

Дидактически възможности на задачите с везни

Сава Иванов Гроздев* Тони КондеваЧехларова**

*ИМИ, БАН **Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”
sava.grozdev@gmail.com tchehlarova@mail.bg

Добре известно е, че повишаване на ефективността в обучението по математика се постига по пътя на практическото прилагане на активни методи за формиране и организация на учебно-познавателните дейности. В този смисъл е особено важно да се проведе подготовка на обучаваните във връзка с възприемането на даден обект преди конкретното въвеждане на този обект. От съществено значение е инициране на съответна работа с обекта, чиято основна цел е представяне на математическото знание с помощта на адекватни знаково-символни средства. Настоящата статия е посветена на конкретизация на този проблем във връзка с пропедевтиката на понятието “уравнение” и моделирането с помощта на уравнения. За съответен инструментариум са използвани задачи с везни. Предложена е дидактическа система от такива задачи, която е подходяща за избираемо обучение в 4. клас, а в отделни случаи и за задължително обучение.

В началния училищен курс по математика понятието “уравнение” и свързаните с него дейности се изучават неявно, но в органично единство с останалите аритметични и геометрични знания за съответната възраст. Понеже уравнението е обект на алгебрата, включването на този алгебричен елемент в началното обучение има за цел да допринесе за по-задълбочено усвояване на знанията по аритметика и геометрия, но в същото време и да подготви за успешно обучение в по-горните класове. Следователно уравненията в началната степен на образование имат спомагателна функция. Този факт е в сериозна услуга на аргументацията за неформалното им въвеждане и изучаване на техните свойства. Подходящ инструментариум са задачите с везни. Причината е във възможностите, които предоставят тези задачи. Не без значение е също, че в исторически план още от древността хората са търсили лесни начини за измерване и сравняване, което в наши дни е превърнало тези дейности в рутинни. Измерванията и сравняванията, както и многобройните уреди за тяхното подпомагане (в частност везните), са неизменна част от ежедневието, в т. ч. и на подрастващите от най-ранна възраст. Ето част от тези уреди:



Конкретен пример е следната:

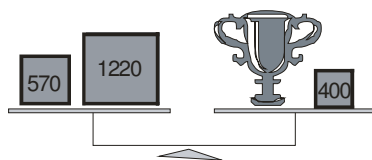
Задача 1.1. Колко тежи спортната купа, ако везната е в равновесие и върху всяка от тежестите са записани теглата им в грамове?

А) 2170 г

Б) 1790 г

В) 1390 г

Г) друг отговор



Решението на тази задача се основава на съображението, че теглата върху двете блюда са равни, след като везната е в равновесие. Обичайният подход е да се започне с означаване на теглото на купата с x (в грамове). По-нататък използваме споменатото съображение и записваме, че $570 + 1220 = x + 400$. Следва стандартна аритметична операция (събиране) $570 + 1220 = 1790$, която води до $1790 = x + 400$. Сега прилагаме едно от правилата за намиране на неизвестен компонент на същата аритметична операция (едното събираемо е разлика на сбора и другото събираемо), откъдето $x = 1790 - 400$. Аритметичната операция “изваждане” дава $1790 - 400 = 1390$ и следователно търсеното число е $x = 1390$ г.

Отговор: В)

По сегашната учебна програма за задължително обучение в началното училище не се предвижда означаване на неизвестни числа с букви. Вместо букви, още в първи клас например, се използват празни квадратчета от вида $\square$, които се свързват с решаването на следните задачи: $a + \square = b$, $\square - a = b$ и $a - \square = b$. Няма да се спираме на факта, че с помощта на такива задачи се затвърдяват знанията за аритметичните операции “събиране” и “изваждане”, както и знанията за техните компоненти. Осъзнава се също, че празното квадратче може да се попълва с произволно число, а когато числото е подходящото, се получава вярно числово равенство. По този начин се стига до понятието “променлива” и се изяснява съдържанието на съжителните функции, защото горните три задачи имат смисъл именно на съжителни функции, на които се търси множеството на вярност (кое число трябва да се постави в празното квадратче, че да се окаже вярно полученото). Основното обаче е, че независимо дали се използват букви или квадратчета става дума за уравнения, а в задача 1.1. и за моделиране с уравнение на конкретна ситуация (в случая на практическа ситуация с везна). По-сложен пример за моделиране с уравнение е свързан със следната:

