

РАЗНООБРАЗИЕ В ЕДНАКВОСТИТЕ

ТОНИ ЧЕХЛАРОВА, ЕВГЕНИЯ СЕНДОВА, София

ВЪВЕДЕНИЕ

Симетрията и асиметрията са в хармония и единство, както в природата, така и в изкуството. Отношението между симетрията и асиметрията на създавания по време на един творчески процес обект играе съществена роля при оценяване на естетическите му достойнства. Интересен факт от гледна точка на математическото образование е, че най-разнообразни прояви на живота са свързани с геометрични преобразувания като *еднаквости* (транслация, ротация, осева симетрия, централна симетрия и композиции от тях). Ето защо изглежда естествено да съчетаем изучаването на тази тема с проектиране и възстановяване на художествени артефакти. Това създава условия учениците сами да достигнат до ротационната симетрия и разкрият нейни свойства. Нашата работа с ротационната симетрия в рамките на европейския проект *InnoMathEd* [1] предизвиква въвеждането на произведение на еднаквости и се стигна до представяне на еднаквости чрез произведения на осев симетрии.

В списание *Математика и информатика* [2, 3] вече се появиха чудесни материали, свързани с еднаквостите, но по-надолу ще споделим идеите на няколко дидактически сценария, разработени от нас за целите на *InnoMathEd*. Използването им в часовете по математика (а защо не и по ИТ, информатика и изкуства) е само част от по-амбициозна цел – да насърчим учениците да наблюдават и откриват явления, свързани с геометричните преобразувания, да ги прилагат в разнообразни свои дейности и по този начин – да задълбочат познанията си за света около тях.

ИНТЕЛИГЕНТНОСТИ И ЕДНАКВОСТИ

Една от основните идеи на Х. Гарднър [4] е, че всички хора са интелигентни по различни начини и има уникални съчетания на видове интелигентности. Представянето на изучаван обект по различни начини дава възможност от една страна учещият да използва своите силни страни (интелигентности) за разбирането му, а от друга – след разбирането да развива и останалите интелигентности. Да се задълбочи степента на разбиране на дадено явление, като се

използват силните страни на учещите, не само стимулира тяхното развитие, а осигурява задоволство, щастие, повишава увереността в силите, мотивира за следващи дейности.

Например при изучаване на симетрията е подходящо да се използват различни начини за получаване на симетрични фигури на основата на различни дейности и интелигентности. Учениците:

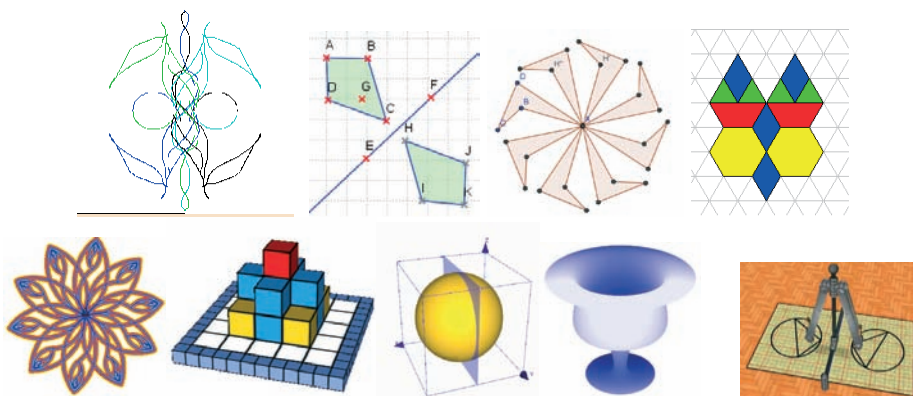
- разглеждат обекти от природата, архитектурата, предмети от бита, науката и откриват (разпознават) геометрични преобразувания;
- създават обекти с използване на геометрични преобразувания като използват синтез от средства;
- преобразуват фигури;
- достигат до свободно използване на геометрични преобразувания като средство за реализиране на проекти.

На учениците се предлага да открият в спортни и фолклорни изпълнения хармонията, основаваща се на еднаквости, след това – да изпълнят симетрични движения с ръце и крака, и накрая – да изобразят само с ръце геометрични фигури (фиг. 1).



