

ИСТОРИЯТА НА ЧИСЛОВИТЕ РЕДИЦИ В ПОМОЩ НА ОБУЧЕНИЕТО

ст. ас. Тони Чехларова
Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”

THE HISTORY OF NUMBER SEQUENCES IN AID OF TEACHING

Tony Chehlarova
Plovdiv University “Paissii Hilendarski”

Усъвършенстването на обучението по всеки предмет от природоматематическия цикъл е свързано с резултатите от сравняването на процесите на научно познание и обучение. Това сравняване дава възможност да се разкрият и обосноват някои неизползвани или недостатъчно използвани пътища за усъвършенстване на учебния процес чрез пренасяне на рефлексията от науката в обучението. Добрата дидактическа обработка на учебното съдържание осигурява възможност на учениците да се доближат до истинското откритие, до “удоволствието да откриваш” и така да станат “приятели на науката за цял живот”[5].

Числовите редици са важна част от историята на математиката. Познанието за числови редици, в частност за аритметична и геометрична прогресия, е от най-дълбока древност. Задачи с числови редици са открити в съдържанието на най-старите открити математически текстове. Развитието на знанията за числови редици са резултат от решаването на житейски проблеми, проблеми в други науки, чисто математически проблеми. Ранната поява на задачите с аритметична или геометрична прогресия се обяснява с това, че много житейски реалности се моделират с такива редици. Много открития, математически и нематематически, са постигнати в резултат на построяване и изучаване на числови редици.

Отделям два аспекта на използване на историята на числовите редици в обучението:

1. В обучението по математика при изучаване на числовите редици (пропедевтичен или системен курс) използване на факти или задачи от историята за мотивиране, за възбуждане или поддържане на интерес към математиката, за приложение на усвоени знания.
2. В обучението по различни учебни предмети за дидактическа обработка на учебно съдържание чрез използване на исторически факти (исторически или историко–логически подход за конструиране на учебно съдържание).

Представям няколко конкретни задачи и факти, свързани с числови редици, и възможностите за използването им в обучението.

Задача (от папируса на Ринд) 100 мерки хляба да се разделят между 5 човека така, че вторият да получи толкова повече от първия, колкото третият е получил повече от втория, четвъртият повече от третия и петият повече от четвъртия. Освен това първите двама трябва да са получили 7 пъти по-малко от останалите. По колко трябва да се даде на всеки?

Количествата образуват аритметична прогресия. За учениците от 11 клас решението се свежда до съставяне и решаване на система от две уравнения с две неизвестни.

Според Дж. Нюман [8] решаването е извършвано в следната последователност: Прави така:

Направи разликата на дяловете $5\frac{1}{2}$. Тогава количествата ще бъдат $23; 17\frac{1}{2}; 12; 6\frac{1}{2}; 1$, общо 60.

Приетата разлика $5\frac{1}{2}$ е ключът към решението. До това число се стига така: Предполагаме, че разликата между дяловете е 1. Тогава членовете на прогресията биха били 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Сумата на

най-малките два дяла е $1+2=3$, а една седма част от сумата на останалите е $\frac{1}{7}(3+4+5)=1\frac{5}{7}$. Следва, че не се получават равни стойности, разликата между получените числа е $1\frac{2}{7}$. Ако разликата между последователните дялове е 2, прогресията е $1; 3; 5; 7; 9$. От $1+3=4$ и $\frac{1}{7}(5+7+9)=3$ се получава, че разликата между получените две числа е 1. При всяко увеличаване на разликата на прогресията с единица разликата на получените стойности за двата израза намалява с $\frac{2}{7}$. За да бъдат двете стойности равни, разликата 1 за първата разглеждана редица трябва да се увеличи с толкова, колкото $\frac{2}{7}$ се съдържа в $1\frac{2}{7}$. Числото е $4\frac{1}{2}$, следователно разликата на търсената редица е $1+4\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$.

Остава да се провери дали прогресията удовлетворява и второто изискване в задачата – броят на хлябовете да е 100. В папируса се постъпва така: сумата на членовете на получената прогресия е 60, а трябва да е 100. С колкото трябва да се умножи 60, за да се получи 100, с толкова трябва да се умножат членовете на прогресията, за да се получи търсената редица.

Задача (от папируса на Ринд) Във всяка от седем къщи има по седем котки. Всяка котка хваща по седем мишки, всяка от които би излязла 7 класа ечемик. Всеки клас би дал по 7 мерки зърно. Колко зърно се е спестило? Колко са общо къщите, котките, мишките, ечемикът и мерките зърно?

Тази задача няма пряко практическо приложение, съставена е като задача с развлекателен характер. Тя се среща в различни модификации през вековете и е получила името “задача-пътешественица”. Съществуват няколко хипотези за това, как е получено решението. За най-вероятно се приема използването на таблицата [1]:

1	1	7	49	343	2 401	2801
2	2	14	98	686	4 802	5602
4	4	28	196	1372	9 604	11204
7	7	49	343	2401	16 807	19607

За учениците решението се свежда до прилагане на формулите за намиране a_k и S_k на геометрична прогресия.