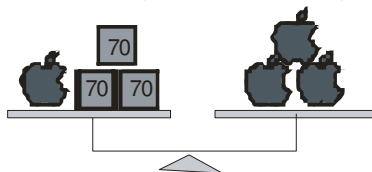
Задача 1.2. Ябълките върху везната по-долу са с равни тегла. Колко тежи всяка от тях, ако везната е в равновесие?

А) 105 г

Б) 210 г

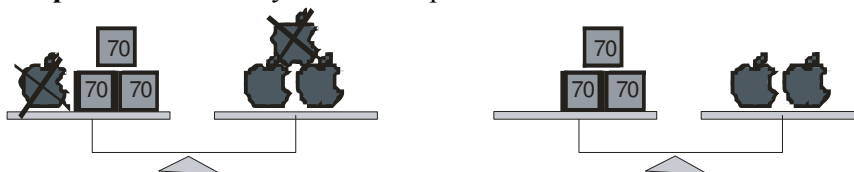
В) 70 г

Г) не може да се прецени



Да означим теглото на една ябълка в грамове с x и да запишем равенството, което свързва теглата върху двете блюда на везната. Това равенство е $x + 3 \cdot 70 = 3 \cdot x$ и то представлява математически модел на ситуацията от картинката. От модела следва, че $2 \cdot x = 210$, т.е. $x = 105$ г. Тук за теглото на всяка от ябълките използвахме буквата x , защото в условието е отбелязано, че ябълките са с равни тегла. Понякога този факт се изпуска. Изрично отбелязваме, че **в следващите задачи предметите от един и същи вид се предполагат с равни тегла.**

В изложеното решение използвахме някои от свойствата на уравненията, свързани с прехвърляне на неизвестните от едната страна, а на известните – от другата, извършване на привеждане и решаване задача от вида $a \cdot \square = b$. В същото време да обърнем внимание, че върху двете блюда има един и същ предмет. В случая този предмет е ябълка. **Ако от двете блюда отстраним по една ябълка, везната ще продължи да е в равновесие.** Ситуацията се променя по следния начин:

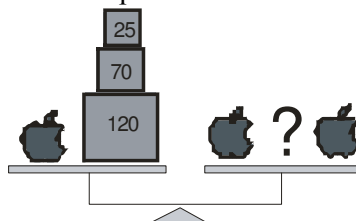


Отстраняването (изобразено чрез задраскване) на двете ябълки води до нов математически модел. Той е $3 \cdot 70 = 2 \cdot x$ и оттук намираме $x = 105$ г. По този начин се освободихме от необходимостта да прехвърляме неизвестните от едната страна, а на известните – от другата, както и да извършваме привеждане. Броят на изчисленията се съкрати и директно стигнахме до задача от вида $a \cdot \square = b$. Следователно, отстраняването (в случая на ябълки) е еквивалентно на прехвърлянето на неизвестни и известни, като едновременно с това то включва и съответно привеждане.

Отговор: А)

Направените разглеждания показват, че чрез задачите с везни могат да се осмислят някои от свойствата на уравненията едновременно с използването им като удобно учебно средство за моделиране с помощта на изучаваните числа в съответните класове на началното училище, както и за упражняване на релации и операции. В същото време естествената нагледност, широкото приложение и достъпността правят тези задачи привлекателни за учениците, което спомага за задълбочено усвояване на съдържателни идеи. В задачите по-долу последователно се действа с една везна (задачи 1.1. – 1.7.), с две (задачи 2.1. – 2.5.) или повече везни (задачи 3.1. – 3.5.), предлагат се и по-обща задачи (задачи 4.1. и 4.2.); осигурява се възможност за извършване на действията добавяне, отстраняване, преместване (Гроздев, 2007), (Grozdev, 2007), които съответстват на реални ситуации; естествено се въвеждат буквени означения за неизвестни величини, последователно се уточняват основни положения при такива задачи: „предметите от един и същи вид са с равно тегло”, „ако от двете блюда се отстранят по равен брой еднакви предмети, везната ще продължи да е в равновесие” и др.

