

**ДА ВИДИШ НЕВИДИМОТО
ИЛИ
ПРОБЛЕМЪТ С НЕВИДИМОСТТА В ЗАДАЧИТЕ С
КОНСТРУКЦИИ ОТ КУБЧЕТА И ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА
ПРЕОДОЛЯВАНЕТО МУ ЧРЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕ НА *ELICA
DALEST CUBIX EDITOR*¹**

Тони Чехларова
ИМИ, БАН; Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”

*Физикът: В полето се вижда стадо черни овце.
Математикът: Така изглежда от видимата страна.*

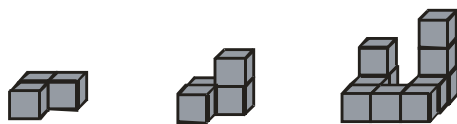
Проблемът с невидимостта в конструкции от кубчета възниква при задаване на задача, описание на решението ѝ, проверка или разбиране на решение, достигане до решение. Конструкция от кубчета в задача може да бъде зададена чрез:

- словесно описание
- предлагане на нейно двумерно изображение или някои нейни проекции
- използване на тримерен материален или виртуален модел
- съчетаване на два или повече от горните начини.

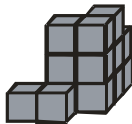
Някои възможности за явното поставяне пред ученици на разглеждания проблем и преодоляването му при формулиране на задачи са разгледани в [3]. Във виртуалната среда *Elica Dalest Cubix editor* [1] може да се построява конструкция, добавя и отстранява единично кубче с посочен цвят, да се върти „дъската” и се наблюдава конструкцията от различни места. Това дава нови решения за осигуряване на яснота при задачите с конструкции от кубчета.

Понякога има възможност двумерното изображение върху лист да даде пълна информация за конструкцията от кубчета:

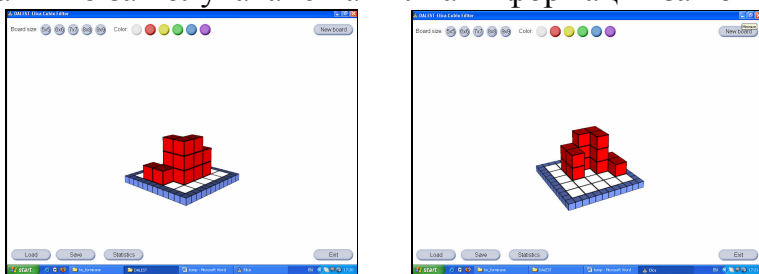
¹ Темата е разработена с финансовото съдействие на фонд “НИ” при ПУ. Дог.№ 07M05.



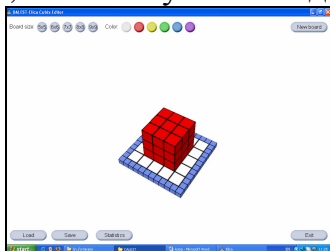
В много случаи двумерното изображение не може да даде пълна информация. Например, от представеното изображение за конструкцията долу не е ясно от колко единични кубчета е съставена – т.е. има ли „невидими кубчета”, колко са те и къде са разположени.



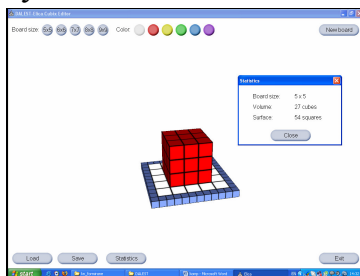
Ако конструкцията е построена с *Cubix editor*, при завъртане на дъската се вижда конструкцията от различни места. В някои случаи завъртането на дъската е достатъчно за получаване на пълна информация за конструкцията.