Фиг. 1. Разпознаване на еднаквости в спорта и танците

След това те могат да използват разнообразни среди за изобразяване на еднаквости [5-8]. Те рисуват чрез „свободна ръка“, работят със специфични инструменти в графични редактори в равнината и пространството, с динамични конструкции, а също така и програмират, например с Logo (фиг. 2).



Фиг. 2. Компютърни среди за изобразяване и изследване на еднаквости

За да изберат компютърна среда, която е подходяща за даден проект, учениците трябва да осъзнаят, че всяка такава среда има предимства и недостатъци. И едно немаловажно умение е да могат да аргументират избора си. От гледна точка на преподавателя е важно не само да предостави възможност за избор на среда, но и тема на проекта, която е продиктувана от интересите и наклонностите на учещия.

За тези, които имат музикални наклонности например, симетрията може да бъде демонстрирана в контекста на известни музикални фрагменти (фиг. 3). Ето например как участничка в програмата RSI (за ученици с изявени изследователски способности в математиката и природните науки [9]) описва реакцията си след подобна илюстрация на симетрия по време на лекция върху връзките между музиката и математиката:

Когато проф. Ноам Елкис изсвири прочутата тема от Паганини и я „обърна с главата надолу“, тя се превърна в 18-ата вариация на Рахманинов от неговата Рапсодия върху една тема от Паганини. За всеки, който има поне грам познание върху класическата музика, това бе момент на просветление.

С други думи, симетрията може не само да бъде видяна, но и чута!



Фиг. 3. Част от 24-ото капричио от Паганини и 18-ата вариация на тази тема от Рахманинов

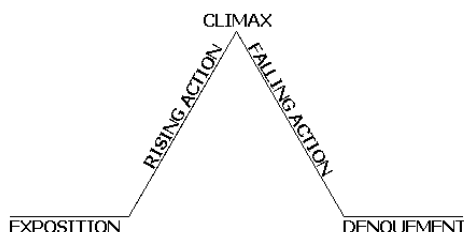
Проект на тема еднаквости би бил интересен като се направи съответствие между еднаквостите в музикален и геометричен контекст (фиг. 4) [10].



Фиг. 4. Еднаквости в музиката

Еднаквости в музиката могат да се открият и когато се разглежда структурата на дадено музикално произведение. Повторението или транслацията (транспозицията) на музикален фрагмент лесно се откриват във формалното описание на мелодичната (хармоничната или ритмичната) структура [11]. Например AABVCCDD, 11112233, 11122111 описват 8-тактова композиция, в която еднаквите цифри/букви отговарят на една и съща структура (да кажем *мелодична*, евентуално изместена на фиксиран интервал). Същата идея се използва при описание на хармоничната структура, например низът TTSDDSTT отразява хармонията на 8-тактова мелодия, в която последователните тактове имат за опорни акорди тониката (T), субдоминантата (S) и доминантата (D) (съответно

до-ми-сол, фа-ла-до, сол-си-ре в до мажор). Анализът на структурата на група музикални творби от гледна точка на еднаквостите може да бъде много полезен при създаването на алгоритмична музика [12]. По подобен начин е добре да се предизвикат учениците да открият *еднаквости* в геометричен смисъл в естествения език и в някои литературни творби (например да разпознаят или създадат палиндромы, да анализират структурата на конкретни пиеси, поетични форми като сонети, хаiku и т.н.). След това те могат да опишат формално тези структури и да се запознаят с някои стандартни описания (например в случая на драма – с *пирамидата на Фрайтаг*) (фиг. 5) [13].

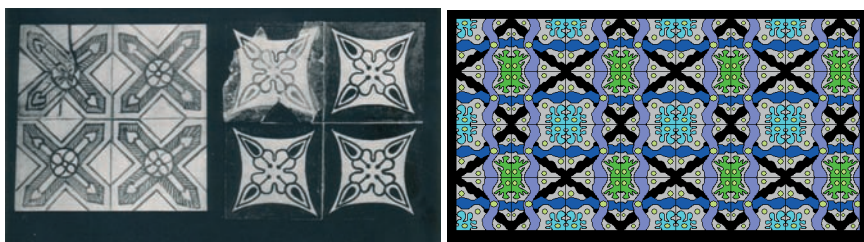


Фиг. 5. Пирамидата на Фрайтаг, описваща структура на драмата

По-надолу представяме фрагменти от сценарии на тема *Дизайн и реконструкция на обекти*, включени в курсове за СДК към ФМИ-СУ, ФМИ-ПУ и семинари по *InnoMathEd*.