Задача 1.3. Една ябълка тежи 80 г. С колко грамова тежест трябва да се замени въпросителният знак, за да бъде везната в равновесие?



А) 215 г

Б) 125

В) 135 г

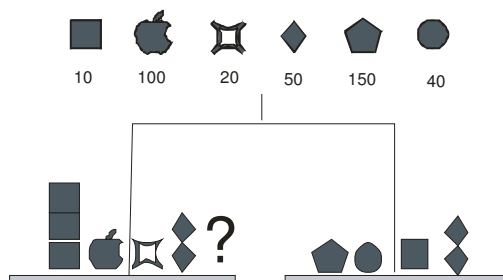
Г) друг отговор

Отговор: В)

Макар, че в ежедневието най-често претегляме конкретни предмети: ябълки, круши, банани, своето тегло и др., в задачите по-нататък ще използваме и фигури.

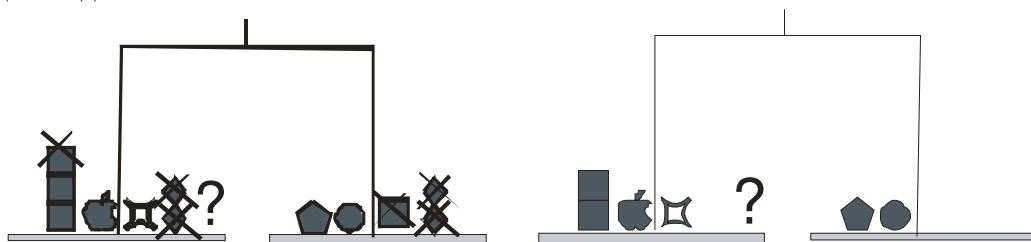
Основно предположение е, че еднаквите фигури изобразяват еднакви предмети, а когато става дума за „тегло на фигура”, се разбира теглото на предмета, който е изобразен с тази фигура.

Задача 1.4. Коя фигура трябва да се постави на мястото на въпросителния знак, за да бъде взната в равновесие?



Тук можем да намерим сбора на теглата на фигурите върху лявото блюдо, а после и върху дясното. Разликата на получените числа дава теглото на търсената фигура.

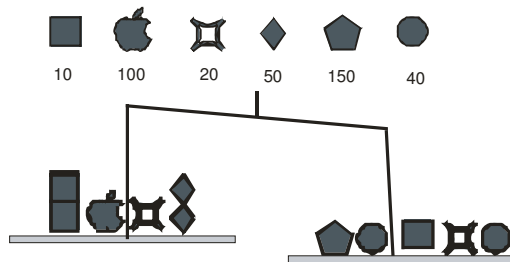
По-горе стана дума, че ако се отстранят еднакви фигури едновременно от двете блюда, везната ще остане в равновесие. В същото време изчисленията се опростяват. За същата задача имаме:



Сега фигурите върху лявото блюдо тежат $2 \cdot 10 + 100 + 20 = 140$ г, а тези върху дясното – съответно $150 + 40 = 190$ г. От равенството $190 - 140 = 50$ следва, че търсената фигура тежи 50 г. Остава да се прецени коя е тя. Бихме могли да постъпим и по следния начин: означаваме теглото на търсената фигура с x и записваме равенството, което свързва теглата на фигурите в лявото и дясното блюдо. Ако използваме „преработената” везна (втория чертеж), получаваме $2 \cdot 10 + 100 + 20 + x = 150 + 40$ и оттук $x = 50$ г.