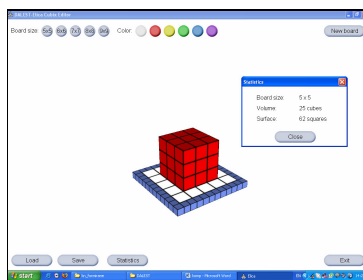
И за конструкции, построени с *Cubix editor*, може да има невидимост – например когато има кухини в затворен обект. Не може визуално да се прецени от колко кубчета е съставена конструкцията долу. Причината е, че централното кубче може да не е поставено, както и кубчето под него.



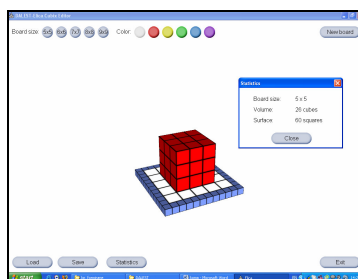
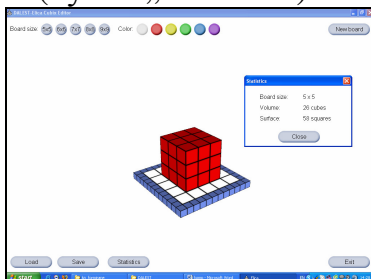
В някои случаи обемът на конструкцията може да бъде достатъчна допълнителна информация за преценка. Информация за обема може да се получи чрез бутон „statistics”. Ако обемът на горната конструкция е 27, то може да се направи извод, че тя е куб $3 \times 3 \times 3$.



Ако обемът е 25, тогава всяко от кубчетата може да е видимо при подходящо завъртане на дъската (от куб $3 \times 3 \times 3$ са отстранени две кубчета – централното и кубчето под него).

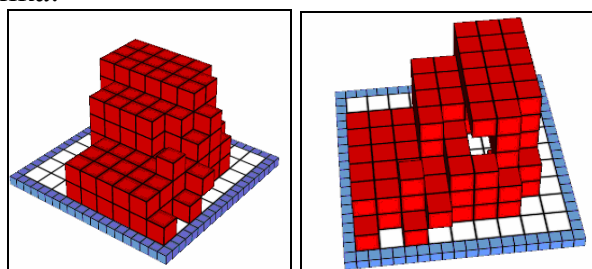


Ако обемът е 26, липсващото кубче може да е централното или кубчето под него. При възможност за отстраняване на дъската може да се осъществи наблюдение. Възможно е обаче да се използва лицето на повърхнината на полученото тяло (бутон „statistics”).



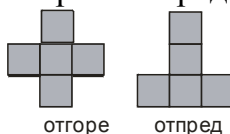
Ако лицето на повърхнината на посочената конструкция от 26 кубчета е 60, то е отстранено централното кубче. Ако лицето на повърхнината на посочената конструкция от 26 кубчета е 58, то е отстранено кубчето под централното.

Предложените средства не са универсални – има конструкции, за които не е възможно еднозначно определяне чрез използването им. Ако „кухината” е по-голяма или ако „кухините” са няколко, не може да се направи преценка от обема, например за конструкцията долу. Дори при наличие на „отвор”, който позволява наблюдаване във вътрешността на конструкцията, понякога не може да се направи преценка:



В такива случаи трябва да се изброят всички възможности, понякога е достатъчно да се посочат минимален и максимален резултат (или друго в зависимост от търсеното в задачата).

Задача. Показани са изгледите отгоре и отпред на конструкцията от кубчета.



а) Намерете минималния брой единични кубчета, от които е възможно да е съставена конструкцията.

б) Намерете максималния брой единични кубчета, от които е възможно да е съставена конструкцията.

в) Намерете обема на конструкцията.

За решаването на подточки б) и в) от съществено значение е и как е дефинирано понятието «конструкция от кубчета». Ето две възможни дефиниции:

Дефиниция 1. Под конструкция от кубчета ще разбираме тяло, което е съставено от единични кубчета. Свързването на единичните кубчета в тялото дефинираме индуктивно така: от тяло с n единични кубчета се получава тяло с $n+1$ единични кубчета, като се добави ново единично кубче така, че поне едно от единичните кубчета на първото тяло и новото кубче да имат обща стена [2].

