неоцветените стени.



При необходимост е подходящо да се използват пространствени модели на дадените правоъгълни паралелепипеди: за достигане до решението чрез непосредствена проверка или за онагледяване на решението, до което е достигнато с използване само на двумерните изображения.

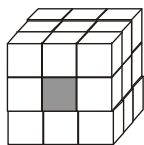
Задачата съдържа пет подточки за 8 фигури, т.е. самата задача може да се разглежда като система от задачи. При осъществяване на експеримент проследихме и избора на последователност за решаване, както и записа на решение. На част от учениците бе предложена таблица за описание на отговора, с което се намали времето за решаване. Преобладават учениците, които попълват таблицата по колони. Съсредоточаването върху обекта – правоъгълния паралелепипед и анализирането му – изследване на структурните елементи отнема по-малко време, отколкото извършването на проверка по брой на оцветени стени.

Отговор:

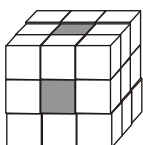
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a)	0	0	0	0	0	2	6	24
б)	0	0	0	0	4	8	12	24
в)	0	0	2	8	8	8	8	8
г)	1	4	4	0	0	0	0	0
д)	2	0	0	0	0	0	0	0

Задача 2. От куб $3 \times 3 \times 3$ са отстранени кубчетата, лежащи в маркираните колони, след което получената конструкция е потопена в боя. Колко са единичните кубчета:

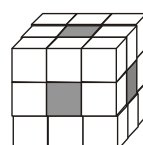
- а) от които е съставена получената конструкция;
- б) с точно три оцветени стени;
- в) с точно четири оцветени стени?



(1)



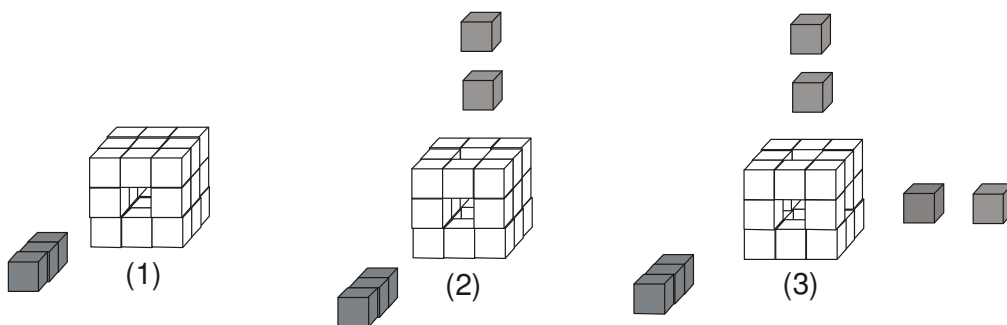
(2)



(3)

Означението $a \times b \times c$ (в частност $3 \times 3 \times 3$) се използва в състезателни задачи и е свързано с размерите на правоъгълен паралелепипед (в частност на куб). Обикновено учениците се ориентират самостоятелно още при първата среща с означението, но при необходимост то трябва да им бъде изяснено.

Да преброим единичните кубчета в получената конструкция. Една възможност е от броя на кубчетата в дадения куб да се извади броя на отстранените единични кубчета. Всички единични кубчета в куб $3 \times 3 \times 3$ са 27. От куба е отстранена една колона, съдържаща 3 единични кубчета, в резултат на което е получена конструкция (1). Следователно след отстраняване на посочените единични кубчета конструкция (1) ще съдържа $27 - 3 = 24$ единични кубчета. Конструкция (2) е получена след отстраняване на две колони, но едно от единичните кубчета (централното) е общо за двете колони. Следователно са отстранени $3 + 2 = 5$ единични кубчета, а получената конструкция (2) съдържа $27 - 5 = 22$ единични кубчета. Типична грешка е неотчитане на факта, че двете маркирани колони са пресичащи се и сечението им се състои от едно кубче. При необходимост може да се използва допълнително онагледяване:

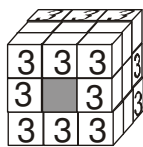


Конструкция (3) е съставена от $27 - (3 + 2 + 2) = 20$ единични кубчета.