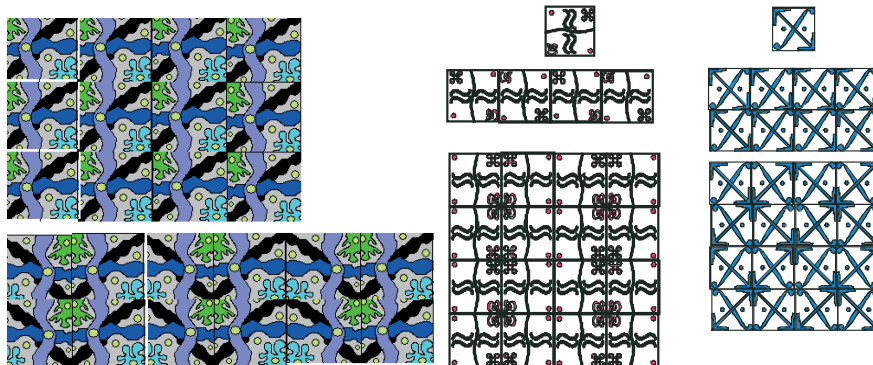
ЕДНАКВОСТИ И ДИЗАЙН

Проект 1. Изследвайте дадените по-долу снимки на плочки и създайте собствен дизайн за облицовка.



Фиг. 6. Керамични плочки от Велики Преслав и съвременни образци

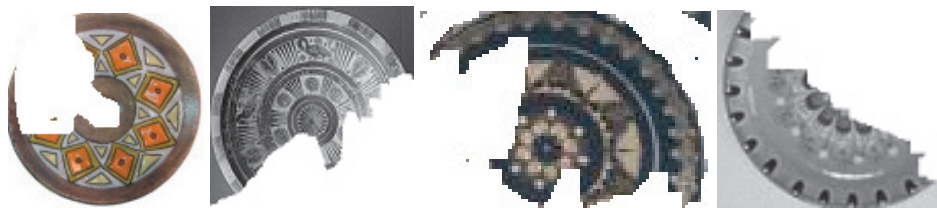
Проектът бе предложен на студенти по математика (бъдещи учители), които трябваше да използват софтуер по свой избор. След като разгледаха внимателно горните образци, те съобразиха, че възможностите за паркетиране на равнината с модели на старинните плочки са доста ограничени (ако плочките имат общи върхове). А моделите на фиг. 7 са направени с *Paint* и с *CorelDraw* от ученици.



Фиг. 7. Паркетиране с готови и собствени модели на плочки

Вижда се, че дори с не особено сложни графични средства може да се постигне приличен резултат. Но ако в проекта се вплете език за програмиране (Logo в нашия случай), усилията, свързани с програмирането, могат да бъдат осмислени - точност на чертежа, по-богат спектър на виртуалните *паркети* чрез използване на параметри за размера на плочката, за броя на редовете и колоните, възможност за диалог с потребителя и т.н.

Проект 2. Помогнете на археолозите да възстановят съдове, открити при археологически разкопки, като използвате компютърен модел.



Фиг. 8. Модели на антични съдове, подлежащи на възстановяване

Някои ученици използваха *Paint*, но се затрудниха от ограничението за завъртане на ъгъл, кратен на 90° . При избор на динамичен софтуер, например *GeoGebra*, те използваха две изображения на фигурата, завъртаха едното от тях и фиксираха различна степен на прозрачност. Това позволява специфично представяне на наслагването на двете изображения (фиг. 9).