Дефиниция 2. Под конструкция от кубчета ще разбираме тяло, което е съставено от единични кубчета. Свързването на единичните кубчета в тялото дефинираме индуктивно така: от тяло с n единични кубчета се получава тяло с $n+1$ единични кубчета, като се добави ново единично кубче така, че поне едно от единичните кубчета на първото тяло и новото кубче да имат общ ръб.

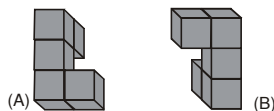
Ще отбележим, че и в [3] като една възможност за ограничаване на невидимостта в конструкция се използва посочване на броя на единичните кубчета, от които е съставена. Но освен че текстът на задачата значително се удължава и утежнява, посочването на този брой понякога е от съществено значение за решаването на задачата и съобщаването му е неподходящо или дори неправилно с оглед целта.

Универсално средство за описание е използване на координатна система и задаване чрез посочване на координатите на всяко от кубчетата в конструкцията. За преобладаваща част от задачите обаче този начин е неприемлив както поради познавателните способности на учениците, така и поради една от основните цели на част от задачите – развитие на въображението.

Невидимостта ще я свържем не само с възможността за неопределеност на конструкцията поради слабости в задаването ѝ, а и с индивидуалните неумения на решаващия за мислено опериране с пространствени обекти.

Възможност за сравняване на две конструкции с *Cubix editor*

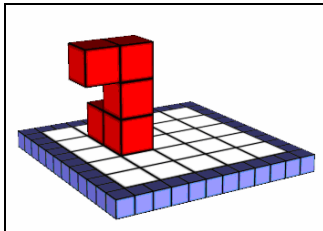
Задача. Възможно ли е конструкцията (А) да заеме в пространството положението на (В)?



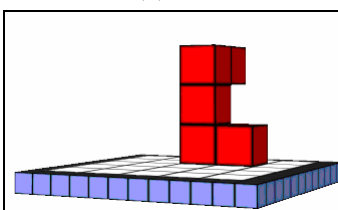
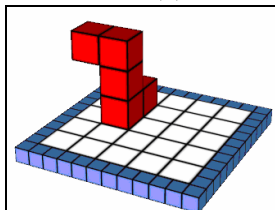
За да се открие решението, е необходимо мислено да се завърта и премества едната конструкция до другата. Понякога е удобно използване на необходими условия (например отнасящи се до броя на единичните кубчета или измеренията) [2]. В случаите, когато необходимите условия са изпълнени, се налага да се работи с реални обекти или виртуални обекти – за достигане до решение, за убеждаване във верността на извод. Например за проверка дали

конструкция (А) може да заеме в пространството положението на (В) възможен вариант е:

1. Построява се модел на (В) с *Elika Dalest Cubix editor*.



2. Извършват се ротации на дъската, докато се получи съвпадение с (А) или се установи, че е невъзможно да се осъществи съвпадение.

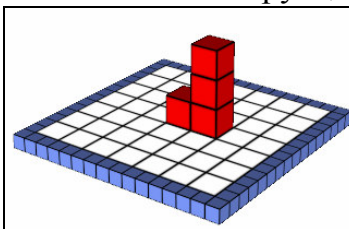
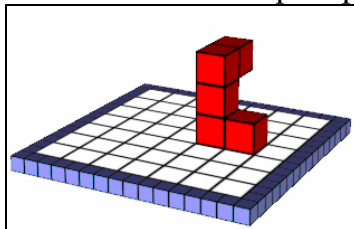


Има произведени кубчета за игра от различни материали с възможност за създаване на конструкции от тях (чрез свързване по стени или ръбове).

