

ПРОСТРАНСТВЕНО ВЪОБРАЖЕНИЕ „БЕЗ ПРАГ И БЕЗ ТАВАН”

1. ВАЖНО ЛИ Е ДА СТИМУЛИРАМЕ ПРОСТРАНСТВЕНОТО ВЪОБРАЖЕНИЕ НА УЧЕНИЦИТЕ

Пространството е основна категория, която играе ключова роля в много аспекти на човешкото познание [1]. Този факт се изтъква от специалисти в най-различни области. В доклад на американската национална фондация на науката [2] например се отделя специално внимание на връзката между пространственото въображение и способността за решаване на проблемни ситуации. Нещо повече, *способността да се мисли в образи, да се възприема видимия свят достатъчно точно и да се въпроизвежда (или видоизменя) мислено или на хартия*, наречена накратко *пространствена интелигентност*, се определя като една от седемте различни вида интелигентности [3]. Развитието на пространственото въображение е една от основните цели на обучението по математика и изучаването на стереометрично съдържание е съществено за реализирането ѝ. Провеждането на реформи в образованието е естествен процес, но промяната на учебни планове и програми по математика понякога имат негативни последици. Пример е ликвидирането на курса по стереометрия в горните класове (на първо равнище) за известно време, поради което изучаването на стереометрия остана само на полуемпирично ниво в 5. и 6. класове. Дори и там акцентът е поставен върху усвояване на формулите за лице на повърхнина и за обем на изучаваните тела и не се използват възможности за развитие на въображението на децата. Усилията на учителите за преодоляване на празнини в българските учебни програми при изучаване на стереометрията могат да бъдат подпомогнати от резултатите, получени в рамките на международния проект DALEST [4], в който от българска страна участват авторите на тази статия.

2. ПРОЕКТЪТ DALEST - ИДЕИ И РЕАЛИЗАЦИЯ

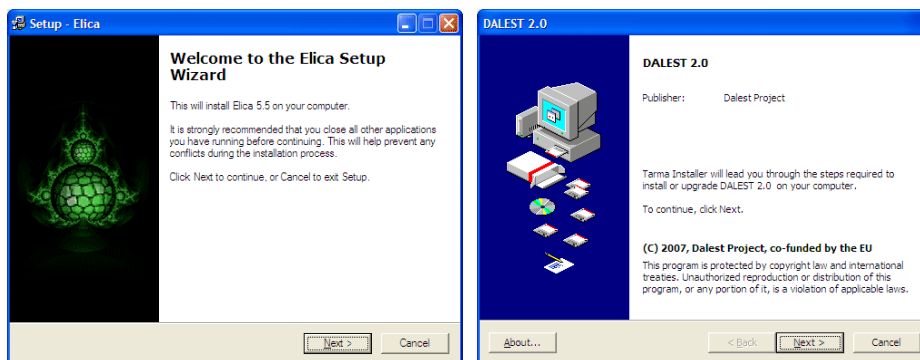
Основната цел на проекта DALEST (Developing an Active Learning Environment for the Learning of Stereometry) е да направи сравнителен анализ на учебните програми по геометрия в европейските училища и да отговори на изискванията и препоръките на преподавателите по този предмет в средното училище. В резултат бе проектирана и разработена среда за активно учене на стереометрия, в която учениците от прогимназията да бъдат стимулирани за работа в изследователски дух и да развият пространственото си въображение. Теоретичните предпоставки при проектирането на компютърните приложения на DALEST са в хармония със съвременните тенденции за преподаването на стереометрия [5]. До момента в рамките на проекта са разработени десет приложения в компютърната среда *Elica*, която предлага средства за тримерна анимация на обекти [6]. Естественият стил на работа в тези компютърни приложения е *конструкционизмът* – термин, въведен от Сиймър Пепърт, един от специалистите с най-революционни възгледи за образованието в информационния век [7]. *Конструкционизмът* обогатява конструктивизма с идеята, че за да станат учениците успешни *строители на знанията си*, те трябва да строят нещо, което има външен израз и може да се споделя.

Компютърните DALEST-Elica приложения могат да бъдат обособени в няколко групи:

- *Кубчета (Cubix)*, *Конструктор (Cubix Editor)* и *Сенки (Cubix Shadows)* дават възможност на учениците да строят композиции от единични кубчета, да намират обема и лицето на повърхнината им, да възстановяват конструкция по проекциите ѝ в правоъгълна координатна система;

- *Грънчарско колело (Potter Wheel)*, *Математическо колело (Math wheel)* и *Дизайн на съдове (Bottle design)* предоставят удобни средства за проектиране на ротационни тела и за пресмятане на обема им и лицето на повърхнината им;
- *Оригами (Origami nets)*, *Плюшени играчки (Stuffed toys)*, *Ножички (Scissors)* са предназначени за работа с развивки на тела, а именно – получаване на тяло от негова развивка и разрязване на дадено тяло по някои от ръбовете му с цел да се получи конкретна негова развивка;
- *Плъзгач (Slider)* има формата на игра, при която трябва да се отгатне видът на невидимо тяло, като се изследва сечението му с равнина, която може да се плъзга по всяка координатна ос.

Пакетът DALEST-Elica и самата Elica могат да се намерят безплатно на адреса на сайта на Elica – <http://www.elica.net>. В страницата за сваляне има връзки към инсталационния файл на Elica (Elica55Setup.exe) и към страницата на DALEST-Elica, откъдето има достъп до инсталационния файл на DALEST-Elica (DA55Setup.exe). За да работят приложенията от пакета DALEST-Elica, трябва първо да се инсталира Elica и едва тогава DALEST-Elica. И двете инсталации трябва да се извършат от потребител с администраторски права в директория, в която потребителят ще има права за четене и писане.