Задача от Вавилон [4] Десет братя, $1\frac{2}{3}$ мини сребро. Брат над брата се издига, но с колко не зная. Частта на осмия е шест шекела. Брат над брата – с колко е по-горе?

Определено количество сребро трябва да се раздели между 10 братя така, че частите на братята да образуват аритметична прогресия. Търси се разликата на прогресията, ако е известно количеството на осмия брат.

Вавилонският автор е използвал строго аритметични разсъждения при решаването. Идеята на решението му е следната. Започва се с намирането на средноаритметично (средна част), чрез разделяне $1\frac{2}{3}$ мини на 10 и след получаване на $\frac{10}{60}$ мини (1 мина е равна на 60 шекела) се извършва

умножение с две. Така удвоената средна част е $\frac{20}{60}$ мини. Това представлява сборът от частите на третия и на осмия брат, като се вземе предвид, че първият от третия и осмият от десетия са отделени с две степени (интервала), а разликата между техните части е $\frac{8}{60}$ мини. Стойността на една степен

(разликата на прогресията) е равна на $\frac{1}{5}$ от $\frac{8}{60}$ мини.

Задача за бамбука от 9 колена (Китай, Математика в 9 книги) Един бамбук се състои от девет колена. Обемът на долните три колена е 4 шена, а на четирите горни колена – три шена. Какъв е обемът на средните две колена, ако обемът на всяко коляно се отличава от съседното с равна величина?

Съставителят на тракта предлага следното решение на задачата [10]. Четири шена, разпределени на трите долни колена, определят долния коефициент. Три шена, разпределени на четирите горни колена, определят горния коефициент. От големия долен коефициент изваждаме

малкия горен коефициент и остатъкът е делителя. Сумата на половината четири колена и три колена изваждаме от 9 колена - остатъка е делителя. От делимото и делителя се намира количеството в шени —т.е. на колко се отличава всяка стъпка от съседната.

Задача за Бързия и Крантата (Китай Математика в 9 книги) [10] Бързият и Крантата се движат от Чанъана към княжество Ци, разстоянието между които е 3000 ли. Първия ден Бързият изминал 193 ли, всеки следващ ден с 13 ли повече. Крантата през първия ден изминал 97 ли, всеки следващ ден с половин ли по-малко. Бързият стигнал княжество Ци и като се върнал обратно, някъде срещнал Крантата. След колко дни ще се срещнат и колко ли ще измине всеки кон?

Използва се следното правило. Да допуснем, че ще се срещнат след 15 дни. Тогава недостигът ще е равен на 337 и половина ли. Ако допуснем, че ще се срещнат след 16 дни, получава се излишък 140 ли. Умножават се недостигът и излишъкът на кръст с предполагаемите количества и се получава делимото. Сборът на недостига и излишъка е делителя. От делимото и делителя се получава търсеното количество дни.

Една от известните случки с математици е историята на малкия Гаус, свързана с разкриване на свойство на аритметичната прогресия и в резултат бързо намиране на сумата на първите 100 естествени числа. Мноето учители фиксират този факт като “метод на Гаус” и така подпомагат запомнянето му, а и възпроизвеждането му при нужда. Независимо от това, в кой клас учениците откриват или се запознават със свойството на аритметичната прогресия, полезно е свързването му с Гаус. Желателно е да се представи поне още една задача от историята заедно с решението ѝ. Например Алкуин написва ръководство по математика “Задачи за изостряне на ума на юношите”, в което има такава задача: Стълба има 100 стъпала. На първото седи един гълъб, на второто – два гълъба, на третото - три и т.н. на всички стъпала до стотното. Колко са гълъбите? [2]

Алкуин решава задачата така. На 1^{во} и 99^{то} стъпало стоят 100 гълъба, на 2^{ро} и 98 – 100 гълъба и т.н. Само на 50 и 100 остават без двойка. Така на стълбата има $49 \times 100 + 50 + 100 = 5050$ гълъба.

Учениците сравняват идеята на Гаус с решението на Алкуин. Възниква въпросът винаги ли трябва да се повтарят тези действия за намиране на сумата на аритметична прогресия. Поставя се изискването за откриване на формула за намиране на сбора на първите n члена на аритметична прогресия чрез a_1, a_n, n или a_1, d, n . Извеждането на формулата е подготвено, идейно то е извършено с решаването на двете задачи от историята.