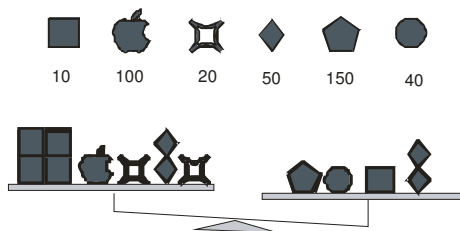
Отговор:

Задача 1.5. Коя фигура трябва да се отстрани от едното блюдо, за да бъде взната в равновесие?



Отговор:

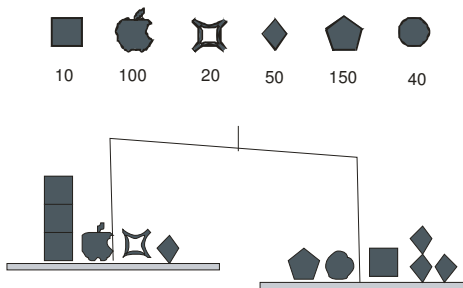
Задача 1.6. Коя фигура трябва да се премести от едното блюдо върху другото, за да бъде взната в равновесие?



Първоначално е удобно да се отстранят еднаквите фигури от двете блюда, което опроставя пресмятанията. За разликата между теглата върху двете блюда получаваме 20. Обръщаме внимание, че при преместване на една фигура от едното блюдо върху другото се променят теглата върху двете блюда (за упражнение преценете каква грешка е допуснал ученик, който е получил отговор ☆).

Отговор: ■ от дясното блюдо върху лявото

Задача 1.7. Възможно ли е с преместване на една фигура от едното блюдо върху другото да се постигне равновесие на взната?



За да е възможно, трябва разликата между теглата на фигурите върху двете блюда да е равна на удвоеното тегло на някоя от фигурите вдясно (по-тежкото блюдо). В случая разликата е 150, а липсва фигура с тегло 75 г.

Отговор: не

Задачи 2.1. – 2.5. са посветени на ситуации с две везни. Те имат за цел да тренират различни релации и операции с числа. Изрично ще отбележим задача 2.3., с която се показва, че задачите с везни могат да се свързват не само с уравнения, но и със системи уравнения (Гроздев, 2005).

Задача 2.1. Лявата везна е в равновесие. Коя фигура трябва да се постави на мястото на въпросителния знак, за да бъде и дясната везна в равновесие?



От равновесието на лявата везна следва, че една четка тежи колкото три молива.

Отговор:

Задача 2.2. Двете везни са в равновесие. Вярно е, че четката тежи колкото:

А) едно квадратче

Б) едно кръгче

В) една звезда



От равновесието на лявата везна може да се направи извод, че теглото на едно квадратче (a) е сбор от теглата на едно кръгче (b) и една звезда (c). Тук използваме, че от равенството $3.a = 3.b + 3.c$ следва $a = b + c$. Прилагайки получения резултат към втората везна, намираме, че теглото на едно квадратче е сбор от теглата на една четка и една звезда. Налице е следната ситуация в картинки:

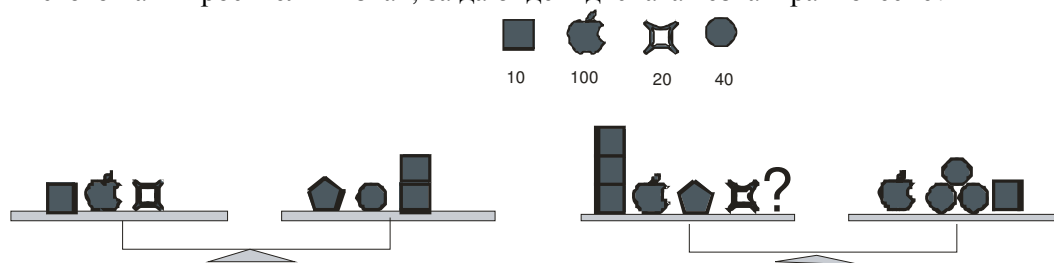
$$\blacksquare = \bullet + \star$$

$$\blacksquare = \text{четка} + \star$$

Сега използваме, че ако две величини са поотделно равни на трета, то те са равни помежду си. Следователно теглото на едно кръгче и една звезда е колкото теглото на една четка и една звезда. Понеже, ако от две равни величини извадим една и съща величина (теглото на звездата), получаваме равни величини, то заключаваме, че четката тежи колкото кръгчето.