Начални екрани на инсталационните програми за Elica и DALEST-Elica

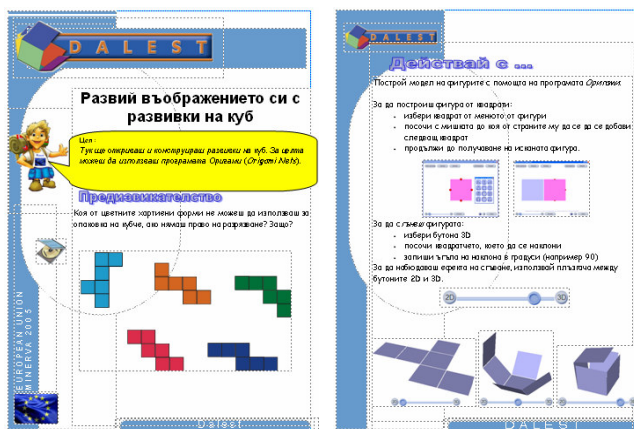
Подробни указания за инсталирането, изпробването и работата с Elica и DALEST-Elica могат да се намерят в [8], [9].

По-долу ще се опитаме да илюстрираме потенциала на тези компютърни приложения за проектиране на дейности, които стимулират учениците да създават математически обекти и да откриват математически закономерности.

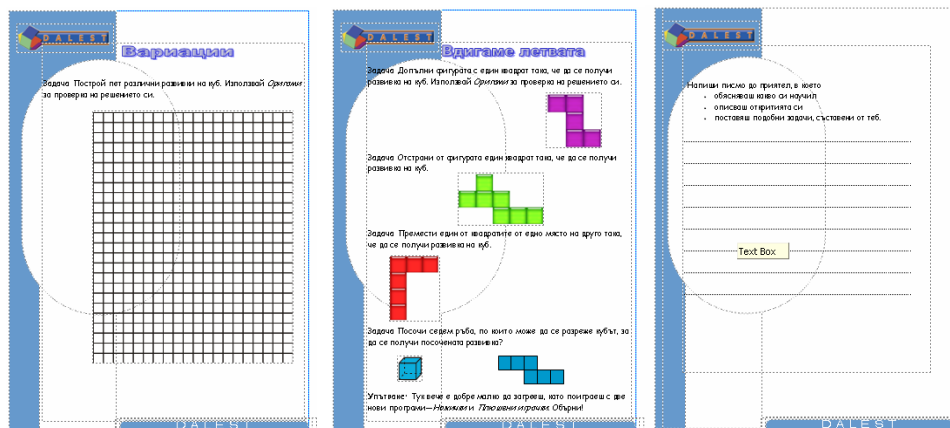
3. МЕТОДОЛОГИЯТА

Планирахме пилотния експеримент на DALEST така, че да можем да преценим колко време е необходимо за усвояването на конкретни геометрични знания в средата DALEST_Elica. Въз основа на обратната връзка, получена от участниците в експеримента (учители, студенти и ученици), усъвършенствахме програмите и указанията за използването им. Най-голямо внимание в тази фаза на проекта посветихме на разработването на дидактически сценарии, в които овладяването на програмите не е самоцел, а е свързано с използването на удобен инструментариум за решаване на задачи, изискващи и формиращи добро пространствено въображение. Ето структурата на дидактическите сценарии, възприета от страните-партньори в DALEST:

- **Посочване на целта** (формулирана явно, върху самостоятелно поле, в достъпен за учениците вид)
- **Поставяне на задача-предизвикателство** (формулирана като интересна за учениците ситуация, която да ги мотивира да действат)
- **Представяне на възможностите на програма от DALEST_Elica**, подходяща за справяне със задачата-предизвикателство (рубрика *Действай с...*)



- **Поставяне на система от задачи** – за изследване и формулиране на хипотези, за приложение на придобитите знания (рубрики *Вариации*, *Изследвай*, *Вдигаме летвата*)
- **Рефлексия** (във формата на писмо до приятел)

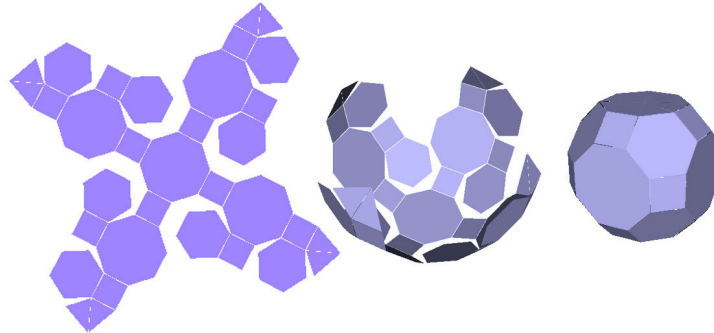


Примерни дидактически сценарии са дадени в *Приложението* към текущия брой на списанието. Стремили сме се да ги направим с богато съдържание, с елементи на предизвикателство за учениците, с възможност да изявят творческото си въображение в интересен за тях контекст.

4. РАЗВИВКИ НА ТЕЛА

4.1 ОРИГАМИ (Origami Nets)

Програмата *Оригами* е най-сложното (в смисъл на реализация) компютърно приложение, създадено в рамките на проекта.



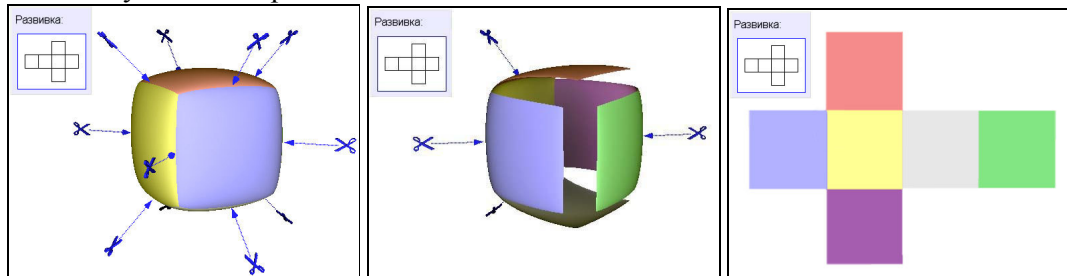
Тази програма предоставя възможност на учениците за:

- моделиране на на разнообразни тела (паралелепипеди, призми, конуси, цилиндри, полиедри) чрез конструиране на съответните им развивки
- наблюдаване на прехода от 2D към 3D
- създаване на база от задачи с готови обекти, с които да работят
- бърза обратна връзка
- експериментиране и самостоятелно формулиране на хипотези
- самостоятелно съставяне на задачи и споделяне със съученици и приятели.

