

ВЪЗДУШНИ СЛЕДОТЪРСАЧИ С GEOGEBRA

(Математическа приказка за падащата стълба)

ТОНИ ЧЕХЛАРОВА, ДЕСИСЛАВА ДИМКОВА, ЕВГЕНИЯ СЕНДОВА, София

В рамките на проекта *Fibonacci*, една от основните цели на който е да се изгради изследователски стил у учениците в часовете по математика с помощта на динамичен софтуер [1-4], често ни се налага да демонстрираме потенциала на конкретна компютърна среда за такъв тип работа. Представяме на читателите примерен сценарий в изследователски дух в динамичната среда *GeoGebra* върху популярната задача за падащата стълба. Една забавна формулировка изглежда така:

Крадец стигнал точно до средата на стълбата, по която се опитвал да стигне до прозорец на апартамент, когато тя започнала да се плъзга по стената и накрая паднала (заедно с крадеца). Случаен минувач (с математическа мисъл) успял да види кривата, описана от светещото фенерчето в ръката на крадеца, и да разбере какво става, въпреки тъмнината. Какво е видял той?

Да направим модел на ситуацията с помощта на *GeoGebra*.

Първи опит

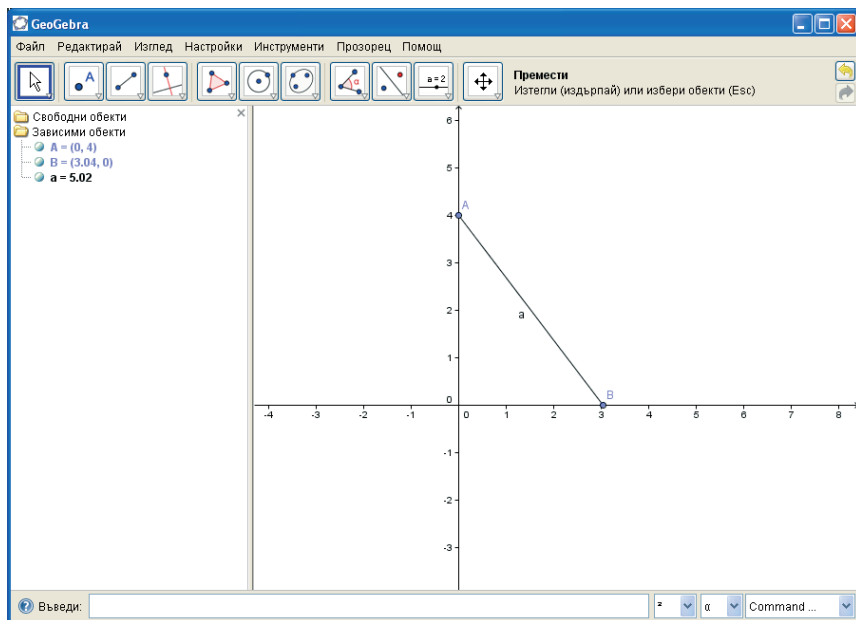
Построяваме точка A върху ординатната ос и точка B върху абсцисната (на-