Фиг. 9. Възстановяване с помощта на *Paint* и *GeoGebra*

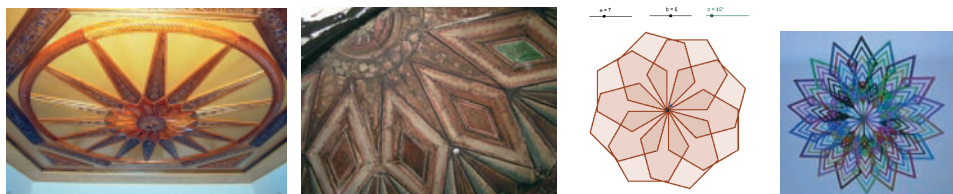
Целта на следващите проекти е да се достигне до ротационна симетрия и да се разкрият някои нейни свойства.

Проект 3. Направете модел в стил *троянска капка* [14] на рисунка на чиния.



Фиг. 10. Образци на чинии, рисувани в стил *троянска капка*, и компютърни модели в същия стил

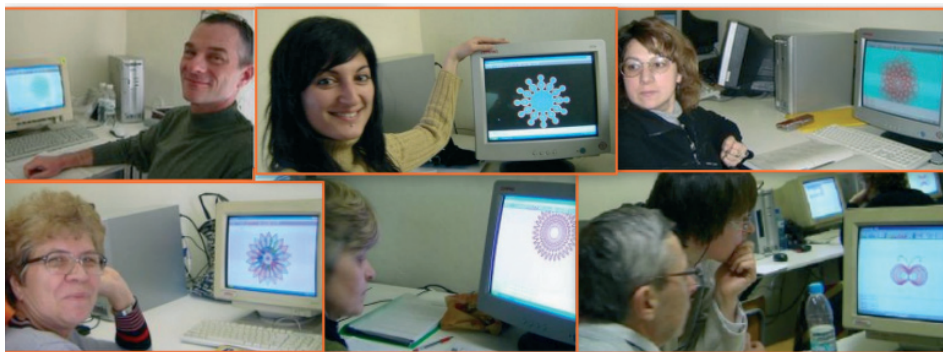
Проект 4. Направете компютърен модел на дърворезбован таван.



Фиг. 11. Дърворезбовани тавани от Трявна и Пловдив и компютърни модели

Някои разработки на учители, направени по време на обучителните курсове, проведени в рамките на проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci* са представени в [15]. Разработен е и дидактически сценарий, с достигане до създаване на бутон (подпрограма) за ротационна симетрия.

Може би е интересно да се отбележи, че този проект обикновено се предлага и в началото на курс по Лого в рамките на СДК за учители по ИТ и математика. В многобройните издания на този курс наблюдаваме реализация на принципа „без праг – без таван“ (таванът може да се дължи само на нашето въображение). Участниците създават разнообразни модели на розетки от многоъгълници, като менят стойностите на параметрите за брой на страните на многоъгълниците, дължина на страната, вид на многоъгълника, цвят, дебелина на молива и т.н. Получените модели варират от дизайн на дърворезбован таван в коптивщански стил до плетена на една кука салфетка (фиг. 12).



Фиг. 12. Модели на тавани, салфетки и пеперуди с ... Лого

Не е рядко явление изключително красиви модели да се получат в резултат на малка грешка в ориентацията на костенурката и тогава „debugging“-ът се превръща в „degoaling“ – с други думи след като си открием грешката, можем да си преформулираме целта...

А как да продължим, ако оригиналът на плетивото съдържа друг симетричен елемент – пеперуда. Ето идея за нов проект.

Проект 5. Създайте стилизиран модел на пеперуда.



Фиг. 13. Плетена пеперуда и вариации на Лого

Да се върнем към основния ни обект на разглеждане – симетрията. Ето какво казва за нея големият математик Херман Вайл: *Симетрията е една от идеите, чрез които хората през вековете са се опитали да разберат и създадат ред, красота и съвършенство.* Всъщност има ли органична връзка между симетрията и красотата? Може ли една симетрична композиция да бъде непременно окачествена като красива? Напоследък срещаме една доста странна реклама за пластична хирургия: *Красотата е симетрия.* В същото време изследване на Харисон [16] показва, че макар да възприемаме човешкото лице за симетрично, пълната симетрия би го направила доста неестетично. Може би именно това търсене на равновесие между симетрията и асиметрията вдъхнови една учителка от училище по моден дизайн да създаде кройка, като използва осева симетрия със средствата на костенурковата геометрия, и после да добави декоративни елементи за малко асиметрия (фиг. 24).



