

ДЕЙСТВИЕТО „РАЗМЯНА” В ДЕЙНОСТТА „РЕШАВАНЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ”¹

Тони Чехларова
ИМИ, БАН

Размяната като действие се използва широко в ежедневието – да споменем размяната на стоки и възникването на парите като разменна единица. В математиката действието размяна е в основата на редица алгоритми, използва се и неявно при решаване на задачи. Осмислянето на размяната като действие ще подпомогне съзнателното му използване както в изучавани алгоритми, така и при разкриване на възможността за използването му за решаване на задачи. Ето някои примери с размяна в различни структури.

Основно елементарно преобразуване с матрица е **размяна на местата на два реда или два стълба**. В метода на Гаус за решаване на система линейни уравнения това е първата стъпка, като целта е елементите под главния диагонал да станат равни на нула и се получи триъгълна или трапецовидна форма на системата (матрицата). Основна операция с матрица е и транспонирането ѝ, при която **редовете и стълбовете си разменят местата**, т.е. $a_{ij}^T = a_{ji}$, например:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A_{n \times m}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

При програмиране, във връзка с необходимостта от съкращаване на програмите и икономията на памет, често възниква необходимост от **размяна на стойностите** на две променливи. Тази задача може да бъде решена така:

$$c := a \quad a := b \quad b := c$$

Например, ако $a = 3$; $b = 4$;

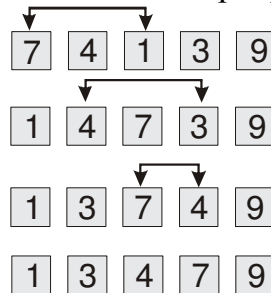
$$\text{и } c = a; a = b; b = c,$$

то в резултат стойностите на променливите a и b ще бъдат разменени.

¹ Темата е разработена с финансовото съдействие на фонд “НИ” при ПУ. Дог.№ 07M05.

Такава размяна е в основата на сортирането по **метода на пряката селекция**, както и по **метода на „мехурчето“**. Сортирането чрез пряка селекция се извършва по следния начин:

- намира се минималният елемент, след което той и първият разменят местата си;
- намира се минималният елемент измежду всички елементи с изключение на първия, след което той и вторият разменят местата;
- този процес продължава до пълното сортиране на масива.



Сортирането по метода на "мехурчето" се извършва по следния начин:

- Обхожда се целият масив от n към 1, като всеки два съседни елемента се сравняват.
- Ако първият е по-голям от втория, те разменят местата си.
- Този процес продължава до правилната подредба на масива.

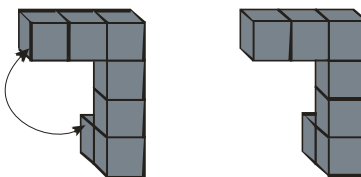
Съществен е фактът, че за размяна на стойностите на две променливи a и b се използва трета променлива c . В някои езици, например в, UniBASIC, е предвиден специален оператор за размяна на стойности между аритметични променливи, имащ формат: **SWAP** <списък_аритметични_променливи>. Резултат от изпълнението на този оператор е циклична размяна на стойности между посочените променливи. Всеки елемент от списъка получава стойността на следващия го, а последният елемент – стойността на първия елемент в списъка, като се спестява въвеждането на нова променлива.

Разместително свойство на действията събиране и умножение по същество е размяна с цел опростяване на изчисления: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$.

Можем да онагледим рязмяната на два елемента в обект така:



При действие размяна не се променя броят на елементите в обекта. В някои случаи не се осъществява и промяна на обекта. Например, след размяна на посочените със стрелка единични кубчета, конструкцията не се променя.



Долу предлагаме система от задачи, насочена към действието „размяна“.

Задача 1.1. Като размените местата на две картички, получите естествен ред на числата.

1 5 3 4 2 6

Отговор:

1 5 3 4 2 6

За онагледяване на действието размяна, когато може да се работи с материални обекти, е удобно използване на двете ръце.

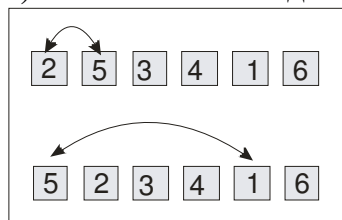
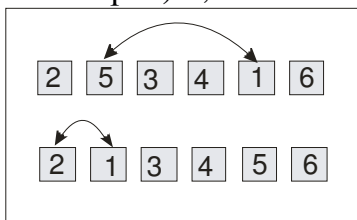
Задача 1.2. За един ход могат да се разменят местата на две карти. Най-малко за колко хода може да се получи естествен ред на числата?