Известната история с индуския цар Шером и Сета – създателя на шаха, който поискал за награда за първото поле на шахматната дъска едно пшенично зърно, за второто поле – две зърна, за третото – 4, за четвъртото – 8 и така за всяко следващо поле - два пъти повече от предходното, може да бъде предложена няколко пъти на учениците. В четвърти клас, при изучаване на многоцифрените числа, може да се използва за формиране на умение за прогнозиране и за умножение на многоцифрено число с едноцифрено число. В пети клас, при формиране на понятието степен, историята може да се припомни и използва за осмисляне на степента като съкратен запис на произведение с равни множители. В единадесети клас отново може да се включи при намиране на сумата на първите n члена на геометрична прогресия.

Решаването на тези задачи и запознаването с древното им решение създава условие за осмисляне на трудния и дълъг път на откритието в науката, както и значението и приложимостта на вече разкритите закони и закономерности.

В сегашния училищен курс по математика изучаването на логаритмите в задължителното обучение е силно ограничено. Логаритмите възникват като резултат от необходимостта от извършване на големи изчисления в астрономията, банковото дело и математиката. В настоящия етап на развитие на обществото факт е наличието на изчислителна техника, която извършва изчисленията много по-бързо и надеждно от човека. Това налага постепенно отпадането не само на логаритмичните таблици от съдържанието на обучението по математика, а и на задълбочени знания за логаритмите въобще. За учениците е важно да осмислят необходимостта от логаритмите, същността им и приложението им. За решаването на тази задача много полезна би била историческата справка. А откриването на логаритмите е резултат от съпоставянето на две числови редици [3].

Откриването на числото π е също резултат от построяване и съпоставяне на числови редици. В 5 клас могат да се използват редиците от обиколките и от дължините на радиусите на окръжности, а в 11 клас – редиците от вписаните и описаните правилни k -ъгълници.

Менделеев сравнява всички известни до 1869г. (63 на брой) химични елемента по признаци на сходство и на различие, като търси мястото на единичното в общия ред от елементи чрез ориентиране в особеното (групата). Позволява си да коригира относителните атомни маси на девет изучени елемента и да посочи местата на единадесет неоткрити по онова време химични елемента. Така открива периодичния закон и съставя периодична таблица на химичните елементи. Истинността на

периодичния закон и евристичната роля на периодичната система се доказват с откриването на химичните елементи, предсказани и описани от Менделеев. На основата на числови редици е възможно изграждане на вариант на изучаване на периодичната система, като се акцентува на възможностите за рефлексия над химичното знание [6].

Откриването в химията и физиката на много функционални зависимости, свързващи химични (физични) величини и изразяването им чрез формула обикновено протича в следната последователност: извършват се многократно опити, като се променя стойността само на една променлива величина. В резултат се съставят една или няколко числови редици. Разкрива се закономерност в числовата редица или между съответните членове на редиците. Прави се извод за реалния процес. “Галилей насочва физиката по пътя на математиката, поставя основите на съвременната механика и създава първообраз на съвременната научна мисъл. Нютон, възприемайки методологията на Галилей, доказва ефективността ѝ.”[7,123]

Пътят на откритието може да бъде пренесен в обучението. Обикновено зависимостите са прости и достъпни за самостоятелно откриване от голям брой ученици. Числовите редици учениците могат да получат самостоятелно след експериментална работа или наготово от учителя, след описание на дейностите за достигане до тях.

Обучението по математика има за цел всеки ученик да овладее такава система от математически знания и основаващи се на тях умения и навици, че да има достатъчна математическа подготовка, необходима за изучаване на другите учебни дисциплини. За реализиране на обучението по някои теми от природоматематическия цикъл чрез моделиране с числови редици, е необходимо в съдържанието на обучението по математика до шести клас да се включат задачи за съставяне на числови редици и задачи за разкриване на закономерност между членовете на дадена числова редица [9]. В резултат учениците ще се доближат до разбирането на математиката като форма за описване и метод на познание на реалността, до осмисляне на математически идеи и методи, до формирането на мислене, характерно за творческа дейност.

Литература

1. Башмакова, И. и др. История на математиката от най-древни времена до началото на новото време. С. Наука и изкуство, 1974.
2. Брылевская, Л. Алкуин. В: Математика в школе, стр.68, 1991.
3. Ганчев, И. История на математиката. С., Модул, 1999.
4. Глейзер, Г. Беседи по история на математиката. Част 2, С., НП, 1987.
5. Делор, Ж. Образование – скритото съкровище – доклад на международната комисия за образование за XXI век пред UNESCO. 1996, PARIS, превод на бълг.1997.
6. Димова, Й. Рефлексията над химичното знание в началния етап на обучението по химия – дисертация. Пловдив, 2000.
7. Клайн, М. Математика. Поиск истини. пер. с англ. Мир, М., 1988.
8. Нюман, Дж. Папирусът на Ринд. В: Чобанов, И. Математика и физика в древността. С., 1973.
9. Чехларова, Т. Числови редици за шести клас. Научни трудове на ПУ “П. Хилендарски”. т.38, кн.2. Методика на обучението, 2001.
10. Чистяков, В. Материали по истории математики в Китае и Индии. М., УЧПЕДГИЗ, 1960.