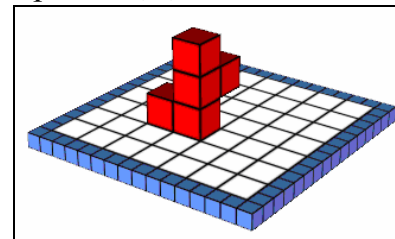
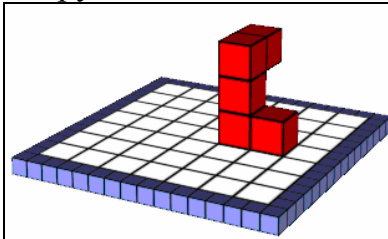


Виртуалният конструктор *Cubix editor* притежава дидактическите възможности на създадените реални модели на кубчета за игра. Лесно може да се извършва промяна в конструкцията с цел получаване на такава, която отговаря на някакви условия, като се използват добавяне, преместване, отстраняване на единични кубчета или др. [4], [6].

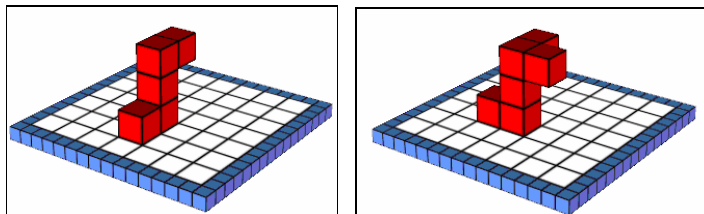
Задача. Допълнете с едно единично кубче (В) така, че получената конструкция да може да заеме положението в пространството на конструкция (А).



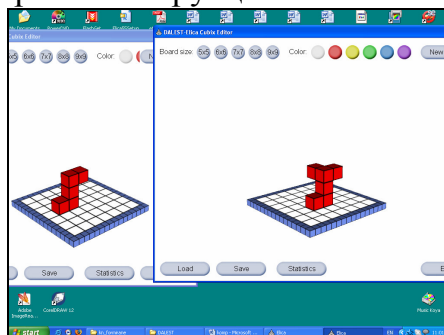
Задача. Променете мястото на едно от единичните кубчета в (В) така, че получената конструкция да е огледален образ на (А).



Задача. Възможно ли е с отстраняване на едно единично кубче от (В) да се получи конструкцията, която може да заеме положението в пространството на конструкцията (А)?

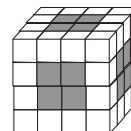


Има възможност едновременно да са отворени два или повече прозореца. Така едната конструкция е видима на екрана, а върху другия прозорец се оперира с втората конструкция.

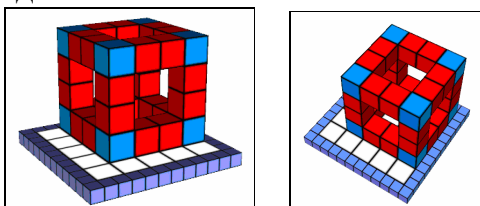


Подходящо е използването на *Cubix editor* за онагледяване на решенията на задачите за преброяване, като се използва различно оцветяване на търсените обекти.

Задача. В куб $4 \times 4 \times 4$ са отстранени кубчетата, лежащи в потъмнените колони, след което получената конструкция е потопена в боя. Колко от кубчетата в получената конструкция имат точно три оцветени стени?

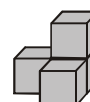


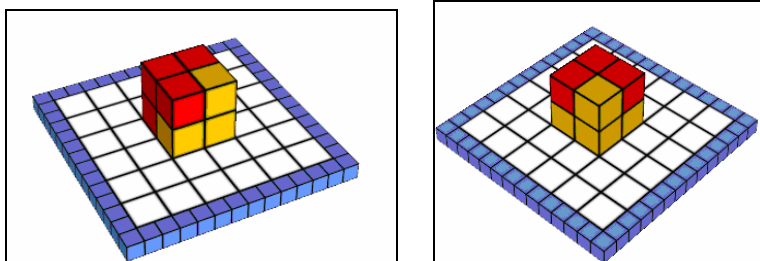
За онагледяване на решението кубчетата с три оцветени стени са оцветени с различен цвят и всяко от тях може да бъде наблюдавано след подходящо движение на дъската.