а) 2 5 3 4 1 6

б) 1 5 6 4 2 3

Отговор: а) 2;

б) 2. Ето по една възможност:



Задача 1.3. Имате право еднократно да размените местата на две картички. Получете възможно най-голямото число.

а) 4 5 3 8 2 7

б) 9 5 3 8 2 7

в) 9 8 5 2 3 7

Отговор: а) 853427; б) 983527; в) 987235.

Задача 1.4. Имате право еднократно да размените местата на две картички. Получете възможно най-малкото число.

а) 4 5 3 8 2 7

б) 1 5 3 8 2 7

в) 1 3 8 0 4 7

Отговор: а) 253847; б) 1238527; в) 108347.

Задача 1.5. В таблицата са нанесени данни за пет пациента. Разменете местата на двама от тях така, че да са подредени:

а) по височина;

б) по тегло;

в) по азбучен ред на личните имена;

г) по възраст.

	Огнян	Мая	Неда	Антон	Яна
ЕГН	8603024251	9212104373	8802304490	9609184567	8411214396
тегло	47	35	48	57	68
ръст	153	162	159	158	175

Задача 1.6. Ангел се стреми да се получи възможно най-малко, а Борис – възможно най-голямо число. И двамата имат право да разменят местата на две картички. Какъв ще е резултатът, ако:

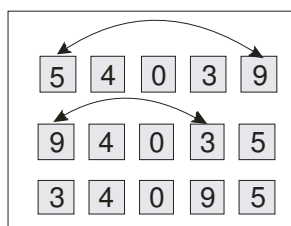
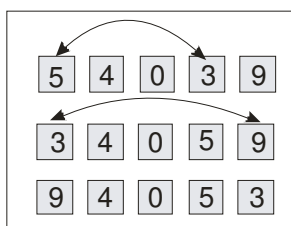
а) пръв извършва размяната Ангел;

б) пръв извършва размяната Борис.

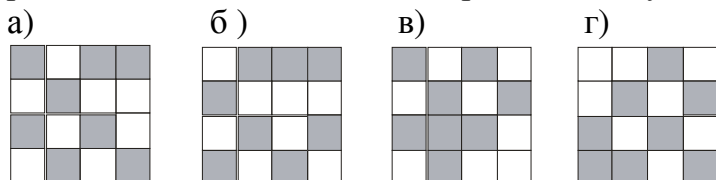
5 4 0 3 9

Отговор: а) 94 053;

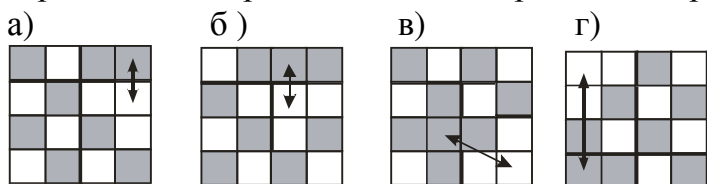
б) 34 095.



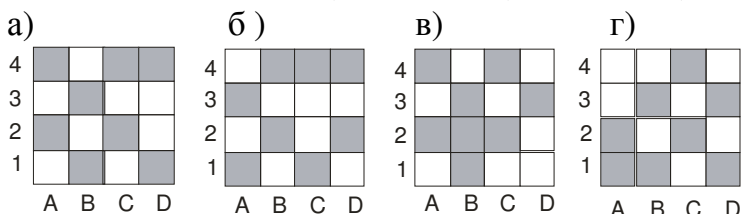
Задача 2.1. Върху дъска са поставени бели и черни квадратчета. Като размените местата на две квадратчета, получите шахматно разположение.



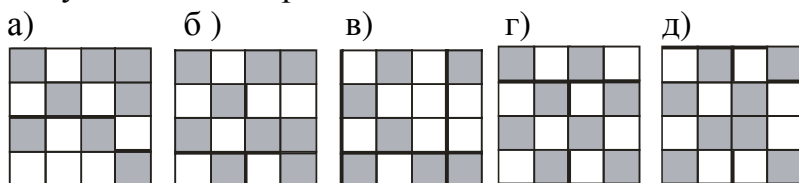
Отговор: Една възможност за онагледяване на решението е посочване със стрелки на квадратчетата, които трябва да се разменят.



Втора възможност е да се направи подходящо означение, което да позволи еднозначно посочване на квадратче чрез мястото му. Така се осъществява и пропеедвтика на декартовата координатна система. Например: а) разменят се местата на D4 и D3; б) C4 и C3; в) B2 и D1; г) A1 и A4.