Фиг. 14. Симетрия и асиметрия

Не по-малко амбициозен е проектът на тема българска бродерия.

Проект 7. Анализирайте образци на българска бродерия и създайте компютърни модели с подходящ за идеята ви софтуер.



Фиг. 15. Компютърни модели на бродерии от носии на Фолклория

Тук учениците могат да изберат софтуер с квадратна мрежа или пък да използват фрактали на Кох с квадратна чупка [17]. След изработване на основната фигура (модула), те трябва да го подложат на геометрично преобразуване или композиция от няколко преобразувания.

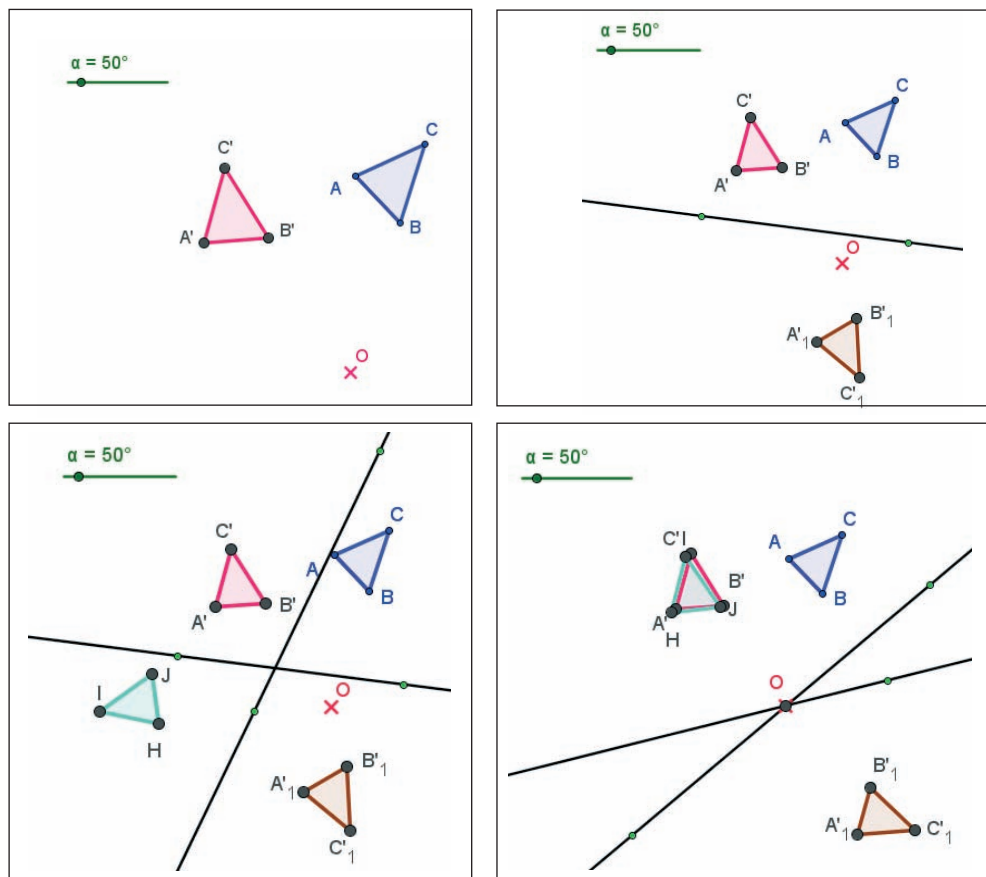
ЕДНАКВОСТИТЕ КАТО ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА ОСЕВИ СИМЕТРИИ

След усвояване на конкретните еднаквости естествено е да се премине към произведения на еднаквости. Вариант за усвояване на някои от еднаквостите чрез експериментирание с динамични конструкции, разработени с *GeoGebra*, е представен в [18]. Точно възможностите на динамичните конструкции позволяват в избираемото обучение да се извършат изследвания с произведения от изучените еднаквости и постави акцент върху групови свойства както на еднаквостите въобще, така и на някои видове еднаквости. Докато при еднаквостите изследванията са свързани с факти, които интуитивно са ясни, то при произведенията в много от случаите е трудно да се направи вярно предположение. Например, при изследване на комутативността на произведението на две еднаквости, произведението на две трансляции е комутативно, но на две ротации в общия случай (с различен център на ротация) не е. В частния случай, когато двете ротации имат общ център, произведението е комутативно. Някои реализации на такова изследване с използване на динамичен софтуер са представени в [19].