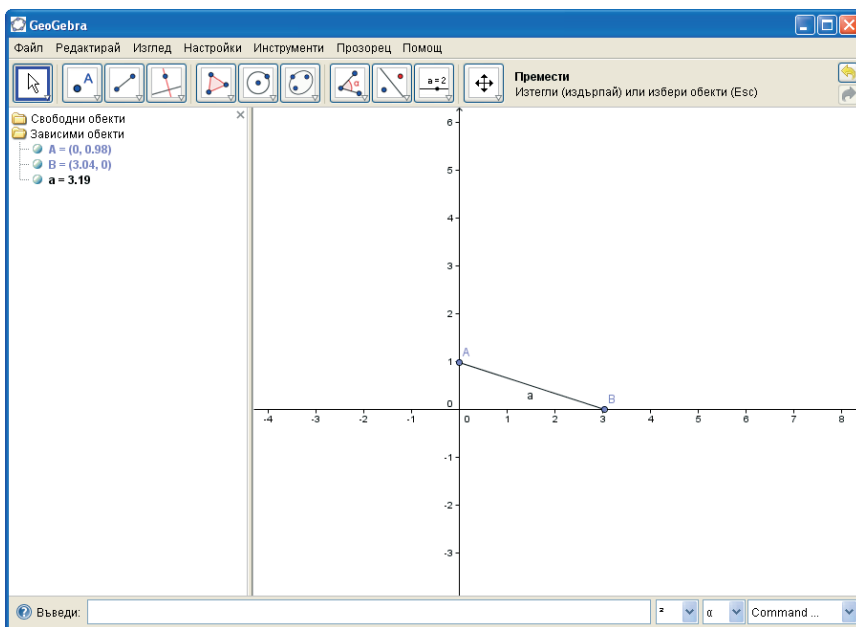
пример като щракнем последователно върху бутона  и координатните оси – имената се появяват автоматично). Сега можем да ги свържем с отсечка



и като че ли нашата стълба е готова.



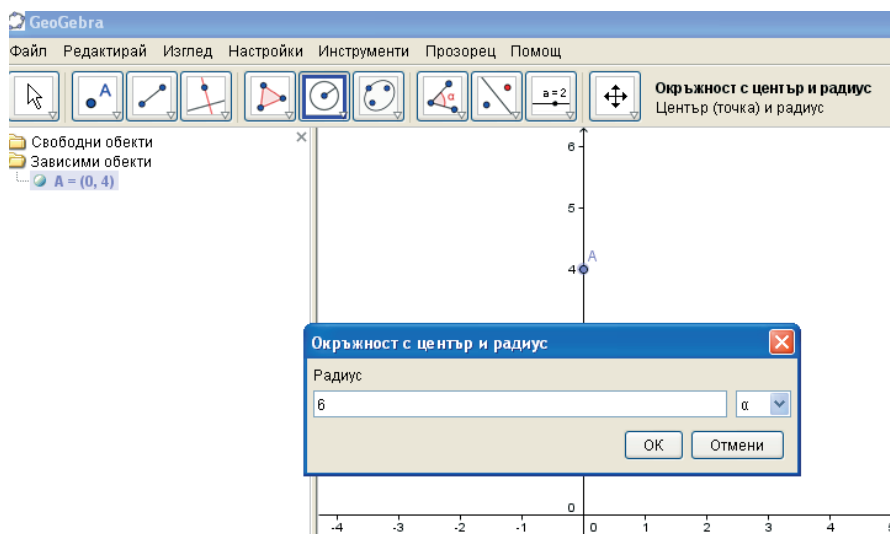
Да раздвижим точката A надолу, имитирайки падането.



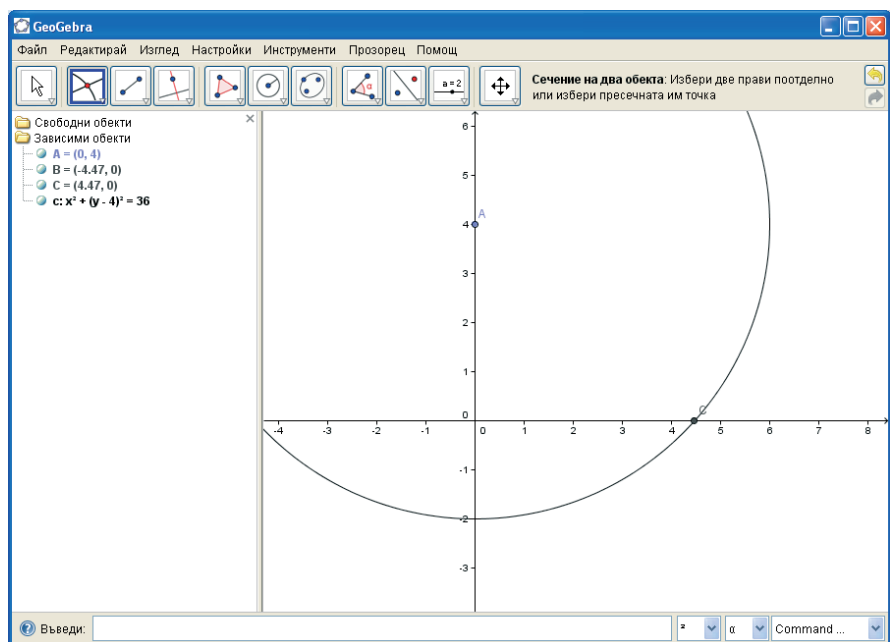
Стилбата нещо взе да се скъсява... Нищо чудно, всяка от точките е избрана да се движи по координатните оси, но по никакъв начин не сме поискали да са на фиксирано разстояние – дължината на стилбата. Почваме отново. Или можем да се върнем назад неколкократно с бутона , като оставим само точката A .