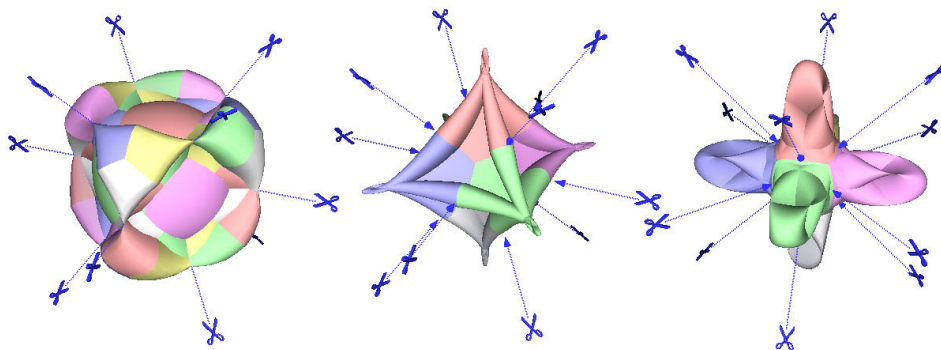
Останалите две програми за работа с развивки са реализирани във вид на игри.

4.2 НОЖИЧКИ (Scissors)

В тази програма учениците трябва да посочат кои ръбове на дадено тяло да се разрезат, за да се получи дадена развивка.

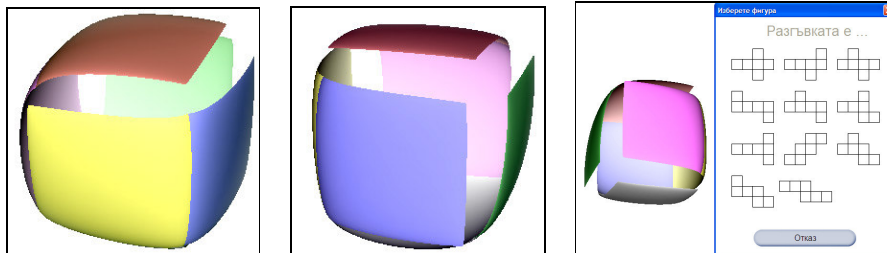


Всички тела в библиотеката на *Ножички* са шестстенни, но някои са с по-сложна форма:



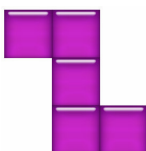
4.3 ПЛЮШЕНИ ИГРАЧКИ (Stuffed Toys)

Решава се обратната на предходната задача: разрезите по някои ръбове на тялото вече са направени, а играчът трябва да познае коя от няколко дадени развивки ще се получи при разгъването.



4.4 Работа с развивки на тела

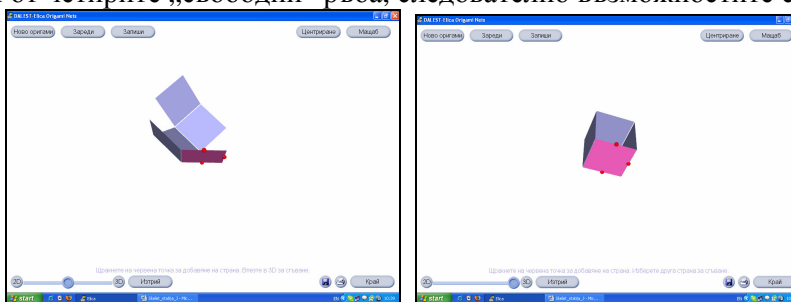
Да разгледаме например как протича с помощта на *Оригами* решаването на следната задача: *Допълни фигурата с едно квадратче така, че да се получи развивка на куб.*



Учениците предлагат своите решения и след като се илюстрират четирите възможности, се поставя въпросът как да се прецени има ли и други решения.



Преминаването в 3D дава възможност да се съобрази, че може да се добави квадратче само до един от четирите „свободни” ръба, следователно възможностите са 4.



Предварителният експеримент (в традиционна обстановка) показва, че учениците допускат много грешки при решаване на две задачи, зададени им на лист хартия. В единия случай трябваше да открият коя развивка ще се получи след разрязване на куб по посочени 7 ръба, а в другия – да посочат 7 ръба, след разрязването на които да се получи дадена развивка. Не е случайно, че такива задачи липсват в учебните помагала - решаването им изисква умение за мислено преминаване от тримерно в двумерно пространство, мислено въртене на обект. Учениците си правят междинно записване на резултати – построяват различни елементи на развивка, объркват се и започват отначало. Споделиха, че решаването на тази задача им е отнело най-много време и не са уверени в отговора. Някои се отказаха след няколко опита.

Съвсем друг бе резултатът след запознаване с програмите *Ножички* и *Плюшени играчки*. Това, което беше сложно за решаване дори с хартия и ножици, се оказа най-естественият път в компютърната среда.

На практика последователно се демонстрират двете програми и се дава възможност на учениците да направят избор. Всяко дете изпробва и двете програми, като неколккратно ги сменя и усложнява фигурите при работа с *Плюшени играчки*.

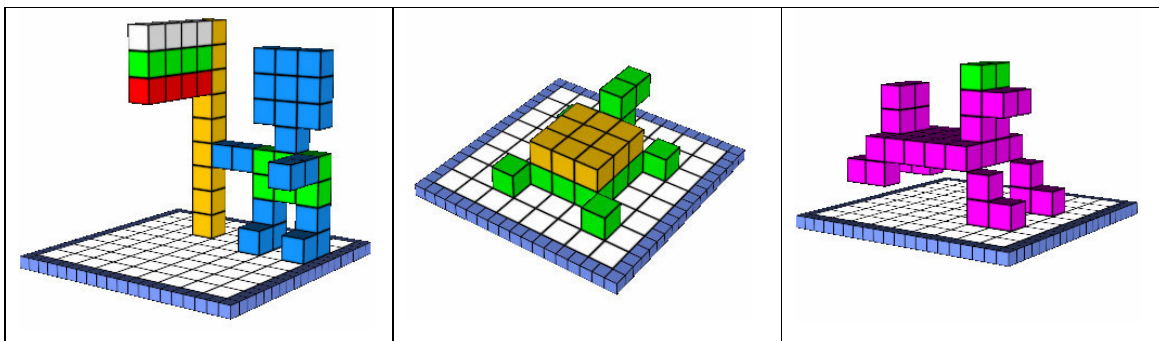
По време на обучението с удовлетворение наблюдавахме, че

- учениците разпознават различни развивки на куб и правоъгълен паралелепипед
- не се страхуват от грешки, защото разполагат със средства за корекции
- инсталират програмите на домашните си компютри и споделят постигнатите резултати
- пробват да работят и с развивки на тела, които ще се изучават през следващата година
- жадуват за изява и оценка на постиженията си
- подобряват отношението си към домашната работа.