Отговор: Б)

Задача 2.3. Лявата везна е в равновесие. Коя фигура трябва да се постави на мястото на въпросителния знак, за да бъде и дясната везна в равновесие?



Означаваме теглото на фигурата, с която трябва да заместим въпросителния знак, с x . Това е естествено, защото по същество целта е да се намери теглото на въпросителния знак. Сега, ако се опитаме да запишем равенство за информацията върху дясната везна, т.е. да моделираме ситуацията върху нея, установяваме, че не знаем теглото на петоъгълника. Да означим това тегло с y и да моделираме ситуацията върху лявата везна. Получаваме уравнението $130 = y + 60$, което заедно с модела на дясната везна $150 + x + y = 230$ задава по същество една система от две уравнения с две неизвестни. Видът на системата е опростен, защото първото уравнение е директно разрешимо спрямо y . От него намираме $y = 70$ и тогава второто уравнение става $220 + x = 230$. Тогава $x = 10$ и следователно търсената фигура трябва да има тегло 10. Да обърнем внимание, че числата в двете уравнения на системата щяха да са по-малки по стойност, ако предварително бяхме извършили отстраняване – по едно квадратче от двете блюда на лявата везна и по едно квадратче и една ябълка от двете блюда на дясната везна.

Отговор:

Задача 2.4. Лявата везна е в равновесие. Коя фигура трябва да се премести от едното блюдо на дясната везна върху другото, за да стане везната в равновесие?



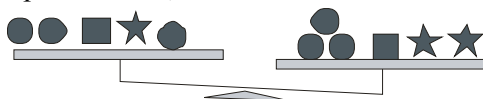
От равновесието на първата везна получаваме (след съответно отстраняване на по едно квадратче), че теглото на кръгчето е равно на сбора от теглата на една ябълка и едно квадратче. Като използваме този факт, за дясното блюдо на втората везна установяваме, че е по-тежко от лявото с общото тегло на две квадратчета. Следователно, след преместване на едно квадратче от дясното блюдо върху лявото, везната ще бъде в равновесие.

Отговор: ■

Задача 2.5. Лявата везна е в равновесие. Възможно ли е с отстраняване на една фигура от дясната везна тя да се окаже в равновесие?



Има различни начини за преценка. Една възможност е да заменим една звезда и две квадратчета от лявото блюдо на втората везна с две кръгчета, квадратче и звезда (на основание равновесието на първата везна):

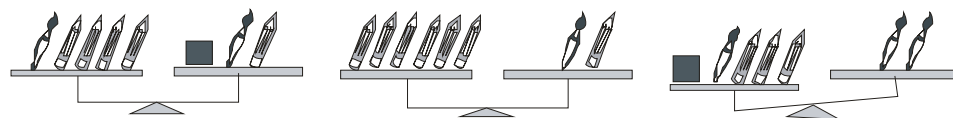


Сега отстраняваме еднакви фигури едновременно от двете блюда и това, което остава, е една звезда в дясното блюдо. Следователно втората везна ще бъде в равновесие, ако се отстрани една звезда от дясното ѝ блюдо.

Отговор: да

Задачи 3.1. – 3.5. моделират ситуации с три везни.

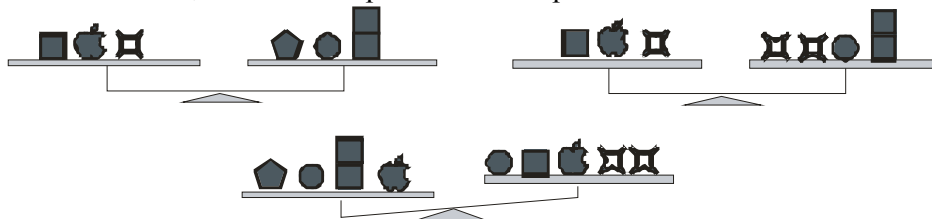
Задача 3.1. Първите две везни са в равновесие. Колко молива трябва да се поставят върху дясното блюдо на третата везна, за да бъде и тя в равновесие?