Втори опит

Нека определим дължината на стълбата, например 6. Сега ще прекараме окръжност с център A и радиус 6:

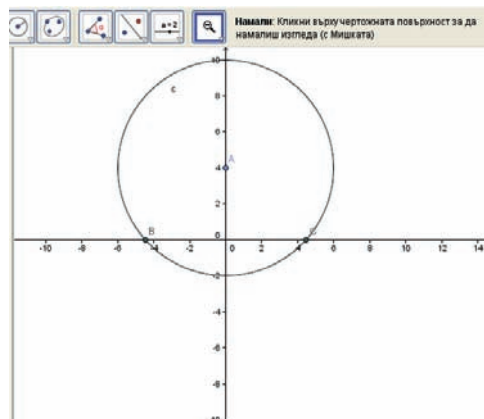
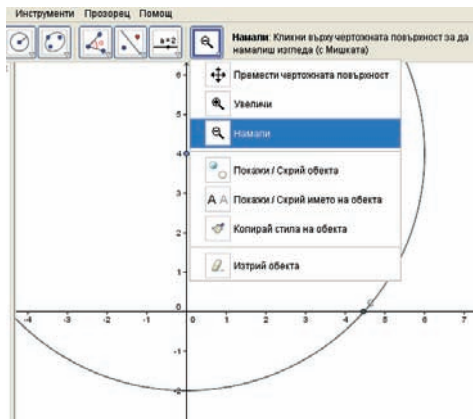


Вече можем да определим втория край на стълбата като пресечна точка на окръжността и абсцисната ос (използваме бутона  и щракаме последователно върху двата обекта):

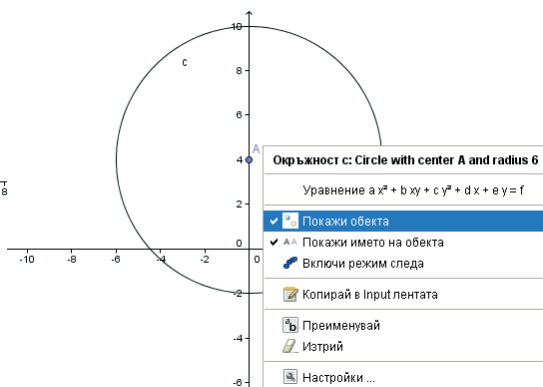
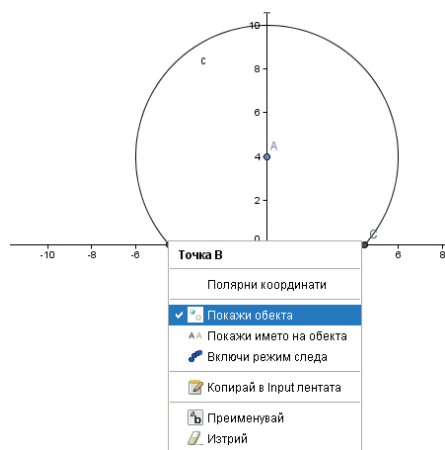