5. КОМПОЗИЦИИ ОТ ЕДИНИЧНИ КУБЧЕТА

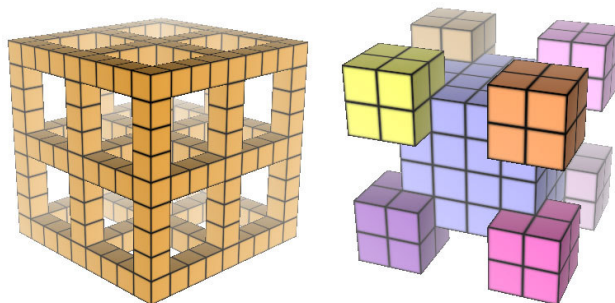
5.1 КОНСТРУКТОР (Cubix Editor)

С програмата *Конструктор* могат да се създават виртуални тримерни композиции от единични кубчета върху дъска със зададен размер. Това става, като се посочи с мишката поле от дъската или стена от вече създадено кубче, до което *да се долепи* ново кубче. Цветът на кубчетата и размерът на дъската може да се променят. Учениците могат да зареждат съществуващи композиции, да ги видоизменят и да обогатяват съществуващата библиотека със свои собствени композиции. Ето няколко произведения на петокласници от СМГ:



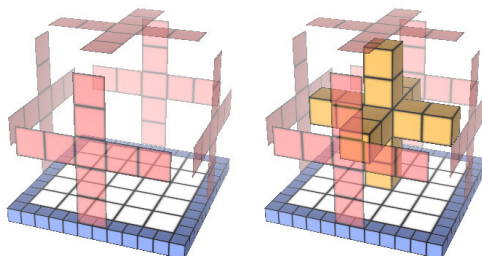
5.2 КУБЧЕТА (Cubix)

Тази програма дава възможност за самопроверка - учениците трябва да намерят обема и лицето на повърхнината на композиции от единични кубчета. Вградените композиции са от три равнища на сложност.



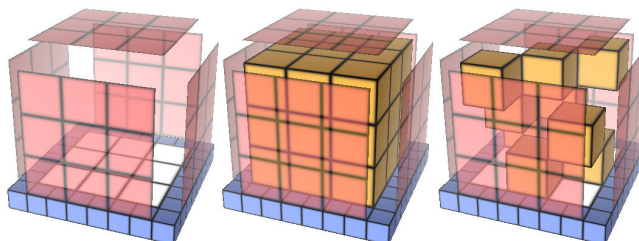
5.3 СЕНКИ (Cubix Shadows)

Това приложение показва сянката на невидима композиция от кубчета, която трябва да се възстанови. Построяването на решението става подобно на конструктора, като проверката дали конструираният обект хвърля точни показаните сенки може да се прави чрез завъртане на дъската. На следващата фигура са показани *сенките* на примерен "плюс" и тяло, което хвърля тези сенки.



5.4 Работа с композиции от единични кубчета

Има обекти, които са различни по форма, но хвърлят едни и същи сенки. Например сянката на първата фигура по-долу може да се получи както от куб 3x3x3, съставен от 27 единични кубчета, така и от структура от 9 кубчета. Затова може да се поставят и допълнителни условия - например за откриване на композицията от най-малък брой кубове.

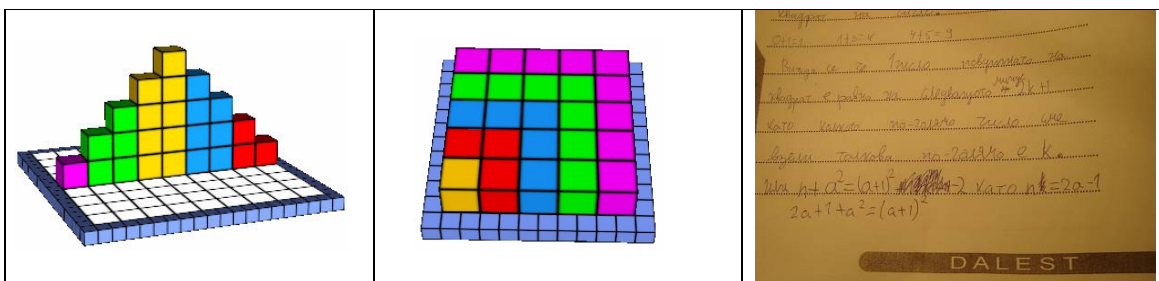


Важна черта на програмите от тази група е, че учениците могат да въртят цялата дъска, върху която е изградена кубичната композиция и да я разглеждат от различни страни.

Онагледяването, представянето на математически факти с различни средства е важна методическа задача. Въздействието върху различни сетива подпомага хармонизирането и взаимното допълване на дейностите на лявото и дясното мозъчно полукълбо в процеса на познанието. Помага за разкриване на закономерности и формулиране на хипотези.

Чрез задачата-предизвикателство в дидактическия сценарий от *Приложението* учениците достигат до кубичните числа, като по естествен начин свързват термина с фигурното им представяне, както и с другото наименование на степени със степенен показател 3 (например *пет на куб*).

Самостоятелното създаване на графичен модел на числов факт е вълнуващо за учениците, показател е за осмисленост и насочва към преоткриването (евентуално с помощ) на закономерности. Те могат да достигнат до разкриване на зависимост, като следват последователност от дейности, използват нагледно представяне с точки, самостоятелно представят числата с програмата *Конструктор*, записват получени резултати в таблица и съответно – преоткриват зависимост (в случая за представяне на сума от последователни нечетни числа с квадрат).