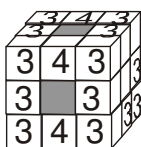
Втора възможност за решаване на подточка а) е да се преброят единичните кубчета в получената конструкция, като е удобно да се използва повторението на групи от кубчета в конструкцията.

Да преброим единичните кубчета в (1), които имат точно три оцветени стени. След отстраняване на трите кубчета от куба $3 \times 3 \times 3$, за 12 единични

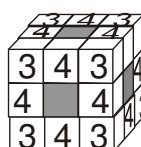
кубчета “външна” става още една стена, която ще се оцвети след потапяне в боя. Така с 3 оцветени стени ще бъдат 16 кубчета.



(1)



(2)



(3)

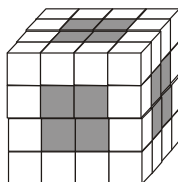
Ще отбележим, че за решаване на задачата първо трябва да се извърши реконструиране на тяло по отношение на градивните му елементи – единични кубчета (чрез отстраняване на някои от тях), а после – реконструиране чрез цвятова промяна.

Отговор:

	(1)	(2)	(3)
a)	24	22	20
б)	16	16	8
в)	0	4	12

Задача 3. В куб 4 x 4 x 4 са отстранени кубчетата, лежащи в маркираните колони, след което получената конструкция е потопена в боя.

- От колко единични кубчета е съставена получената конструкция?
- Колко са кубчетата с точно три оцветени стени?



Отново могат да се използват двата начина за решаване, посочени в решението на задача 2.

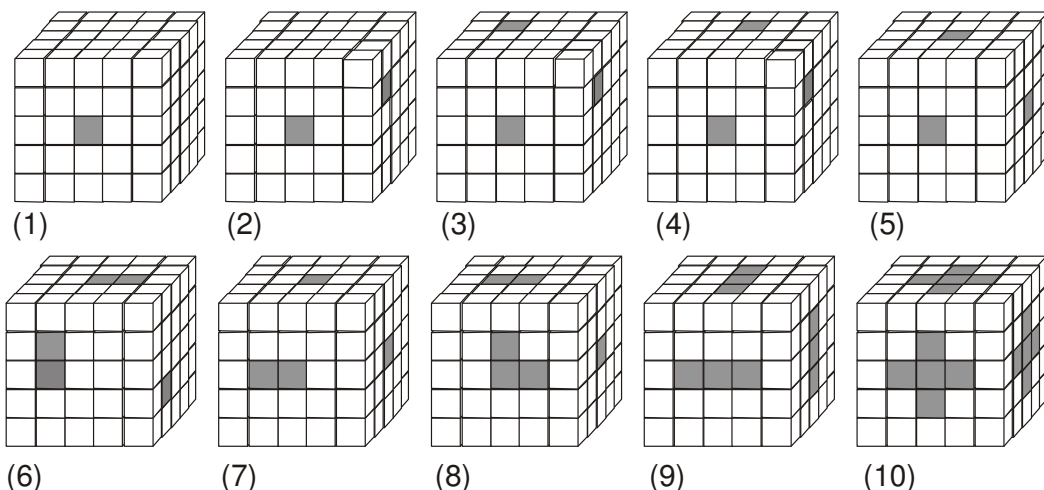
1 начин. От общия брой единични кубчета изваждаме броя на отстранените кубчета и получаваме: $64 - (4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2) = 32$ единични кубчета, които съдържа получената фигура.

2 начин. Преброяваме кубчетата в получената фигура и получаваме $4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 32$.

Отговор: а) 32; б) 8.

Задача 4. От куб 5 x 5 x 5 са отстранени кубчетата, лежащи в маркираните колони, след което получената конструкция е потопена в боя. Колко са единичните кубчета:

- от които е съставена конструкцията;
- без оцветена стена?



