

СЪСТАВЯНЕ НА ЗАДАЧИ С ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ ЗА ЧЕТВЪРТИ, ПЕТИ И ШЕСТИ КЛАС

Тони Кондева Чехларова

Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”

MAKING OF PROBLEMS WITH NUMBER SEQUENCES FOR 4, 5 AND 6 CLASSES

Tony Kondeva Chehlarova

University of Plovdiv “Paissii Hillendarski”

Abstract

I suggest some groups of number sequences and the problems with them for 4-6 classes. Solving problems of sequences develops the functional, logical thinking, flexibility of thinking, imaginations. The paper is intended for teachers in mathematic.

Задачи от числови редици са част от съдържанието на математически състезания в началното училище, в 5 и 6 клас, както и на психологически проучвания, свързани с изследване на различни качества и операции на мисленето. Решаването на тези задачи е свързано обикновено с откриване на правилото на образуване на числовата редица и намиране на следващ, липсващ, сгрешен или “излишен” член на редицата. Разкриването на закономерности съдейства значително за развитието на интелекта на учениците – формират се знания и умения за извършване на наблюдение, сравнение, анализ, синтез, обобщение, аналогия. Решаването на задачи с числови редици както в задължителното обучение, така и в избираемото обучение по математика, ще допринесе за развиване на познавателните способности на учениците. Като мотив може да се използва факта, че много открития – математически и нематематически, са резултат от построяване и изследване на числови редици. Непер открива логаритмите след съпоставяне на две прогресии. Боде предсказва съществуването на неизвестни планети на базата на открита закономерност в числова редица. Менделеев посочва местата на единадесет неоткрити химически елемента и свойствата им на основата на закономерности в числова редица.

Предлагам няколко групи от числови редици, които ще подпомогнат учителите при съставяне на задачи, свързани с числови редици. Необходимостта от съставяне на такива задачи от учителите е продиктувана от отсъствието им в сборници и методически ръководства.

I група Общият вид на редицата е $a_1 ; a_2 ; a_3 \dots a_n$.

Редица 1 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20

Всеки член след първия се получава с прибавяне на едно и също число.

Редицата е аритметична прогресия. Произволен член a_k се изразява:

$a_k = a_{k-1} + d$ чрез предходния член , където d е константа, $k \geq 2$;

$a_k = a_1 + (k-1)d$ чрез поредния номер k .

Редица 2 2 ; 5 ; 9 ; 14 ; 20 ; 27 ; 35

Това е аритметична прогресия от II ред. Разликата не е постоянно число, а се изменя като общ член на аритметична прогресия (в случая редицата от разликите е 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8). В [1] се използва наименованието аритметично-аритметична прогресия.

Произволен член a_k се изразява:

$a_k = a_{k-1} + d_{k-1}$ чрез предходния член, където $d_{k-1} = d_1 + (k-2)d$, $k \geq 2$;

$a_k = a_1 + (k-1)d_1 + \frac{1}{2} (k-1)(k-2)d$ чрез поредния номер k .

Аналогично се съставя аритметична прогресия от 3 ред, 4 ред ..., k ред.

Пример за аритметична прогресия от 3 ред е редицата 2 ; 5 ; 9 ; 17 ; 32 ; 57 ;

95. Редицата от разликите на последователните членове е 3 ; 4 ; 8 ; 15 ; 25 ; 38, която е аритметична прогресия от 2 ред.

Редица 3 5 ; 6 ; 8 ; 12 ; 20 ; 36 ; 68

Всеки член след първия се получава с прибавяне на число, което се изменя като общ член на геометрична прогресия (в случая поредно число на редицата 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32). В [1] такава редица се нарича аритметично-геометрична прогресия.

Произволен член a_k се изразява:

$a_k = a_{k-1} + d_{k-1}$ чрез предходния член, където $d_{k-1} = d_1 q^{k-2}$, $k \geq 2$.

$a_k = a_1 + \frac{d_1 (q^{k-1} - 1)}{q - 1}$ чрез поредния номер.

Редица 4 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; 486

Всеки член след първия се получава с умножение с едно и също число (в случая числото 3) . Редицата е геометрична прогресия. Произволен член a_k се изразява:

$a_k = a_{k-1} \cdot q$ чрез предходния член , q е константа;

$a_k = a_1 q^{k-1}$ чрез поредния номер k .