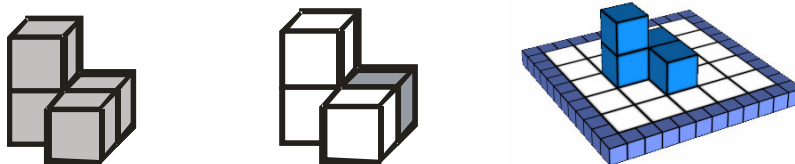


Рефлексията на ученик от 5. клас на СМГ на фигурата горе вдясно гласи:

Вижда се, че едно число, повдигнато на квадрат, е равно на следващото минус $2k+1$, като колкото по-голямо число сме взели, толкова по-голямо е k . Или $n+a^2 = (a+1)^2 - 2$, като $n=2a-1$ или $2a+1+a^2=(a+1)^2$

В обучението по математика се отчита като слабост недостатъчната работа за формиране на езикова култура, в частност на използване на математическата терминология. На пръв поглед са естествени опасенията за задълбочаване на този проблем при повишаване дела на учебно време за работа с компютър. А всъщност елемент от активността при работа със създадените програми е вътрешната необходимост на учениците да споделят направеното, да получат признание. Освен стихийно, може да бъде овладяно и насочено със специално поставени задачи. Една използвана възможност е предложението за рефлексивно «писмо до приятел». Друга експериментирана възможност е поставяне на задача за описание на конструкция. Сценарият, който експериментирахме с ученици от София и Пловдив, може да бъде скициран по следния начин [10]:

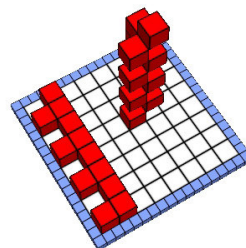
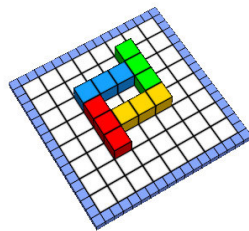
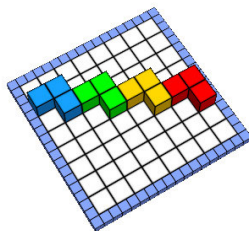
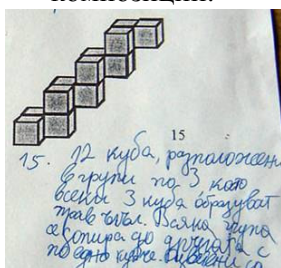
- описание на композиции от единични кубчета по чертеж



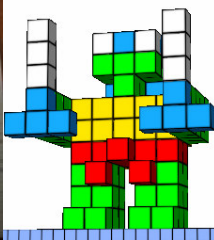
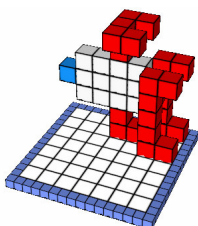
- построяване на композиция от фиксиран брой единични кубчета с помощта на програмата *Конструктор*

- описание на собствената конструкция така, че тя да бъде възпроизведена от съученик
- дискусия върху няколко произволно избрани описания на ученици, които се написват на дъската
- последователно изчистване на дефиницията от преопределеност и многозначност
- построяване на конструкции в *свободен стил*
- определяне на подходящото равнище на формализация на описанието

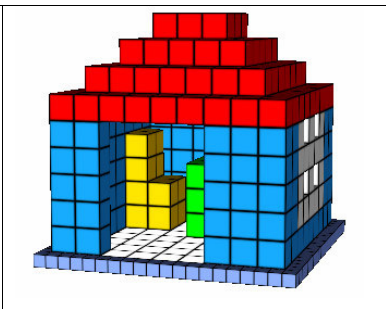
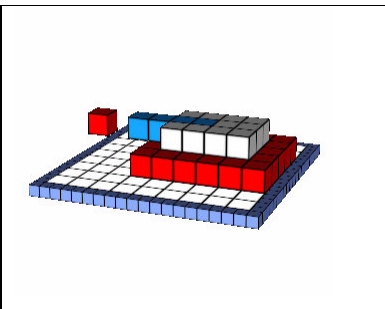
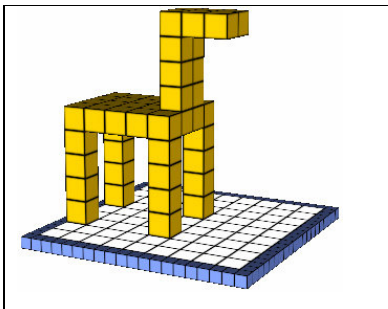
Ето например първия вариант на описание на петокласник и реализирани по него композиции:



Описанието гласи: 12 куба са разположени в групи по 3, като всеки 3 куба образуват прав ъгъл. Всяка група се допира до друга с по едно кубче. Оцветени са. Резултатът е обсъждане на богатство на идеи, осмисляне на неопределеността и преопределеността, на необходимостта от разбираемост, еднозначност, на същността на понятията и определенията им, на разликата между естествен език и алгоритмичния език, на необходимостта от редактиране. Ще споменем, че ученици използваха различни подходи за описание, някои достигнаха до идеята за тримерна координатна система, дори до добавяне на четвърта координата за цвят на единичния обект. Други използваха модулен подход, което е добър преход към програмиране в стил *отгоре-надолу*.



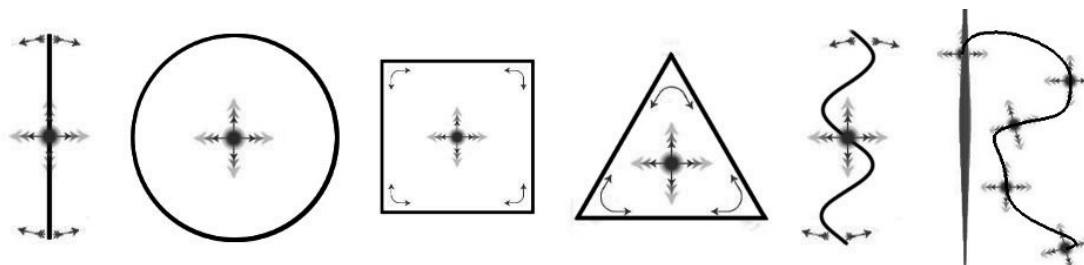
Не е случайно, че сценариите за работа с програмата са много – лесно се достига до идеята за обем на тяло (в частност на куб и правоъгълен паралелепипед, до измерения на конструкции [11], [12] еднаквост в пространството, оцветяване на конструкции, ..., до създаване на собствени композиции.



