

ЗА ЗАДАЧИТЕ ОТ МОДЕЛИРАНЕ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Тони Кондева Чехларова

Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”

ABOUT MODELLING PROBLEMS IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

Tony Kondeva Chehlarova

University of Plovdiv “Paissii Hilendarski”

Abstract

In this work shown some unsolved questions of modelling problems. The idea is illustrated with several appropriate examples.

Задачите от моделиране с уравнения, неравенства и системи от уравнения и неравенства имат трайно място в учебното съдържание по математика. При решаването им възникват различни по характер въпроси, някои от които ще поставя върху конкретни задачи.

Задача 1 Едно домакинство приготвило храна за 10 дни за 12 прасета, но купили още 3 прасета. Намерете за колко дни ще стигне приготвената храна. [3]

1. При уточнение храната за едно прасе за един ден да се счита за единица дажба е даден отговор 8 дни. Но храната ще стигне и за един ден, и за 2 дни, ..., и за 8 дни. И макар че задачата е предложена при темата “Уравнения”, щом въпросът не е поставен така: “За колко дни най-много ще стигне храната”, отговорът трябва да е $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Житейските ситуации са свързани много повече с неравенства, отколкото с равенства. След решаване на съответната математическа задача е необходимо да се разсъждава върху резултата.
2. Ако с x означим търсените дни, то $x \in \mathbb{N}$. Как ще разсъждаваме обаче, ако получим $x=8,6$? Макар че $8,6 \notin \mathbb{N}$, задачата има решение –цялата част на полученото число. /В други случаи се налага да се намери най-малкото цяло число, което е по-голямо или равно от полученото дробно./
3. Ако премахнем уточнението от 1., храненето на прасетата трябва да се разглежда като непрекъснат процес – например подвижна лента с непрекъснато хранещи се прасета. Тогава отговорът може да бъде и дробно положително число.

А реално храненето се извършва няколко пъти в денонощието. Ако приемем, че прасетата се хранят четири пъти в денонощието през равен интервал от време, то отговорът ще е с точност 0,25.

Задача 2 За колко скока кучето ще стигне зайчето, ако разстоянието между тях е 150 фута, зайчето с всеки скок се отдалечава от кучето със 7 фута, а кучето с всеки скок се приближава с 9 фута? [2]

1. Ако приемем, че за един скок на зайчето и за един скок на кучето е необходимо едно и също време, то отговорът е 75 скока. Без тази уговорка резултатът ще е функция на продължителността на двата скока.
2. Ако разстоянието между зайчето и кучето е не 150, а 151 фута, получава се резултат 75,5 скока.

В ситуацията куче гони зайче кучето ще промени дължината на $76^{\text{я}}$ си скок и ще хване зайчето. Предвижда ли се обаче промяна на дължината на скока в условието на задачата?

Ако куче /например куче – играчка/ гони зайче /например зайче – играчка/, скокът не може да бъде променен. Кучето ще прескочи зайчето и ще продължи напред – задачата се свежда до зайче гони куче. Тогава задачата няма решение. Всъщност има зависимост и от височините на скоковете. Взаимното положение на графиките на двете движения ще даде верен отговор.

Тази популярна задача се среща и с друга формулировка: За колко скока кучето ще стигне зайчето, ако разстоянието между тях е 150 фута, дължината на скока на зайчето е 7 фута, а дължината на скока на кучето е 9 фута? В този случай е необходимо да се направи още едно уточнение – движението се извършва по правата, определена от началното положение на кучето и на зайчето, като се конкретизират и посоките. Без уточнението за траекторията на движение задачата е твърде сложна, а решението ѝ е недостъпно за учениците.

При задачите от моделиране, въпреки че се поставят допълнителни ограничения за неизвестните величини и изразите с тях, свързани с реалната ситуация, след получаване решението на съответната математическа задача отново се налага да се провеждат разсъждения за проверка дали полученото решение е отговор или не на задачата.

Необходимо ли е тогава да се правят предварителните ограничения?

Считам, че е желателно това да се извършва в случаите:

1. Получената област от допустими стойности помага веднага да се открие решението на задачата, като предварително има основание да се предположи това.
2. Получената област от допустими стойности позволява задачата да се реши с непосредствена проверка, и то ако определянето ѝ не е по-сложно от решаване на задачата в друга последователност.

Задача 3 Мама е на 37 години, а аз на 10. След колко години мама ще е 3 пъти по-голяма от мен?