Долният край на стълбата сега е означена с C . А къде ли е B ? За да видим

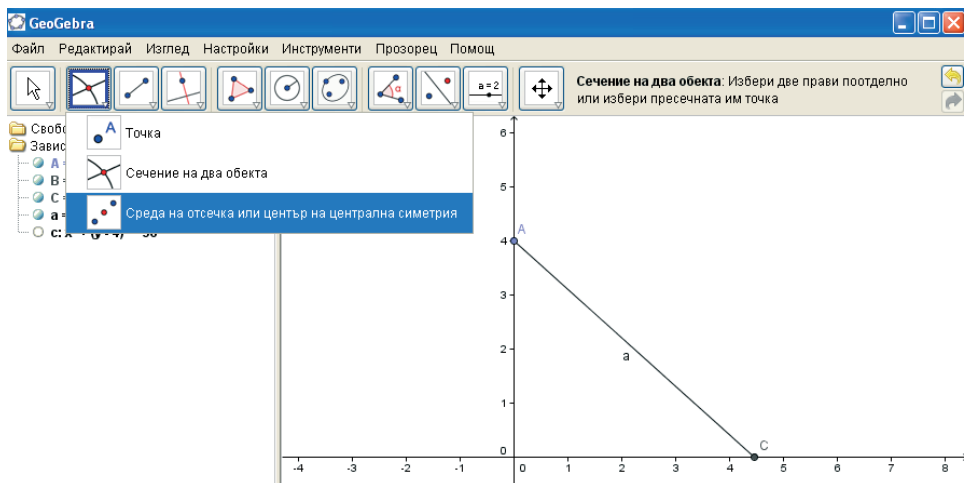
по-добре, можем да **преместим чертожната повърхност** с бутон , както и да намалим мащаба на изображението (чрез щракване върху чертожното поле с десен бутон се появява необходимият прозорец).



Разбира се – точката B е другата пресечна точка. Тя не ни трябва и можем да я скрием (щракваме с десен бутон върху нея и премахваме отметката пред **Покажи обекта**), аналогично за окръжността:



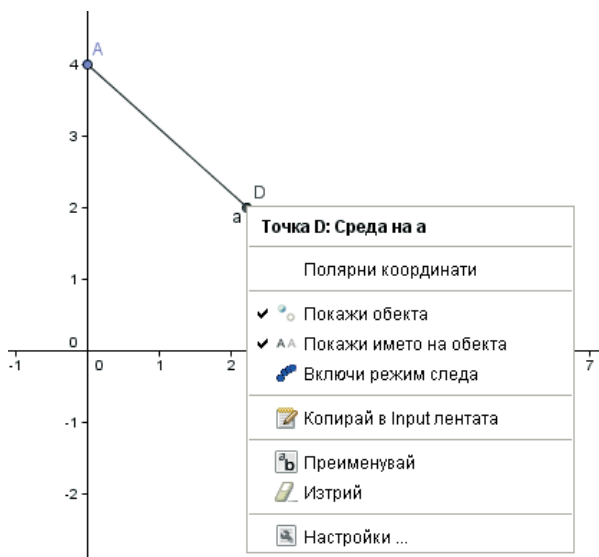
Свързваме точките A и C с отсечка, но този път, когато движим A , точката C също се движи, защото е дефинирана като точка върху ординатата на разстояние 6 единици от A .



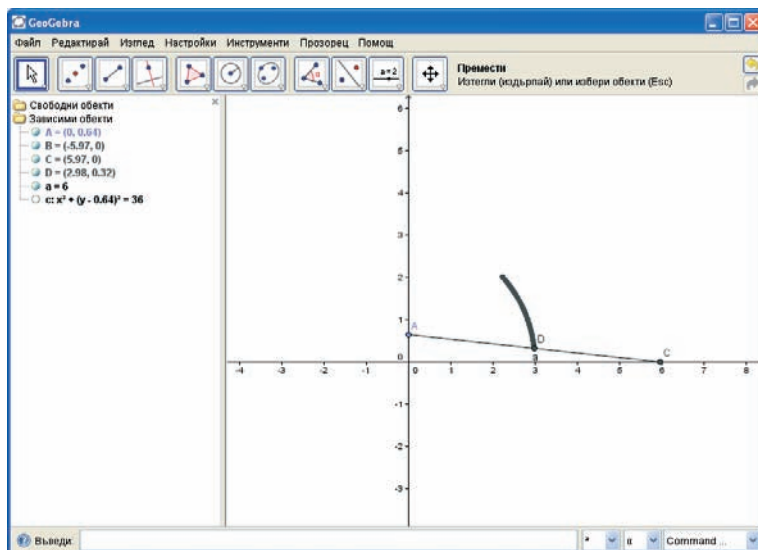
Сега да построим средата на тази отсечка със съответния бутон, който откриваме в падащото меню на бутона **точка**. Посочваме **бутона за движение**