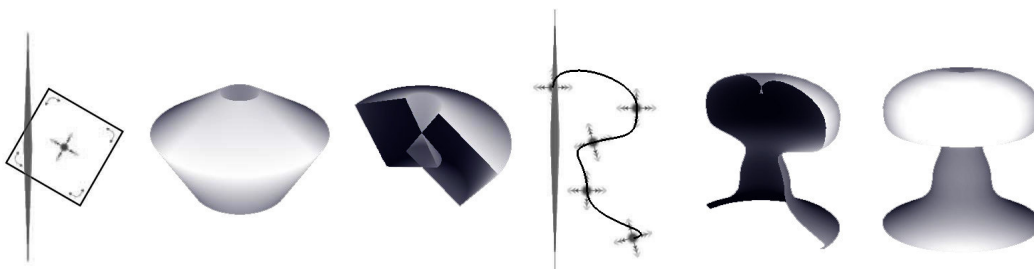
6. РОТАЦИОННИ ТЕЛА

6.1 ГРЪНЧАРСКО КОЛЕЛО (Potter's Wheel)

С помощта на програмата *Грънчарско колело* учениците могат да създават ротационни тела, като завъртат избран от тях обект (отсечка, окръжност, квадрат, триъгълник, сегмент от синусоида или ръчно конструирана от тях крива по 5 точки (композиция от криви на Безие) около дадена ос.



След като са фиксирали позицията на обекта и наклона му спрямо оста, те виждат ротационното тяло, което се получава при въртенето. Така учениците влизат в ролята на майстор-грънчар, който извайва изделията, си след като е скицирал направил профила на съда.



6.2 МАТЕМАТИЧЕСКО КОЛЕЛО (Math Wheel)

Математическото колело е подобно по идея на *Грънчарското колело*. Тук множеството от ротационни тела, които могат да се генерират, не е толкова богато, но затова пък учениците могат лесно да пресметнат обема и лицето на повърхнината им. Включени са ротационните тела, които се изучават в задължителното обучение по математика в 6. клас. Чрез експеримент учениците могат да разкриват зависимости между мерки на изучаваните в задължителното обучение тела цилиндър, конус, кълбо. Например правят извод за изменението на обема на цилиндър в резултат на изменение на радиуса. Следва решаване на система от задачи, за рационалното решаване на които се използват откритите зависимости. Вече лесно може да се съобрази решението на задачата-предизвикателство в предложения в *Приложението* сценарий: *Фирма е поръчала въртяща се реклама във формата на правоъгълник с размери 10x2. Цената на рекламата зависи от пространството, което тя заема при въртенето си. Ако ти си представителят на фирмата, около коя страна ще поръчаши да се върти рекламата, така че цената да е по-ниска?*

$$S = \pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2/2}$$

$$V = (1/3)\pi h(R^2+Rr+r^2)$$

$$R_1 = 0, r_1 = 7, h_1 = 0$$

$$S_1 = 7\pi\sqrt{(7^2+0^2)/2} \approx 49\pi$$

$$V_1 = (1/3)0\pi(0^2+0+7^2) = 0\pi$$

$$R_2 = 7, r_2 = 7, h_2 = 2$$

$$S_2 = 14\pi\sqrt{(0^2+2^2)/2} \approx 28\pi$$

$$V_2 = (1/3)2\pi(7^2+49+7^2) = 98\pi$$

$$R_3 = 7, r_3 = 0, h_3 = 0$$

$$S_3 = 7\pi\sqrt{(7^2+0^2)/2} \approx 49\pi$$

$$V_3 = (1/3)0\pi(7^2+0+0^2) = 0\pi$$

$$R_4 = 0, r_4 = 0, h_4 = -2$$

$$S_4 = 0\pi\sqrt{(0^2+2^2)/2} \approx 0\pi$$

$$V_4 = (1/3)(-2)\pi(0^2+0+0^2) = 0\pi$$

$$S = S_1+S_2+S_3+S_4 \approx 126\pi \approx 483.805$$

$$V = |V_1+V_2+V_3+V_4| \approx 98\pi \approx 307.876$$

$$S = \pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2/2}$$

$$V = (1/3)\pi h(R^2+Rr+r^2)$$

$$R_1 = 0, r_1 = 2, h_1 = 0$$

$$S_1 = 2\pi\sqrt{(2^2+0^2)/2} \approx 4\pi$$

$$V_1 = (1/3)0\pi(0^2+0+2^2) = 0\pi$$

$$R_2 = 2, r_2 = 2, h_2 = 7$$

$$S_2 = 4\pi\sqrt{(0^2+7^2)/2} \approx 28\pi$$

$$V_2 = (1/3)7\pi(2^2+4+2^2) = 28\pi$$

$$R_3 = 2, r_3 = 0, h_3 = 0$$

$$S_3 = 2\pi\sqrt{(2^2+0^2)/2} \approx 4\pi$$

$$V_3 = (1/3)0\pi(2^2+0+0^2) = 0\pi$$

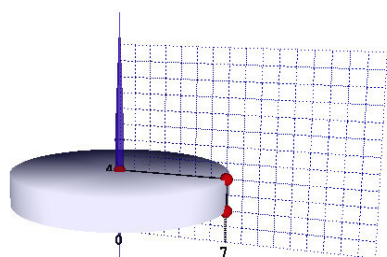
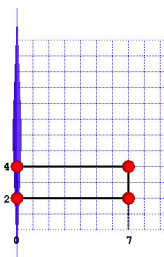
$$R_4 = 0, r_4 = 0, h_4 = -7$$

$$S_4 = 0\pi\sqrt{(0^2+7^2)/2} \approx 0\pi$$

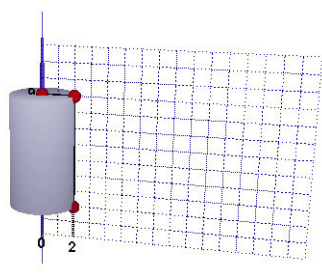
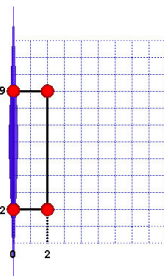
$$V_4 = (1/3)(-7)\pi(0^2+0+0^2) = 0\pi$$

$$S = S_1+S_2+S_3+S_4 \approx 36\pi \approx 201.062$$

$$V = |V_1+V_2+V_3+V_4| \approx 28\pi \approx 87.965$$



(a)