Редица 5 3 ; 3 ; 6 ; 24 ; 192

Това е геометрична прогресия от II ред. Всеки член след първия се получава с умножение с число, което се изменя като общ член на геометрична прогресия (в случая поредно число на редицата 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32). В [1] такава редица се нарича геометрично-геометрична прогресия.

Произволен член a_k се изразява:

$a_k = a_{k-1} \cdot q_{k-1}$ чрез предходния член , където $q_{k-1} = d_1 q^{k-2}$, $k \geq 2$.

$a_k = a_1 q_1^{k-1} q^{0,5(k-2)(k-1)}$ чрез поредния номер.

Аналогично се съставя геометрична прогресия от 3 ред, 4 ред ..., k ред.

Пример за геометрична прогресия от 3 ред е редицата 2 ; 6 ; 18 ; 2592 ; 497664.

Редица 6 2 ; 2 ; 6 ; 30 ; 210 ; 1890 ; 20790

Всеки член след първия се получава с умножение с число, което се изменя като общ член на аритметична прогресия (в случая поредно число на редицата 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11). В [1] такава редица се нарича геометрично-аритметична прогресия.

Произволен член a_k се изразява:

$a_k = a_{k-1} \cdot q_{k-1}$ чрез предходния член , където $q_{k-1} = d_1 + (k-1)d$.

Могат да се съставят и по-сложни числови редици с участие на аритметични и геометрични прогресии от различни редове.

II група Всяка редица от тази група е съставена чрез последователно редуване на членовете на две числови редици, на които могат да бъдат открити правилата на образуване. Общият вид на редицата е $a_1 ; b_1 ; a_2 ; b_2 ; \dots ; a_n ; b_n$

Редица 1 5 ; 20 ; 10 ; 20 ; 15 ; 20 ; 20 ; 20 ; 25

$a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n$ е аритметична прогресия с разлика $d \neq 0$.

$b_1 = b_2 = \dots = b_n$ е константа.

Редица 2 5 ; 6 ; 10 ; 8 ; 15 ; 10 ; 20 ; 12 ; 25 ; 14

$a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n$ е аритметична прогресия с разлика d_a .

$b_1 ; b_2 ; \dots ; b_n$ е аритметична прогресия с разлика d_b .

Редица 3 5 ; 3 ; 10 ; 12 ; 15 ; 48 ; 20 ; 192 ; 25 ; 768

$a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n$ е аритметична прогресия с разлика d .

$b_1 ; b_2 ; \dots ; b_n$ е геометрична прогресия с частно q .

Редица 4 2 ; 8 ; 6 ; 8 ; 18 ; 8 ; 54 ; 8 ; 162 ; 8 ; 486 ; 8

$a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n$ е геометрична прогресия с частно q .

$b_1 = b_2 = \dots = b_n$ е константа.

Редица 5 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 18 ; 16 ; 54 ; 32 ; 162 ; 64 ; 486 ; 128

$a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n$ е геометрична прогресия с частно q_a .

$b_1 ; b_2 ; \dots ; b_n$ е геометрична прогресия с частно q_b .

Задачи с повишена трудност могат да се съставят, като за редиците $a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n$ или $b_1 ; b_2 ; \dots ; b_n$ се използват други редици от I група. Например:

2 ; 3 ; 5 ; 3 ; 9 ; 6 ; 14 ; 24 ; 20 ; 192 ; 27 ; ; 35

Решаването на тези задачи се свежда до откриване на двете редици и правилата на образуването им. Удобно е да се подчертаят числата през едно за открояване на двете редици. Ако решаващите задачата са запознати с графиката на числова редица, то построяването на графиката на дадената числова редица е добро средство за достигане до идеята за разделянето на редицата на две числови редици.

За редица от вид 2 на II група ще отделя няколко частни случая, при които е възможно разкриване на правилото чрез групиране на числата по двойки. Такова групиране е удачно, когато е лесно получаването на всяко число на четно място от предходното число.

Задача 1 Открийте правилото за образуване на числовата редица и намерете липсващото число.

А. 2 ; 10 ; 4 ; 12 ; 6 ; 14 ; 8 ; 16 ; 10 ; ?