и почваме да движим с мишката точката **A**. Можем да отправим първото предизвикателство към учениците – мислено да си представят каква следа би оставила средата на стълбата при падането. А сега да проверим как изглежда тази следа. Щракваме с десен бутон върху точката и избираме **Включи режим следа**:



Ето как изглежда следата малко преди стълбата окончателно да падне.



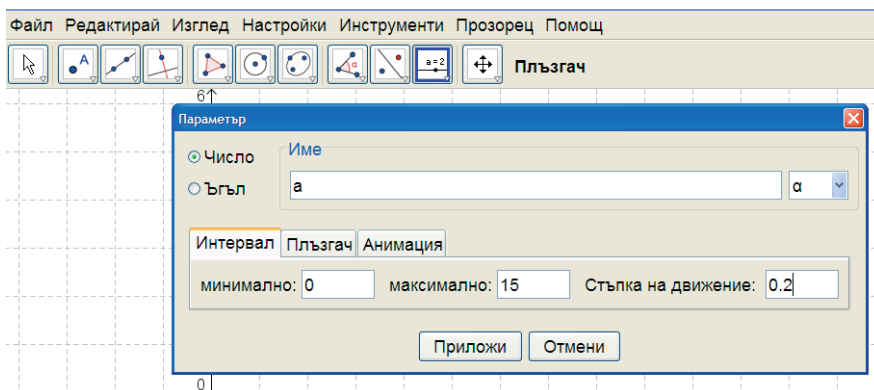
Всички ученици обичат числото 6. Но дали тук беше важно, че го избрахме за дължина на стълбата? Хайде да направим малко по-професионален опит.

Трети опит

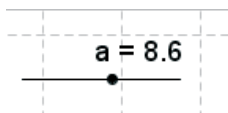
Ще създадем конструкцията като при втория опит, но за дължина на стълбата ще използваме параметър.



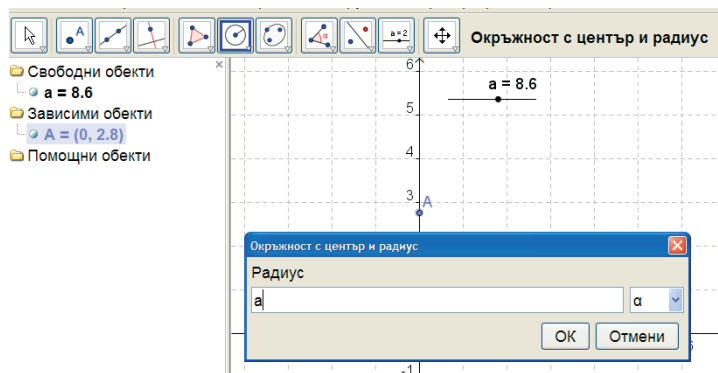
С бутон *плъзгач* създаваме параметър **a**.