(b)

6.3 ДИЗАЙН НА СЪДОВЕ (BOTTLE DESIGN)

При тази програма учениците разполагат с последователности от свързани отсечки, краищата на които те могат да се променят с помощта на мишката. По този начин те могат да определят профила на ротационното тяло и да видят тримерното му изображение при завъртане на профила около дадена ос. Тук учениците могат да проектират съдове със зададен обем и лице на повърхнина, а също така и да изменят профила на даден съд с цел да постигнат конкретни стойности на тези величини.



$$S = \pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2/2}$$

$$V = (1/3)\pi h(R^2+Rr+r^2)$$

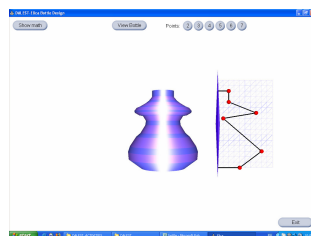
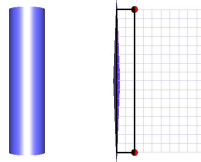
$$R_1 = 2, r_1 = 2, h_1 = 16$$

$$S_1 = 4\pi\sqrt{(0^2+16^2)/2} = 64\pi$$

$$V_1 = (1/3)16\pi(2^2+4+2^2) = 64\pi$$

$$S = 2S_1 = 64\pi \approx 201.1$$

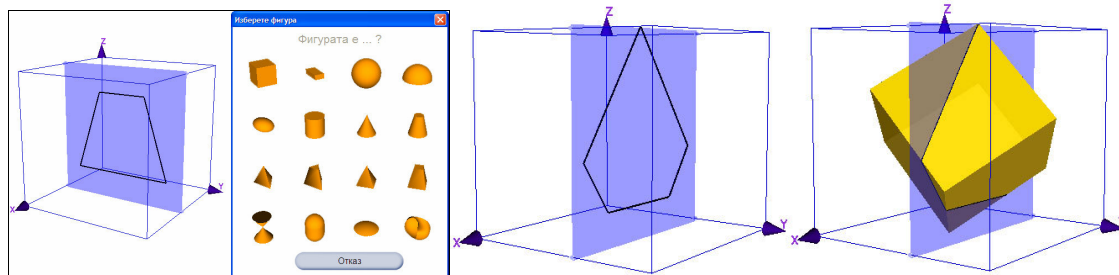
$$V = 2V_1 = 64\pi \approx 201.1$$



7. СЕЧЕНИЯ

7.1 ПЛЪЗГАЧ (Slider)

В тази програма се създават *невидими* тела, които са пресечени с *магическа* равнина – вижда се само сечението на тялото с нея. Като плъзгат и въртят секущата равнина, учениците могат да изследват сечението и да открият тялото сред дадено множество. Пресеченото с равнината тяло може да стане *видимо* и да се разглежда от различни страни.



7.2 Изследване на сечения

В оригиналния си замисъл тази програма е доста трудна (не само за малките ученици), но ако работят в **режим на показано тяло**, за да разберат защо едно и също тяло може да има толкова различни сечения в зависимост от положението на секущата равнина, те биха могли успешно да решават задачи от типа на следното предизвикателство:

Представете си, че интелигентни жители обитават страна, наречена Флатландия (равнината). Тъй като флатландците са двумерни, те не могат да възприемат нищо, което е вън от тяхната равнина. Ако един метеорит с формата на куб премине през Флатландия, как нейните обитатели ще наблюдават тази космическа катастрофа?

Макар целевата група на DALEST да се състои от петокласници и шестокласници, програмата *Плъзгач* може с успех да се използва в по-горните класове (а дори и за студенти, както сме се убедили от личен опит).

8. ИДЕИТЕ В ДЕЙСТВИЕ

8.1 Семинари с учители

Първите резултати от проекта DALEST (програмните приложения в Elica и разработените дидактически сценарии) са предоставени за безплатно ползване на българските учители и учителите в страните-партньори по проекта. В България материалите бяха демонстрирани в рамките на обучение на учители по ИТ, курсове за квалификация на учители по математика и информатика към ФМИ, курсове за учители-новатори по проекта *I*Teach* [13] и на семинар към *Пролетната конферентия на СМБ*, Варна 2007 (където на участниците бяха раздадени дискове с програмите и брошури със сценарии).



За нас бе окуражаващо да установим, че всички участници в курсовете и семинарите (дори тези с по-скромни технически умения) се ориентираха бързо за работа с програмите. Оттук нататък в зависимост от личните си предпочитания, интереси и

специалности те се концентрираха върху отделни програми и предложиха свои идеи за сценарии (да се правят модели на скулптурни композиции, на интересни архитектурни обекти, проектиране на композиции от единични кубчета, които се допълват до по-голям куб, проектиране на съдове от българския бит или от древни съкровища, паркетирание на равнината с правилни геометрични фигури и т.н.).

Първите впечатления на учителите са свързани с лекотата при усвояване на софтуера, ефективността на работата с него, осмислянето както на възможността за онагледяване, така и за организиране на самостоятелно изследване. Следват въпроси за създадени дидактически сценарии, допълнителни задачи, натрупани образци (подготвени модели, върху които да се манипулира); предложения за нови теми; учудване за възможността за безплатен достъп до програмите; оценка за намаляване на времето за предварителната подготовка на учителя за часа и за възможността за обективно оценяване на учениците и за формиране на адекватна самооценка.