1. В такива задачи на годините се гледа като на един миг, т.е. като на нещо неделимо. Данните са така подбрани, че дадените години, както и

търсените, са естествени числа. Какви трябва да са разсъжденията ни, ако се получи дробно число /например 3,5 ; 5,2 ; 4,25/? Има ли задачата решение или не? Трябва ли да се работи в месеци, /седмици/, дни, часове, минути, секунди..? Необходимо ли е да се уточнява, че участващите лица са родени в един и същи месец, дата, час.../и с каква точност/, или щом в задачата са дадени цели числа, се предполага, че това е така?

2. Еквивалентни ли са въпросите “За какво време?” и “Колко часа?”? Какъв трябва да е отговорът на въпроса “Колко часа ?” при резултат 8,5 - 8,5 часа, 8 часа, 9 часа, 8 часа 30 минути?

Много от тези въпроси нямат еднозначен отговор. Една от причините е, че голяма част от задачите от моделиране не са достатъчно определени, т.е. житейската ситуация не е достатъчно изяснена.

Задача 4 Пристанищата А и В на една река се намират на 10 км едно от друго. За какво на параход ще е необходимо повече време – да преплава от А до В и обратно или да преплава 20 км по езеро.

Означаваме с x скоростта на парахода, с y – скоростта на течението.

1. Достатъчно ли е ограничението скоростите да са неотрицателни? Не е ли необходимо да се постави ограничението скоростите да са по-малки от максимално достигнатата скорост /в случая на параход в река и езеро и скорост на река/ в сегашната действителност? Такива ограничения отгоре в зависимост от реалната ситуация трябва да се правят и в останалите задачи. Например при задачи, свързани с възраст, трябва да се направи ограничение в зависимост от максимално достигнатата възраст на човек /животно, растение/.

2. При $x > y > 0$ движението и резултатът са ясни.

$$\text{От } \frac{10}{x+y} + \frac{10}{x-y} > \frac{20}{x} \text{ следва, че повече време ще е необходимо за}$$

движението от А до В.

При $x \leq y$ обаче можем да разсъждаваме по различни начини.

I начин: В сборниците при $x < y$ движението не се разглежда.

II начин: При $x \leq y$ параходът няма да заплава срещу течението, но ще се движи по течението със скорост $y-x$. Тогава за движението по езерото отново ще е необходимо по-малко време.

Интересно е мнението на Кудрявцев [1, стр 156] за наличието на задачи от моделиране в учебника по математика и решаването им в часовете по математика. “Обучението в решаване на приложни задачи с математически методи не е задача на математическия курс, а на курсовете по съответните предмети.” Съответните специалисти трябва да придобият необходимите математически знания. Обучението за съставяне на математически модели на реални явления е една от важните задачи в обучението по тези предмети, затова трябва да им се отделя много повече време. Тогава въпросите, поставени в статията, ще трябва да се решават от съответните специалисти чрез изясняване на ситуацията, чрез поставяне на ограничения и др.

Според мен позицията на Кудрявцев е крайна. Математическото моделиране може да не е задача на математиката, но е задача на обучението по математика. Задачи от моделиране трябва да се решават в часовете по математика. Считаю, че е необходимо да има задачи, в които числовите стойности не са подбрани така, че да се получи “удобен” отговор, а да има и такива, при които ще е необходимо допълнително разсъждение.

Това са истинските задачи от моделиране, те отговарят на житейските ситуации.

Учениците трябва да са подготвени за допълнителните разсъждения, дори и ако в учебното съдържание няма такива задачи, т.к. до “неудобен” отговор може да се стигне след допускане на изчислителна или логическа грешка.

Решаването на такива задачи мотивира необходимостта от въвеждане на някои стандартни ограничения – например разглеждане на равномерно праволинейно движение, на невисокосна година и др., ако това не е уточнено в условието на задачата. Решаването на такива задачи съдейства за развиване на различни качества на вниманието, въображението, мисленето – пълнота, широта, критичност, гъвкавост.

Желателно е такива задачи да се задават, след като учениците вече имат някои знания и умения за съставяне и решаване на математически модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев, Л. Современная математика и ее преподавание. М., Наука, 1985.
2. Леман, Й. Увлекательная математика. М., Знание, 1985.
3. Шопова, Д. и др. Алгебра за 6 клас. С., НП, 1984.