Следващата стъпка при изследване на еднаквостите в равнината е да се достигне до **представянето им чрез произведение на осеви симетрии**. Ето възможен сценарий с използване на динамичен софтуер (*GeoGebra* в нашия случай).

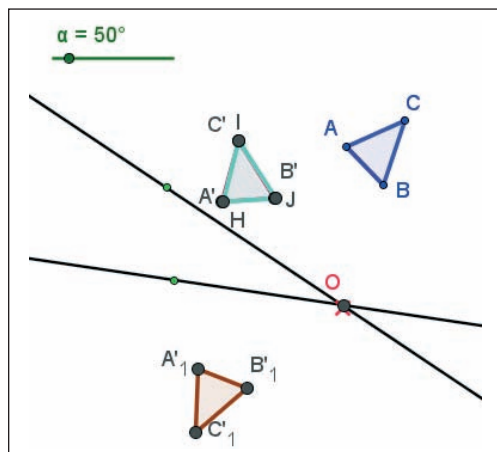
Нека f и f' са фигура и образът ѝ при ротация. Да се опитаме да получим f' от f чрез произведение на две осеви симетрии. Ще използваме като фигура триъгълник. Построяваме $\triangle ABC$ и образът му $\triangle A'B'C'$ при ротация с център O и ъгъл α (фиг. 16 а).

Построяваме две прави a и b , образът $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ при осева симетрия с ос a (фиг. 16 б), образът $\triangle HJI$ на $\triangle A_1B_1C_1$ при осева симетрия с ос b (фиг. 16 в). Стремим се да постигнем съвпадане на $\triangle A'B'C'$ и $\triangle HJI$ чрез промяна на положението на правите a и b (фиг. 16 г).



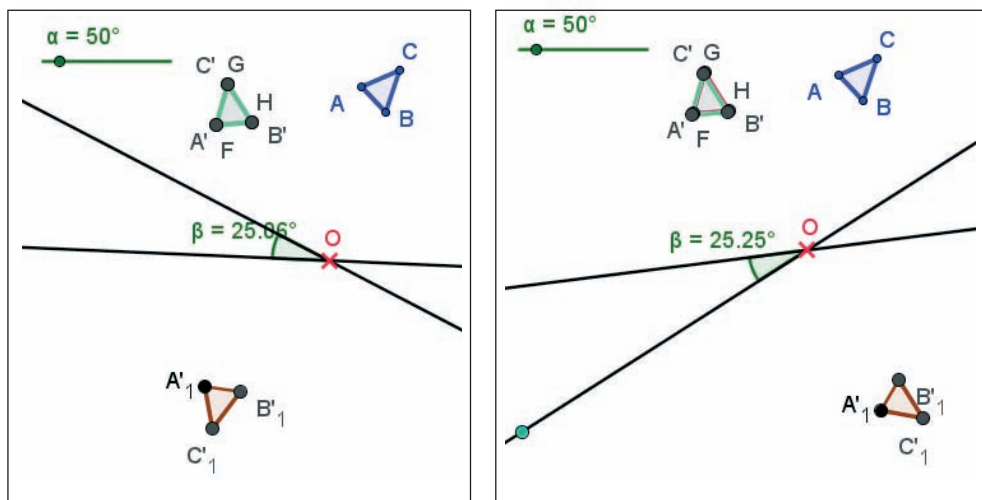
Фиг. 16. Ротация и произведение на две осев симетрии

Дали това е единствената възможност за представяне на ротацията като произведение на две осев симетрии, т.е. съществува ли друго разположение на правите a и b , при което $\triangle A'B'C'$ и $\triangle HJI$ ще съвпадат?