8.2 Пилотните експерименти в Пловдив и СМГ

Проведен бе експеримент с различни групи ученици от 5. и 6. клас в София (СМГ) и в Пловдив (математически паралелки, спортни паралелки, неспециализирани паралелки).

Първите резултати бяха в рамките на очакваното:

- развитие на пространственото въображение
- усвояване на методи на научно познание
- усвояване на средства за решаване на класове от задачи
- формиране на умение за адекватен избор на програма за реализиране на цел
- провокиране и поддържане на интереса към математиката
- решаване на един от недостатъците на урока като форма на обучение – осигуряване на индивидуализация и диференцирано обучение
- подобряване на отношението към домашната работа
- поставяне на обективна самооценка
- ефективно реализиране на междупредметни връзки

Но имаше и **някои неочаквани резултати**:

- Промяна на последователността на работа. Докато учителите първо построяват развивката и после преминават към 3D, деца след няколко опита смениха технологията на конструиране - всеки добавен квадрат се завърта и така в процеса на работа се ориентират за допуснатата грешка и за следващо действие.
- Използване на програми извън първоначалния план (например програма *Конструктор* за изобразяване на двумерни обекти или *Оригами* – за паркетирание на равнината).

Деца реагираха най-емоционално при:

- преминаване от двумерен към тримерен режим и обратно (особено когато самостоятелно извършваха това за първи път)
- оценяване на невидимостта на част от конструкциите при двумерното им изображение
- резултатите от построяване на конструкция по описанието ѝ, направено от съученик
- получаване на верни отговори при работа с програмите *Ножички* и *Плюшени играчки*



Ето някои техни мнения, изразени като рефлексия накрая на часа:

- *Този час ми хареса. Имаше много интересни неща. В момента съм развълнувана.*
- *Програмите са интересни и много заинтригуващи. Програмата **Origami nets** е най-интересната от всички. Аз обожавам математиката затова тази програма ми е най-интересна. Тя включва математика и компютри, което е равно на огромна забава.*
- *На мен ми харесаха всички програми, защото са **забавни и изискват много логическо мислене**.*
- *На мен много ми хареса програмата **Scissors**, защото тя е логическа игра и изисква много **спокойствие и обмисляне**. Другата игра, която ме интересува, е **Stuffed Toys**. При нея се изисква наблюдателност – тя е интересна и трябва да я има. Програмата **Origami Nets** е нужна, когато имаме домашна по математика да се упражним.*
- *Програмата **Origami Nets** е супер – няма абсолютно никакви дефекти и **който не я е пробвал, ще съжалява**. Чрез нея можем да увеличим до голяма степен знанията си.*
- *Интересно беше, при паралелепипеда преминаването от второ към трето измерение, да разгадаеш развивката на полусгънат куб.*
- *Програмата е изключителна удачна за деца, които в момента изучават тези фигури. Чрез нея може да се развие умът. Докато работех с програмата се чувствах развълнуван – преди не съм работил с такава програма.*
- *Програмата ми хареса, **много ми хареса, МНОГОСКА!***
- *Хубаво беше, но не ми дадох да ги направя, защото бях между 2 маси. Иначе е хубава програмата.*
- *Харесаха ми много двете програми, защото с тях можеш да разбереш какви са развивките на различните фигури, а с другата **можеш да мислиш** и избираш различните развивки.*
- *Интересно е. Първото ми впечатление беше от госпожата ... Имам чувството, че **математиката може да се научи с любезни учителки и хубави материали за работа**.*
- *Харесаха ми програмите, учителката и работата. Всичко ми хареса. С удоволствие ще дойда пак.*
- ***Ех, да можеше всеки час да е така!***

С други думи, основният девиз на Лого-философията **без праг и без таван** действа с пълна сила и при работа с програмните приложения DALEST-Elica. Опитайте и вие, драги читатели, и споделете с нас преживяванията си!

Благодарности

Този проект бе частично финансиран от Европейския съюз (224269-CP-1-2005-1-CY-MINERVA-M). Представените възгледи и мнения са на авторите и не отразяват непременно вижданията на ЕС или някоя от неговите агенции. Авторите изразяват своята благодарност за приноса на всички участници в проекта. Специална благодарност на учителките **г-жа Ирина Шаркова** и **г-ца Лили Екимова** от СМГ за активното им съдействие в експеримента и на техните ученици за интересните им математически и художествени идеи.

Литература

1. *Философия на времето и пространството* (на англ. език)
http://en.wikipedia.org/wiki/Space#In_philosophy
2. *Report on the National Science Foundation Research Planning Workshop* (1997),
http://www.princeton.edu/~jjg/nsf_report.html
3. Gardner, H. (1993) *Frames of Mind*, New York: Basic Books.
4. DALEST project: <http://www.ucy.ac.cy/dalest/>
5. Christou, C. et al (2006), *Developing Student Spatial Ability with 3D applications* (submitted to CERME)
6. Boytchev, P., *Elica*, <http://www.elica.net>
7. Papert, S. (1991). Situating Constructionism. In I. Harel and S. Papert (eds.), *Constructionism*. (1-11). Norwood, NJ Ablex,
8. Сендова, Е., Стефанова, Е., Ковачева, Е., Николова, Н., Бойчев, П. (2007) *Книга за учителя към Помагало по информационни технологии за 6. клас: Уча и творя с компютър*, Анубис, стр. 67-79
9. Добрева, М., Ковачева, Е., Николова, Н., Сендова, Е., Стефанова, Е., (2007) *Помагало по информационни технологии за 6. клас*, Анубис, стр. 87-97
10. Sendova E., Chehlarova, T., Boytchev, P. (2007) *Words are silver, mouse-clicks are gold? (or how to optimize the level of language formalization of young students in a Logo-based cubics world)*, Proceedings of Eurologo'07, Bratislava
11. Boytchev P., Chehlarova, T., Sendova, E. (2007) *Virtual Reality vs Real Virtuality in Mathematics Teaching and Learning Proceedings of IMICT, Boston, Massachusetts, USA*
12. Гроздев, С. и Чехларова, Т. (2007), *Кубчета и конструкции*. С.
13. Проект Учителят новатор – I*Teach: <http://i-teach.fmi.uni-sofia.bg/>