Б. 2 ; 10 ; 4 ; 12 ; 6 ; 14 ; 8 ; 16 ; 10 ; 18 ; ?

За подточка А. числата се групират по двойки така:

2 ; 10 ; 4 ; 12 ; 6 ; 14 ; 8 ; 16 ; 10 ; ?

Във всяка от двойките второто число се получава от първото с прибавяне на числото 8. Търсеното число ще се получи, като се съберат първото число на последната двойка (числото 10) с числото 8.

За подточка Б. числата се групират по двойки:

2 ; 10 ; 4 ; 12 ; 6 ; 14 ; 8 ; 16 ; 10 ; 12 ; ?

В случая се търси член на нечетно място, т.е. първо число в двойката. Ще се намери като пореден член в числовата редица (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; ?), получена от първите числа в двойките. В тази редица всеки член се получава от предходния с прибавяне на числото 2. Следователно търсеният член е числото 12.

Ако задачата се решава по традиционния начин и се намират разликите между последователните членове на редицата, получава се следната редица от разликите: 8 ; -6 ; 8 ; -6 ; 8 ; -6. От нея се разкрива закономерността на образуване.

Нека дадената редицата е:

1/ $a_1 ; v_1 ; a_2 ; v_2 ; \dots ; a_n ; v_n$

Където

2/ $a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n$ е аритметична прогресия с разлика d_a ;

3/ $v_1 ; v_2 ; \dots ; v_n$ е аритметична прогресия с разлика d_v .

Образуват се последователно разликите

$v_1 - a_1$

$v_2 - a_2 = v_1 - a_1 + d_v - d_a$

...

4/ $v_{n+1} - a_{n+1} = v_1 - a_1 + n(d_v - d_a)$

Търси се частен случай, при който разликата $v_{n+1} - a_{n+1}$ е лесна за откриване.

Една възможност е получаването на израз за $v_{n+1} - a_{n+1}$, независим от n. Това е възможно, когато $d_v - d_a = 0$, т.е. за $d_v = d_a$. Тогава $v_{n+1} - a_{n+1} = v_1 - a_1$.

Такава е редицата от разглежданата задача 1. Разликата на редицата 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 е числото 2. Разликата на редицата 10 ; 12 ; 14 ; 16 е също числото 2.

Задача 2 Открийте правилото за образуване на числовата редица и намерете липсващото число.

А. 2 ; 10 ; 4 ; 15 ; 6 ; 20 ; 8 ; 25 ; 10 ; ?

Б. 2 ; 10 ; 4 ; 15 ; 6 ; 20 ; 8 ; 25 ; 10 ; 30 ; ?

За подточка А. числата се групират по двойки:

2 ; 10 ; 4 ; 15 ; 6 ; 20 ; 8 ; 25 ; 10 ; ?

Разликите между двата члена във всяка двойка са 8 ; 11 ; 14 ; 17 . Те образуват аритметична прогресия. Следващият член на тази аритметична прогресия е 20. Тогава търсеният член се получава като сбор на числата 10 и 20, т.е. е числото 30.

За подточка Б. числата се групират по двойки. Търси се елемент на нечетно място, т.е. първи в поредната двойка. Намира се като следващ елемент от

числовата редица, получена от първите числа в двойките (2 ; 4 ; 6 ...).
Следователно е числото 12.

От /4/ Редицата $c_{n+1} = v_{n+1} - a_{n+1}$ е аритметична прогресия с първи член $v_1 - a_1$ и разлика $d_b - d_a$.

Задача 3 Открийте правилото за образуване на числовата редица и намерете липсващото число.

А. 12 ; 48 ; 9 ; 36 ; 6 ; 24 ; 3 ; ?

Б. 12 ; 48 ; 9 ; 36 ; 6 ; 24 ; 3 ; 12 ; ?

За подточка А. числата се групират по двойки така:

12 ; 48 ; 9 ; 36 ; 6 ; 24 ; 3 ; ?

Във всяка двойка второто число се получава от първото с умножаване с едно и също число (числото 4). Търсеният елемент е $3 \cdot 4 = 12$.

За подточка Б. се търси член на нечетно място, т.е. първи в поредната двойка. Намира се като следващ член от числовата редица, получена от първите числа в образуваните двойки (12 ; 9 ; 6 ; 3 ; ...). Следователно търсеното число е числото 0.