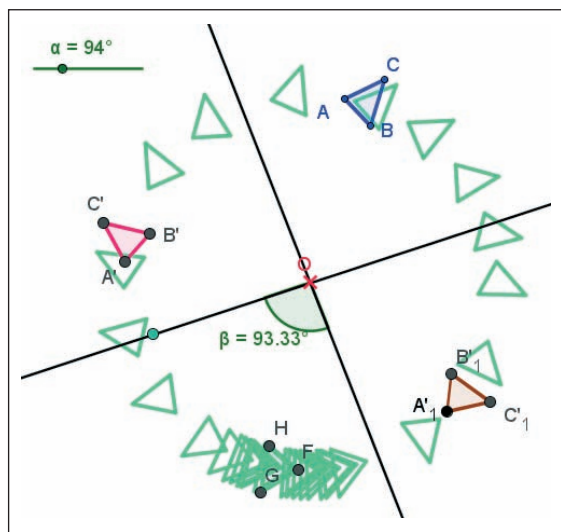
Фиг. 17. Ротацията като произведение на две осев симетрии

Забелязваме, че и в двата намерени случая правите a и b се пресичат в центъра на ротацията O . Затова за удобство правим нова конструкция, при която правите a и b минават през центъра на ротацията (фиг. 18). Изследването вече не само се опростява.



Фиг. 18. Съвпадане на пресечната точка на двете оси на симетрии с центъра на ротацията

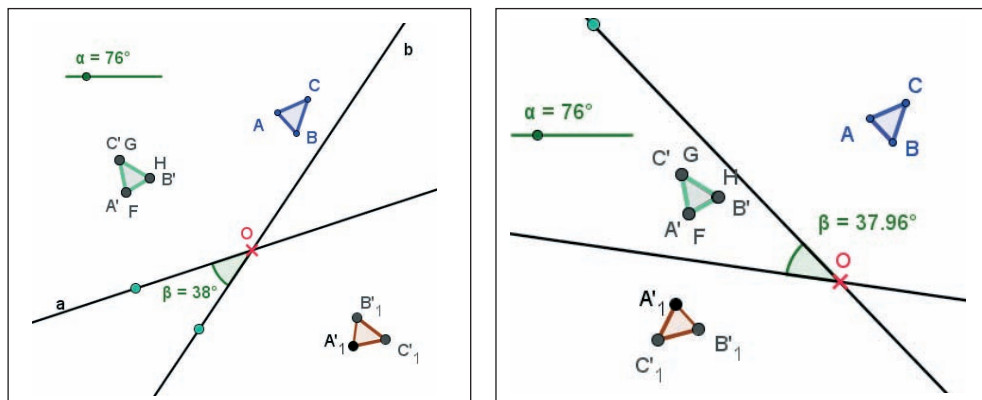
При конкретна позиция на правата a , при движението на b забелязваме, че всъщност триъгълникът „се върти“ около O . Като използваме възможността за оставяне на *следа* при движение на обект, илюстрираме различни положения на ΔFHG (в новата конструкция това е образът на $\Delta A_1'B_1'C_1'$ при осева симетрия с ос b), при фиксирана права a и променяща се права b (фиг. 19).



Фиг. 19. Образи при фиксиране на едната ос на симетрия и промяна на втората ос

Всъщност тази конструкция дава идея и за доказателството на издигнатата хипотеза: *ротацията може да се представи като произведение на две осеви симетрии*.

Преди да се премине към доказателство, е добре да се направи проверка и при други ъгли на ротацията, за да засилим интуитивното си убеждение за верността на хипотезата (фиг. 20). Или пък да я отхвърлим, ако получим контрапример. В такива случаи може да се провери дали за някои частни случаи е изпълнена и направи нова хипотеза ..., но нашият случай не е такъв. Тъй като сме използвали параметър (чрез плъзгач) за този ъгъл, тази проверка се свежда до промяна на ъгъла чрез плъзгача.