От равновесието на първата везна следва, че едно квадратче тежи колкото три молива (след отстраняване на по една четка и един молив). От равновесието на втората везна следва, че една четка тежи колкото пет молива (след отстраняване на по един молив). Сега да отстраним по една четка от двете блюда на третата везна и да използваме получената информация. Върху лявото блюдо получаваме шест молива, а върху дясното – пет молива. Следователно трябва да се добави един молив вдясно.

Отговор: 1

Задача 3.2. Първите две везни са в равновесие. Коя фигура трябва да се постави върху дясното блюдо, за да стане третата везна в равновесие?

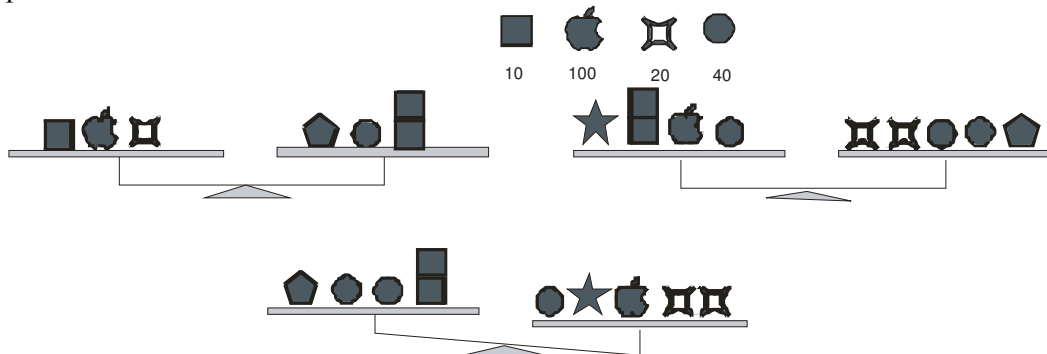


Левите блюда на първата и втората везна съдържат едни и същи фигури и следователно имат равни тегла. Оттук заключаваме, че теглата на фигурите върху десните блюда са също равни (от $a = b$ и $a = c$ следва, че $b = c$, т.е. ако две величини

са поотделно равни на трета, то те са равни помежду си). По-нататък разсъжденията са както по-горе.

Отговор: ■

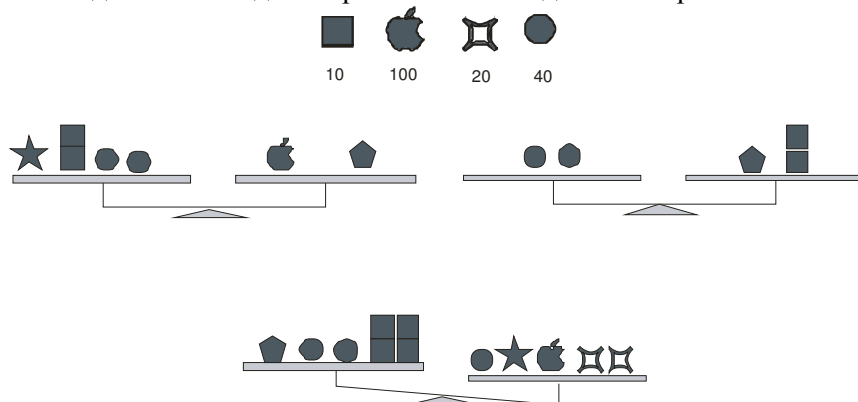
Задача 3.3. Първите две везни са в равновесие. Коя фигура трябва да се премести от едното блюдо в другото блюдо на третата везна, за да стане и тя в равновесие?



От равновесието на първата везна и теглата на дадените фигури намираме, че теглото на петоъгълника е 70 г. От равновесието на втората везна, теглата на дадените фигури и намереното тегло на петоъгълника получаваме, че теглото на звездата е 30 г. Разликата между теглата върху двете блюда на третата везна е 40. Следователно фигурата, която трябва да се премести от едното блюдо върху другото, трябва да тежи 20 г.