Кога се получава този случай?

Нека $v_1 = k \cdot a_1$

$v_{n+1} = v_1 + n \cdot d_b = k \cdot a_1 + n \cdot d_b$

Но $a_{n+1} = a_1 + n \cdot d_a$

Тогава

$v_{n+1} = k(a_{n+1} - n \cdot d_a) + n \cdot d_b$

$v_{n+1} = k \cdot a_{n+1} - n \cdot (k \cdot d_a - d_b)$

Следователно $v_{n+1} = k \cdot a_{n+1} \Leftrightarrow d_b = k \cdot d_a$.

III група Общият вид на редицата е $a_1 ; v_1 ; c_1 ; a_2 ; v_2 ; c_2 ; \dots ; a_n ; v_n ; c_n$

Числовата редица е получена чрез последователно редуване на членовете на три числови редици, всяка от които е редица от I група.

Редица 1 2 ; 5 ; 6 ; 4 ; 10 ; 18 ; 6 ; 15 ; 54 ; 8 ; 20 ; 162 ; 10 ; 25 ; 486

IV група Връзката между произволен член a_n и предходния a_{n-1} или между произволен член a_n и поредния номер n се изразява чрез степен.

Редица 1 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36

Произволен член a_n се изразява така: $a_n = n^2$

Редица 2 2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; 37

Произволен член a_n се изразява така: $a_n = n^2 + v$

Редица 3 1 ; 8 ; 27 ; 64 ; ...

Произволен член a_n се изразява така: $a_n = n^3$

Редица 4 2 ; 4 ; 16 ; 256 ; ...

Произволен член a_n се изразява така: $a_{n+1} = a_{n-1}^2 ; a_1 = a$.

V група Общият вид на редицата е $a_1 ; a_2 ; a_3 \dots a_n$.

Намирането на произволен член зависи от повече от един предходен член.

Редица 1 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21

Редицата на Фибоначи е най-известната редица от тази група. Всеки член след втория се намира като сума на предходните два. Произволен член след втория a_{n+2} се изразява така: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a$ (в случая $a=1$) ; $a_2 = v$ (в случая $v=1$).

Други редици, за които е лесно откриването на зависимостта са:

Редица 2 2 ; 6 ; 4 ; -2 ; -6 ; -4 ; 2 ; $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$; $a_1=a$; $a_2=v$.

Редица 3 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 11 ; 20 ; 37 $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$; $a_1=a$; $a_2=v$; $a_3=c$.

Редица 4 1 ; 1 ; 5 ; 9 ; 17 ; 29 ; 49 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + v$; $a_1=a$; $a_2=v$.

Редица 5 -2 ; 3 ; -6 ; -18 ; 108 $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n$; $a_1=a$; $a_2=v$.

Редица 6 1 ; -2 ; 3 ; -6 ; 36 ; $a_{n+3} = a_{n+2} \cdot a_{n+1} \cdot a_n$; $a_1=a$; $a_2=v$; $a_3=c$.

Някои задачи, в които се използват числови редици от предложените групи.

Задача 4 Дадена е числовата редица -3 ; 0 ; 5 ; 12 ; 21 ; 32 ; ? . Разкрийте правилото на образуването ѝ и по него намерете следващия член.

Задача 5 Едно число е пропуснато при записване на числовата редица $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{11}{6}$. Открийте правилото на образуване и липсващия член на редицата.

Задача 6 В числовата редица 1 ; 4 ; 9 ; 15 ; 25 ; 36 ; 49 е записано число, което не се получава по правилото на образуване на редицата. Открийте го и го поправете.

Задача 7 При записване на числовата редица 0 ; 4 ; 10 ; 16 ; 22 е написано и едно число, което не е от редицата. Открийте и зачертайте “излишното”число.

В задължителното обучение задачи, свързани с разкриване на правилото на образуване на числови редици, е удачно да се включат в часовете за формиране на знания и умения за извършване на аритметичните действия в изучаваното числово множество. За пети клас членовете на редиците трябва да са обикновени дроби или десетични дроби, а за шести клас – и отрицателни числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паскалев, Г. Работа в кръжока по математика. част II. С., Народна просвета, 1985.