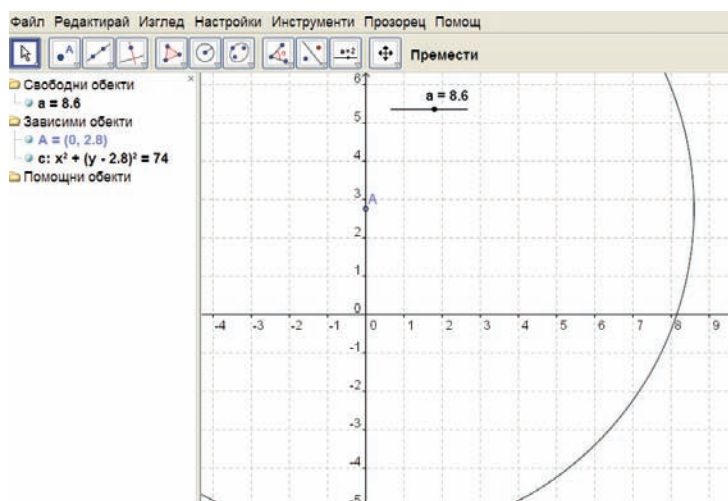
Даваме примерни стойности на параметъра от 0 до 15 и стъпка на движение 0,2, като имаме предвид, че можем да променяме тези стойности и след създаване на конструкцията.



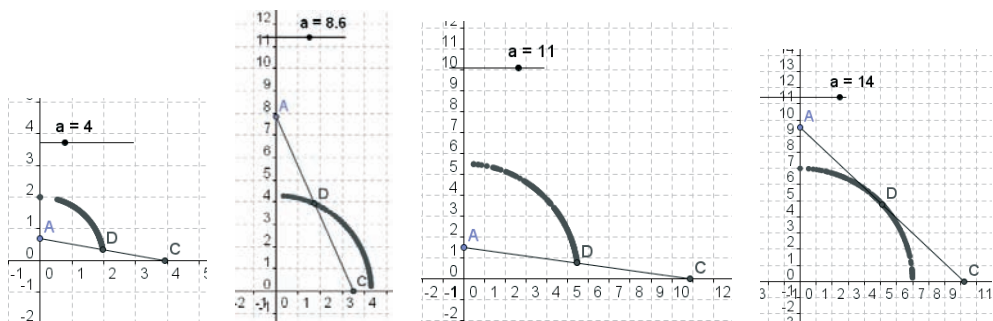
Построяваме окръжност с център точката A и радиус a .



Ето окръжността за текущата стойност на a :



Оттук нататък действаме както преди и наблюдаваме следата на средата D на отсечката AC за различни нейни дължини:



Сега можем да прикажем учениците да влязат в ролята на изследователи:

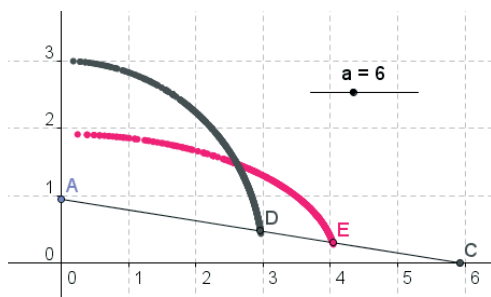
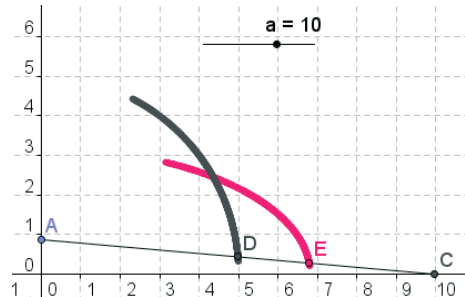
Каква е тази крива – проверете предположението си и се опитайте да го докажете.

Важно ли е, че точката е среда на отсечката? Експериментирайте с други вътрешни за отсечката точки и направете хипотеза.

Важно ли е, че точката е външна за отсечката? Изберете точка върху правата AC , външна за отсечката и експериментирайте. Направете хипотеза.

Триъгълник OAC (точка O е началото на координатната система) е правоъгълен с хипотенуза $AC = a$ и следователно медианата му $OD = 0,5a$. Така, независимо от положението на стълбата, OD е с постоянна дължина, равна на половината от дължината на стълбата. Затова кривата, описана от светещото фенерче в ръката на крадеца, е част от окръжност.