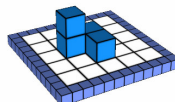
Използването на различно оцветяване на отделни части е естествено и при задачи за разделяне (или сглобяване) на конструкцията:

Задача. Може ли да се конструира куб с използване на две конструкции като дадената?



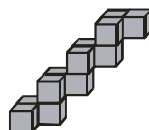


Във връзка с друго изследване бе поставена задача на учениците да опишат с думи представени им конструкции (например конструкцията долу в три нейни модификации).



Резултатът е обсъждане на богатство на идеи, осмисляне на неопределеността и преопределеността, на необходимостта от разбираемост, еднозначност, на същността на понятията и определенията им, на разликата между естествен език и алгоритмичния език, на необходимостта от редактиране. Ученици използваха различни подходи за описание, някои достигнаха до идеята за тримерна координатна система, дори до добавяне на четвърта координата за цвят на единичния обект. Други използваха модулен подход, което е добър преход към програмиране в стил *отгоре-надолу*. [4]

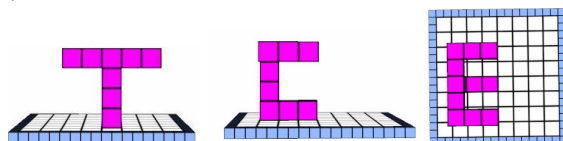
Важен момент е, че в резултат в зависимост от специфичните особености на следващите конструкции учениците използват различни подходи за описване със стремеж за икономичност:



знак „плюс” от 5 единични кубчета; правоъгълен паралелепипед $1 \times 1 \times 4$, „тригърба змия” – разглеждане на конструкцията като съставена от четири „ъгъла”, образувани от по 3 кубчета ... Само споменаването на анекдота от мотото доведе до съществена промяна на резултатите при изследването по отношение на оцветяването и видимостта.

Считаме, че разглежданият проблем с невидимостта при някои конструкции от кубчета, а и при тримерни обекти въобще, трябва да се поставя явно пред учениците. Решаването на подходящи задачи ще осигури разбиране на проблеми, свързани с пространството и развитие на критичност на мисленето. Ето задача, подходяща за проверка на разбирането на проблема.

Задача. С минимален брой единични кубчета направете конструкция с посочените проекции:



Ще отбележим, че в математиката телата се изобразяват чрез ръбовете (или контурите), като за невидимите ръбове се използва пунктирна линия. При изобразяване на технически или архитектурни обекти с вдлъбнатини, отвори или кухини с невидими повърхнини се използват разрези или сечения [5]. В някои задачи и тези възможности могат да се използват за преодоляване на невидимостта.

Литература

1. Boytchev, P., *Elica*, <http://www.elica.net>
2. Гроздев, С., Т. Чехларова, Кубчета и конструкции. С., 2007.
3. Grozdev, S., T. Chehlarova, Cube constructions. 3rd Congress of Mathematicians of Macedonia, Struga, 29.09. – 02.10.2005.
4. DALEST project: <http://www.ucy.ac.cy/dalest/>
5. Николова, Т. и др., Домашен бит и техника за 6. клас. Бит и техника, Варна, 2007.
6. Сендова, Е., Е. Стефанова, Е. Ковачева, Н. Николова, П. Бойчев, Книга за учителя към учебно помагало по информационни технологии за 6. клас „Уча и творя с компютър”, Анупис, София, 2007.

TO SEE THE UNSEEN OR THE PROBLEM WHIT THE UNSEENING IN THE PROBLEMS WITH CUBES CONSTRUCTIONS AND THE OPPORTUNITIES FOR THEIR OVERCOMING BY USING *ELICA DALEST CUBIX EDITOR*

Toni K. Chehlarova

Abstract

The paper presents the ideas for explanation end overcoming the problem whit the unseen in the cubes constructions, arise whit the putting a problem, description of the answer, checking-up or whit understanding the answer.