Нека първо да преброим единичните кубчета в получените конструкции. Куб $5 \times 5 \times 5$ съдържа 125 единични кубчета. След отстраняване на една колона, т.е. на 5 единични кубчета, се получава конструкция (1), съдържаща $125 - 5 = 120$ кубчета.

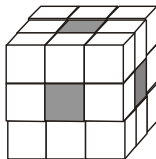
За (2) е важно да се прецени, че в двете маркирани колони няма общи единични кубчета (т.е. колоните са непресичащи се). Конструкция (2) съдържа $125 - 2 \cdot 5 = 115$ кубчета. За останалите конструкции се получава съответно:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 125 - 3 \cdot 5 = 110 & (4) \quad & 125 - (5 + 5 + 4) = 111 \\
 (5) \quad & 125 - (5 + 4 + 4) = 112 & (6) \quad & 125 - (10 + 10 + 5) = 100 \\
 (7) \quad & 125 - (10 + 4 + 3) = 108 & (8) \quad & 125 - (3.5 + 5 + 3 + 2) = 100 \\
 (9) \quad & 125 - (3.5 + 3.4 + 2.4) = 88 & (10) \quad & 125 - (5.5 + 2.4 + 3.2 + 5.2) = 76.
 \end{aligned}$$

Отговор. б) (1) 12; (2) 8; (3) 5; (4) 4; (5) 8; (6) 0; (7) 4; (8) 0; (9) 0; (10) 0.

Задача 5. Куб $3 \times 3 \times 3$ е потопен в жълта боя. След отстраняване на маркираните колони, получената конструкция е потопена в синя боя. Колко са единичните кубчета в получената конструкция, които имат:

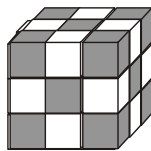
- а) синя стена;
- б) зелена стена?



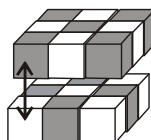
Известно е, че при смесване на син и жълт цвят се получава зелен цвят. Затова синя ще бъде онази стена, която не е била оцветена предварително в жълто. А такива са стените на единичните кубчета, които не са стени на куба $3 \times 3 \times 3$. Зелени стени ще имат всички единични кубчета в получената конструкция, а те са 20.

Отговор: а) 12; б) 20.

Задача 6. Куб $3 \times 3 \times 3$ е съставен от еднакви единични кубчета, оцветени в бяло или черно. Във върховете на големия куб се намират черни единични кубчета. Всеки две съседни единични кубчета са с различни цветове. С колко черните кубчета са повече от белите? (съседни кубчета в конструкцията се наричат единични кубчета, които имат обща стена)



Разбира се, могат да се преброят черните кубчета, после белите кубчета, след което да се намери разликата. Преброяването дори може да се извърши рационално. Добре е обаче да се съобрази, че в два съседни пласта се съдържат общо равен брой бели и черни кубчета, защото под всяко бяло (черно) кубче от единия пласт е разположено черно (бяло) кубче.

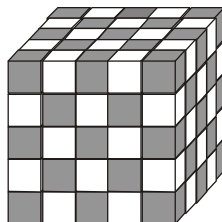


Остава да се направи преценка за "третия" пласт. И тук изводът може да е резултат не от преброяване, а от съпоставяне. Една възможност е показана на фигурата.



Отговор: 1.

Задача 7. Куб $5 \times 5 \times 5$ е съставен от еднакви единични кубчета, оцветени в бяло или черно. Във върховете на големия куб се намират черни единични кубчета. Всеки две съседни единични кубчета са с различни цветове. С колко черните кубчета са повече от белите?



Разсъжденията при решаване на предходната задача прилагаме за куб $5 \times 5 \times 5$. Аналогични ще са разсъжденията и резултатът за куб $7 \times 7 \times 7$ или $29 \times 29 \times 29$.

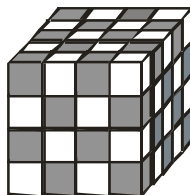
Отговор: 1.