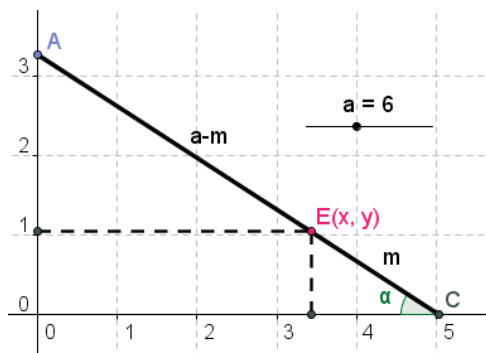
Ето следата и на друга точка E от отсечката AC (т.е., не на средата ѝ):



Ако $E(x; y)$, $\angle OCE = \alpha$ и $CE = m$, то

$$\begin{cases} \frac{x}{a-m} = \cos \alpha \\ \frac{y}{m} = \sin \alpha \end{cases},$$

$\left(\frac{x}{a-m}\right)^2 + \left(\frac{y}{m}\right)^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$, т.е. $\left(\frac{x}{a-m}\right)^2 + \left(\frac{y}{m}\right)^2 = 1$, което е уравнение на елипса.



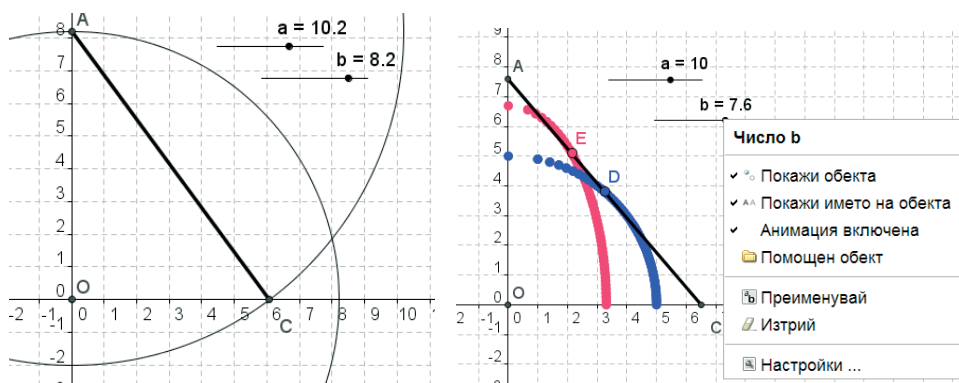
Не на всички въпроси ще можете да отговорите в момента със строго доказателство, но модифицирането на началните условия и формулирането на нови

задачи е изключително важно умение в математиката. И според великият математик Кантор е даже по-важно от умението да се решават задачи.

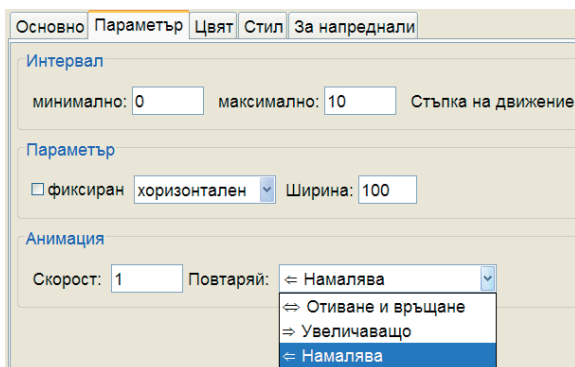
Ако искаме да онагледим пред учениците движението на стълбата още по-атрактивно, можем да използваме плъзгач в режим *анимация*. Ще анимираме движението чрез плъзгач. Затова не избираме точка A произволно върху ординатната ос, а използваме параметър – например b , който ще е равен на ординатата на A . Започваме

Четвърти опит

Използваме два плъзгача – a за дължина на стълбата и b – за ординатата на точка A . Построяваме последователно окръжност с център O и радиус b , пресечната ѝ точка A с положителната част на ординатната ос (при необходимост преименуваме точки, за да отговарят на използваните досега обекти); окръжност с център A и радиус a , както и пресечната ѝ точка с положителната част на абсцисната ос (точка C). Скриваме окръжностите, построяваме средата D и произволна точка E от отсечката AC , които са в режим *следа*.