Задача 2.2. Възможно ли е с размяна на местата на две квадратчета да се получи шахматно разположение?



Отговор: а) Да. Разменят се B1 и D4.

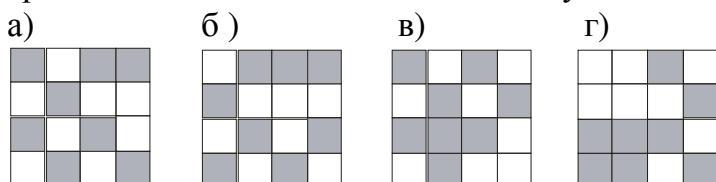
б) Може да се използва фактът, че всички единични квадратчета са $4 \cdot 4 = 16$. За шахматно разположение на квадратчетата в квадрат 4×4 са необходими 8 бели и 8 черни единични квадратчета. В случая има 9 черни и 7 бели квадратчета. Това означава, че не може да се получи шахматно разположение (дори и без ограничение на броя на размяните). Аналогична е ситуацията и за в).

Специфичната информация в подточка г) е шахматно разположение на квадратчетата. Възможно ли е да се реализира такава размяна на две квадратчета, че да се получи отново шахматна подредба? Трудността на

решението идва от факта, че до сега се е осъществявала размяна на бяло и на черно квадратче. В случая при размяна на местата на две бели квадратчета (или на две черни квадратчета) ще се получи отново шахматна подредба. Може да се постави допълнителна задача за преброяване на решенията в този случай.

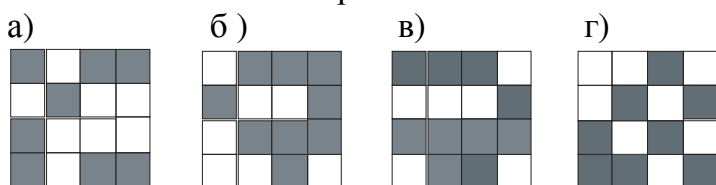
В подточка д) една замяна не е достатъчна за получаване на шахматно разположение.

Задача 2.3. Какъв е минималният брой размяни на две квадратчета, които трябва да се осъществят, за да се получи шахматно разположение?

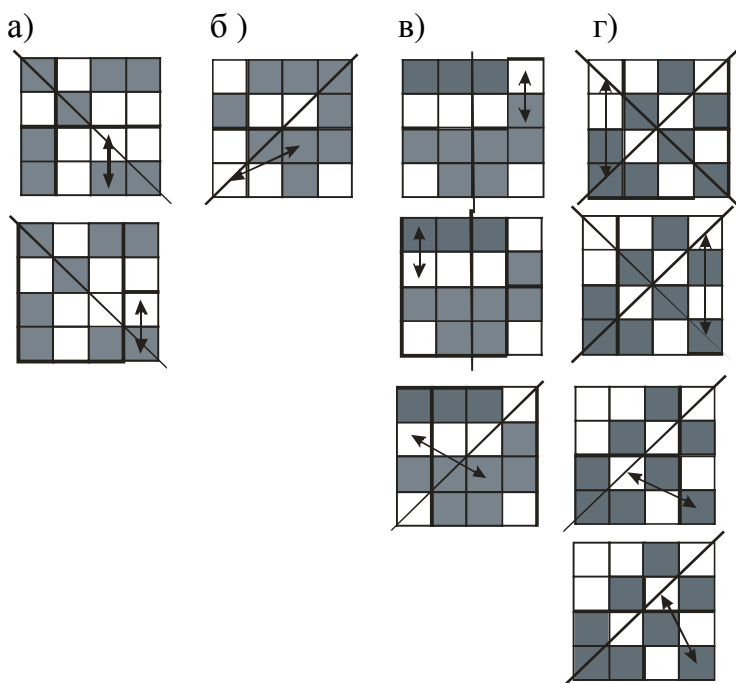


Отговор: а) 1; б) 1; в) 1; г) 2.