Отговор: ☆

Задача 3.4. Първите две везни са в равновесие. Възможно ли е с отстраняване на една от фигурите от дясното блюдо на третата везна тя да стане в равновесие?

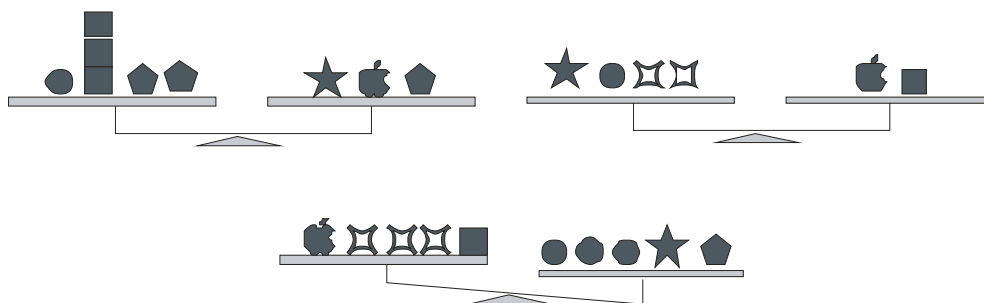


От равновесието на втората везна следва, че теглото на петоъгълника е 60 г. От равновесието на първата везна следва, че и теглото на звездата е 60 г. Разликата между теглата върху двете блюда на третата везна е 60 г. Понеже от двете фигури с тегло 60 г само едната е върху по-тежкото блюдо (звездата), то именно тази фигура трябва да бъде отстранена.

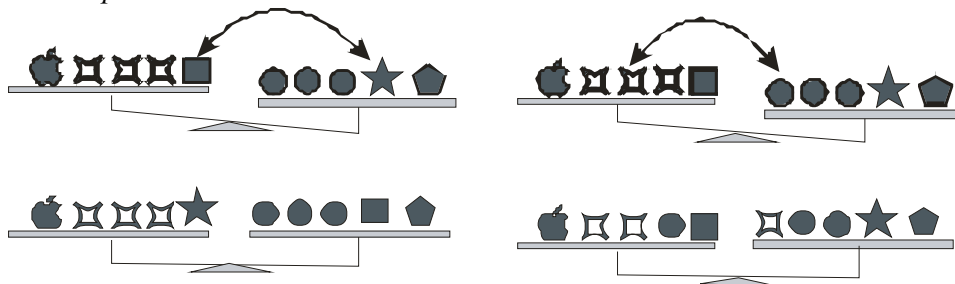
Отговор: да

Задача 3.5. Първите две везни са в равновесие. Кои две фигури от двете блюда на третата везна трябва да се разменят, за да стане и тя в равновесие?





Отговор:



Задача 4.1. Везната е в равновесие. Общото тегло на предметите върху двете блюда е 12 кг. Колко тежи едно квадратче?



Отговор: 1 кг

Задача 4.2. Продавач разполага с по една тежест от 1 кг, 2 кг, 3кг, ..., 100 кг. Възможно ли е продавачът да постави всички тежести върху една везна така, че тя да е в равновесие?

Предложената дидактическа система от задачи с везни е предназначена главно за избираема подготовка по математика в 4. клас. Тя може да се използва и при подготовка за математически състезания. Отделни задачи са подходящи за включване в задължителното обучение, като в този случай трябва да се работи с празното квадратче ☐ и (или) с логически разсъждения.

Литература

Гроздев, С., Европейско кенгуру. С., 2005.

Гроздев, С., Т. Чехларова, Върху действието “добавяне” в дейността “решаване на задачи”, 36 Пролетна математическа конференция на СМБ, Варна, 2007.

Grozdev, S., T. Chehlarova, On the action of elimination In the activity of problem solving. 5th Mediterranean Conference on Mathematics Education 13-15 April 2007, RHODES Island-Greece