Фиг. 20. Проверка на хипотезата при друг ъгъл на ротация

Освен това си струва да продължи търсенето на закономерности чрез динамичната конструкция, защото едва ли е случайна връзката между осите a и b на двете осеви симетрии. Да проверим има ли някаква закономерност между двете оси на симетрия. За целта проследяваме ъгъла между двете прави, когато $\triangle A'B'C'$ и $\triangle FHG$ съвпадат. Забелязваме, че този ъгъл е два пъти по-малък от ъгъла на ротацията. Добре е да насочим вниманието на учениците не само към математическото съдържание, а към процеса на изследване, към създаването на специални условия, към онова, което остава постоянно при промяна на някои от параметрите на обектите, към формулирането на хипотеза и необходимостта от строгото ѝ доказателство.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нашият досегашен опит с хора на различна възраст (ученици, студенти, практикуващи учители и преквалифициращи се висшисти) показва, че ако ориентираме учебния процес към различни интелигентности (в смисъла на Гарднър), ефектът от ученето се засилва както по отношение на разбирането на материята, така и по отношение на удоволствието от работата. Да третираме технологиите като средство за себеизразяване, а не само като обект на изучаване, е друга важна компонента от нашата образователна стратегия. Надяваме се, че по този начин сме мотивирали и ще мотивираме и в бъдеще учениците си

да постигнат неща, за които не са подозирали, че са способни.

Накрая да завършим с няколко прекрасни мисли на наши курсисти:

Не е възможно да „почувстваш“ информатиката, музиката, поезията, изкуството, дори танца, да не говорим за мечтите, ако те са в изолация...

*За да направиш прерия,
са нужни пчела и детелина.
Пчела и детелина, и една мечта голяма.*

*Дори мечтата само стига,
ако пчела и детелина няма.*

БЛАГОДАРНОСТ

Изразяваме благодарността си на европейския проект *InnoMathEd* за финансовото осигуряване на работата по създаване на учебни среди и провеждането на семинари с учители. Благодарим сърдечно и на учениците и учителите, показали разнообразни интелигентности и еднакъв ентузиазъм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кендеров, П. Иновации в математическото образование: европейските проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci*. Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39. пролетна конференция на СМБ, 2010.
2. Гълъбова, Д., М. Бейков. Интерактивни образователни технологии за стимулиране на критическо мислене при изучаване на „Еднаквости“ (8. клас). – Математика и информатика, бр. 4, 2009.
3. Гълъбова, Д., М. Бейков. Интерактивни образователни технологии за стимулиране на критическото мислене при изучаване на „Еднаквости“ (8. клас) (II част). – Математика и информатика, бр. 5, 2009.
4. Gardner, H. (1993) Multiple intelligences. The theory in practice. Basic Books, New York. 304 p.
5. The National Library of Virtual Manipulatives, <http://nlvm.usu.edu/>
6. GEONExT, <http://geonext.uni-bayreuth.de/>
7. GeoGebra, <http://www.geogebra.org/cms/>
8. Elica, <http://www.elica.net/site/index.html>
9. Паракозова, Б., Е. Сендова. Когато да бъдеш изключителен не е изключение. (интервю на отличници от УЧИМИ за RSI 2010). – Математика и информатика, бр. 1, 2010.
10. Hart, V. Symmetry and Transformations in the Musical Plane. (12. 2009) in Proceedings of the 12th Annual BRIDGES Conference: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture (BRIDGES 2009), Banff, Canada, July 2009, to appear <http://vihart.com/papers/symmetry/>
11. Сендова, Е. Може ли компютърът да композира музика? – Математика и информатика, бр. 1, 2001, с. 10-30.
12. Sendova, E. (2001) Modelling Creative processes in Abstract Art and Music, Eurologo 2001, Proceedings of the 8 th European Logo Conference 21-25 August, Linz, Austria.
13. Freytag, G. (1863) (in German). Die Technik des Dramas.
14. http://troymica.com/en/about_us.html
15. Чехларова, Т., Д. Димкова, Е. Сендова. Достатъчни ли са пет дни? А пет часа? – Математика и информатика, бр. 3, 2010.
16. Harrison, D. <http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Parity/FaceStudy/FaceStudy.html>
17. Сендова, Е. Да разчупим традицията с малко хаос (някои нестандартни за училището теми по информатика и математика, които са без праг и без таван), Математика и математическо образование, Сборник доклади от Тридесет и първата пролетна конференция на СМБ, Боровец, 3-6 април, 2002.
18. Димкова, Д., Е. Сендова. За най-новото (без да забравяме и малко по-старото) в математическото образование. – Математика и информатика, бр. 1, 2010, с. 3-14.
19. Чехларова, Т. Експерименти с композиции от еднаквости в 8. клас. В: Сборник доклади „Синергетика и рефлексия в обучението по математика“, Бачиново, 2010.