Задача 8. Куб $4 \times 4 \times 4$ е съставен от еднакви единични кубчета, оцветени в бяло или черно. Всеки две съседни единични кубчета са с различни цветове. Черните кубчета са:

А) повече от белите; Б) по-малко от белите; В) колкото белите.

Отговор: В).

Съзнателното усвояване на решението на предходната задача позволява решаване на тази задача в умствен план. На тези ученици, които имат нужда от визуална опора, трябва да се покаже изображение на куба.

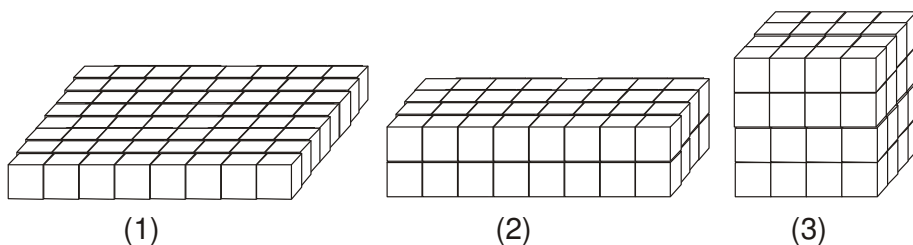


Може да се предложи за решаване аналогична задача за куб $2 \times 2 \times 2$, или $6 \times 6 \times 6$, или $100 \times 100 \times 100$ и да се направи обобщение, свързано с четността на измерението на куба.

Задача 9. Куб $5 \times 5 \times 5$ е съставен от еднакви единични кубчета, оцветени в бяло или черно. Всеки две съседни единични кубчета са с различни цветове. Какъв е минималният брой единични кубчета, които трябва да се отстранят от куба така, че броят на белите кубчета в получената конструкция да е равен на броя на черните кубчета?

Отговор: 1.

Задача 10. Конструкцията е оцветена в черно. Възможно ли е всички кубчета да се подредят върху маса така, че горните им стени да образуват шахматна дъска?



Отговор: да.

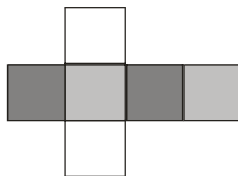
Задача 11. Разполагате с неограничен брой единични кубчета, оцветени в червен или син цвят. Може ли да се построи куб $2 \times 2 \times 2$ така, че да няма съседни кубчета с един и същ цвят? А куб $3 \times 3 \times 3$?

Отговор: да.

Задача 12. Колко цвята най-малко са необходими, за да се оцветят стените на куб така, че да няма съседни стени, оцветени с един и същи цвят?



Срещуположните стени могат да са еднакво оцветени. Има три двойки срещуположни стени, следователно са достатъчни три различни цвята, за да се постигне целта. Не е възможно с по-малко от три цвята да се реализира търсеното оцветяване, защото всеки три стени, които имат общ връх, трябва да са различно оцветени. Ето развивка на оцветено по указания начин кубче с помощта на 3 цвята:



Отговор: 3.

Задачите в предложената система могат да се използват за занятие по избираема подготовка. Отделни задачи могат да се решават в задължителното или избираемото обучение по математика от ученици от 5. клас или следващи класове. Те са подходящи и за самоподготовка за математически състезания.

Литература:

[1] Grozdev, S., T. Chehlarova. Cube constructions. Proc. 3rd Congress of Mathematicians of Macedonia, Struga, 29.09. – 02.10.1005. (to appear)

[2] Гроздев, С., Т. Чехларова, Формиране на представа за еднаквост в пространството. В: Математика и математическо образование, С., СМБ, 2006. с. 363 – 373

COLORING OF CUBE CONSTRUCTIONS

Sava I. Grozdev, Tony K. Chehlarova

Abstract

A system of problems is proposed for coloring of cube constructions and a corresponding methodology for teaching and learning by them is developed. Some possibilities for visualness of the solutions are presented too.