Задача 2.4. С размяна на местата на две квадратчета получите фигура, която има ос на симетрия:

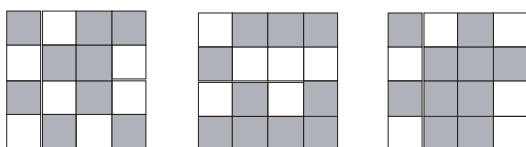


Отговор:

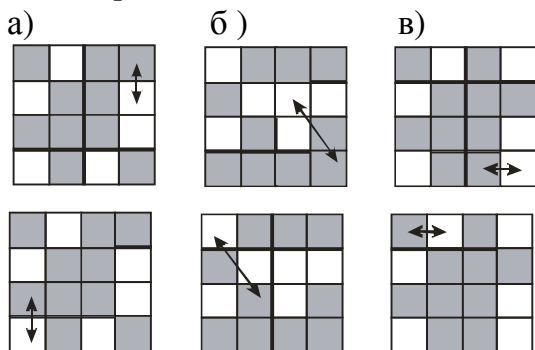


Задача 2.5. С размяна на местата на две квадратчета получите фигура, която има център на симетрия:

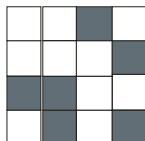
а) б) в)



Отговор:

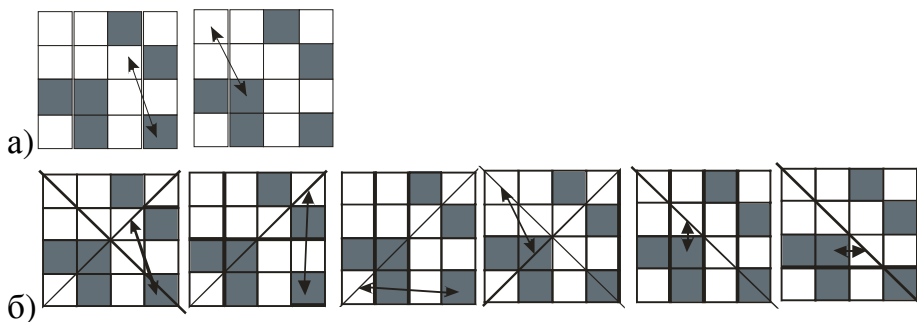


Задача 2.6. С размяна на местата на две квадратчета получите фигура, която има:

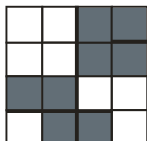


а) център на симетрия; б) ос на симетрия.

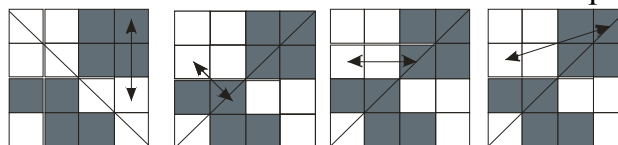
Отговор:



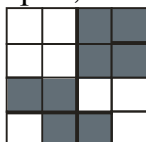
Задача 2.7. С размяна на местата на две квадратчета получите фигура, която има ос на симетрия, но няма център на симетрия.



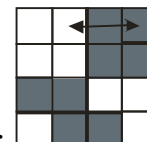
Отговор:



Задача 2.8. С размяна на местата на две квадратчета получите фигура, която има център на симетрия, но няма ос на симетрия.



Отговор:



Задача 3.1. Разменете местата на две от числата в редицата 2; - 4; 8; 14 така, че да се получи аритметична прогресия.

Отговор: - 4; 2; 8; 14.

Задача 3.2. Разменете местата на две от числата в редицата $\frac{1}{2}; -2; 8; -\frac{1}{8}$ така, че да се получи геометрична прогресия.

Отговор: $-\frac{1}{8}; \frac{1}{2}; -2; 8$.

Задача 3.3. Възможно ли е да се разменят местата на две от числата в редицата 5; - 5; 5; - 5; 5; - 5, че да се получи геометрична прогресия?

Отговор: Да. Могат да се разменят кои да е два члена на редицата, които са на нечетно място, както и кои да е два члена на четно място.

Задача 3.4. Числата от 1 до 50 са разположени едно след друго в естествен ред. С помощта на коя от посочените операции е възможно те да се подредят в обратен ред? (допуска се многократно прилагане на съответната операция.)

- а) размяна на местата на кои да е две числа;
 - б) размяна на местата на кои да е две съседни числа;
 - в) размяна на местата на кои да е две числа, между които има точно едно число;
 - г) размяна на местата на кои да е две числа, между които има точно две числа.
- (Гроздев, Кендеров, 2005)

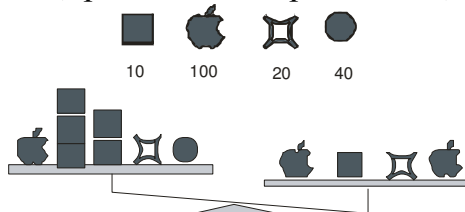
Задача 4.1. Плочките от домино се използват за модел на обикновени дроби. С размяна на местата на две плочки от домино получите вярно равенство. (Гроздев, Чехларова, 2007)

Отговор:

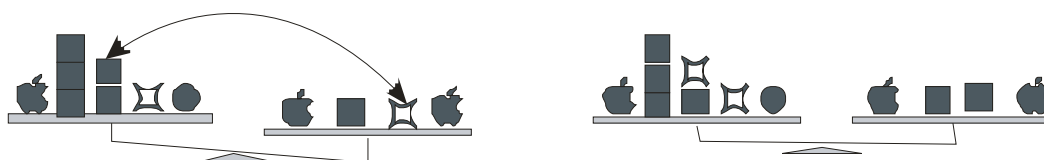
Задача 4.2. Плочките от домино се използват за модел на обикновени дроби. Възможно ли е с размяна на местата на две плочки от домино да получите вярно равенство?

Отговор: не.

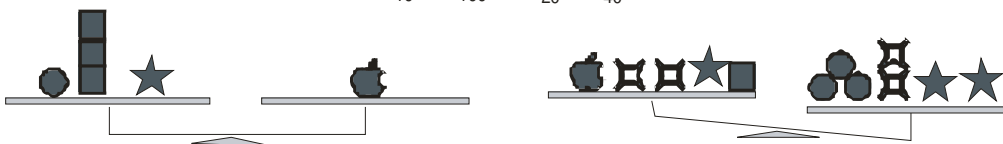
Задача 5.1. Кои две фигури от двете блюда трябва да се разменят, за да бъде взната в равновесие? (Гроздев, Чехларова, 2007)



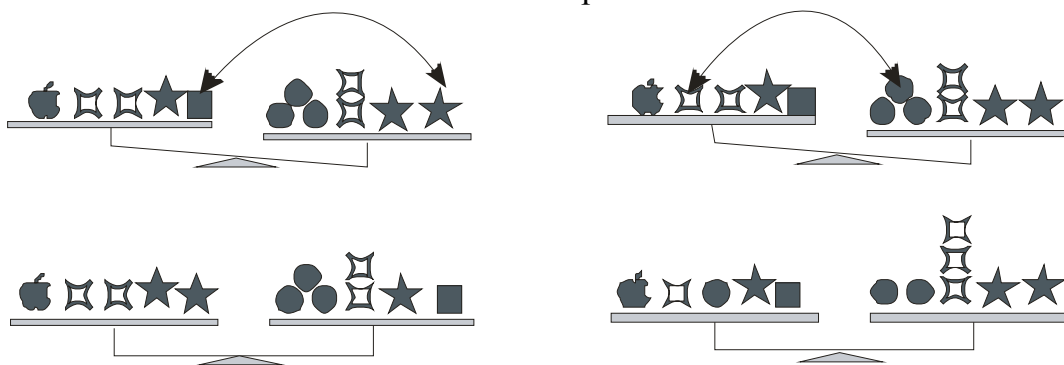
Отговор:



Задача 5.2. Първата везна е в равновесие. Кои две фигури от двете блюда на втората везна трябва да се разменят, за да бъде и тя в равновесие?



Отговор:



Предложената система е насочена към осмисляне на действието размяна. Самостоятелно задачите могат да се използват при изучаване на съответните теми от училищния курс по математика, както и като модел за съставяне на нови задачи.

Литература

1. Гроздев, С., Т. Чехларова, Дидактически възможности на задачите с везни. В: сборник Приемственост и перспективи в развитието на педагогическата теория и практика. ФНПП, София, ВЕДА СЛОВЕНА – ЖГ, 2007. с. 248-259
2. Grozdev, S., T. Chehlarova, Dominoes and fractional numbers. Blagoevgrad, International Scientific Conference FMNS-2007 06-10.06.2007.
3. Гроздев, С., П. Кендеров, Инструментариум за откриване и подкрепа на изявени ученици по математика. В: Математика и математическо образование. С., СМБ, 2005. с. 53 – 64

ON THE ACTION OF EXCHANGE IN THE ACTIVITY OF PROBLEM SOLVING

Toni Chehlarova
IMI, BAS

The action of exchange is considered in the paper as a consisting part of the process of problem solving for a definite type of mathematical problems. The last is a result of lasting preparation and solving of suitable mathematical problems. The paper proposes a series of such problems, which describes different situations of exchange and aims at acquainting and learning of the action of exchange.