Сега, при включване на плъзгач b в режим *анимация*, можем да наблюдаваме падането на стълбата (и качването ѝ, защото все още не сме задали в настройките на плъзгача повторението да е в режим *намалява*).



Проверяваме за различни дължини на стълбата и както очакваме, в някои случаи стълбата не може да заема вертикално положение. Причината е в интервалите на изменение на параметрите a и b – не можем в стойностите на плъзгача да използваме параметър, защото се помни само последната му стойност.

В опит да избегнем този проблем минаваме към

Пети опит

Параметър

☐ Число ☒ Ъгъл

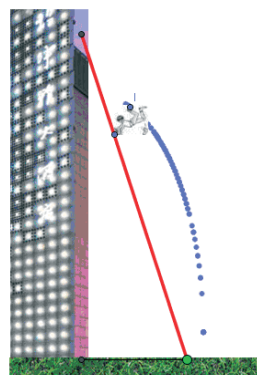
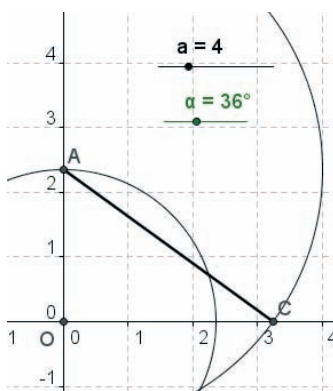
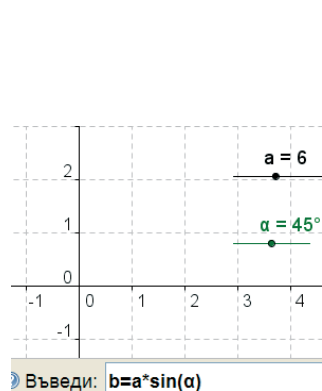
Име:

Интервал: Слъп

Ще въведем като параметър α ъгъл OCA при основата на правоъгълния триъгълник и ще представим ординатата на A като $a \sin \alpha$.

Построяваме два плъзгача, a – за дължината на стълбата и α – за ъгъла при основата. Сега ще изразим параметъра b чрез α .

В полето **Въведи** записваме $b = a \cdot \sin(\alpha)$ и натискаме **Enter**. Построяваме окръжност с център O и радиус b и продължаваме като в четвърти опит.



Пробваме конструкцията при различни дължини на стълбата и се радваме на получения резултат. Разбира се, можем да поработим върху дизайна. Отваряме Google и търсим подходящи картинки за трева, стена, крадеца и фенерчето му. С бутон **вмъкни картинка**  можем да ги поставим в чертожното поле, но действията с тях са друга тема.

Да отбележим, че при нашия модел осъществихме движението на падащата стълба, като премествахме горния ѝ край надолу по *стената*. Аналогични ще бъдат разсъжденията, ако осъществим падането чрез движение на долния край на стълбата по *тревата*.

С тази класическа задача се надяваме, че за пореден път читателите ни ще се убедят във възможностите на динамичния софтуер за изграждане на уме-

ния, свързани с формулиране на хипотези, с преминаване от интересни частни случаи към обобщения, и не на последно място – с подходящо представяне на проблемната ситуация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кендеров, П. Иновации в математическото образование: европейските проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci*. Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39. пролетна конференция на СМБ, 2010.

2. Чехларова, Т., Д. Димкова, Е. Сендова. Достатъчни ли са пет дни? А пет часа? – Математика и информатика, бр. 3, 2010, с. 3-10.

3. Чехларова, Т., Е. Сендова. Разнообразие в еднаквостите. – Математика и информатика, бр. 4, 2010, с. 3-14.

4. Сендова, Е., Т. Чехларова. Да съживим изследователския подход в математическото образование (*проектът Фибоначи в действие*). – Математика и информатика, бр. 5, 2010. с. 3-11.

КОНКУРС

Във връзка с изпълнение на поетите ангажименти по линия на Европейски проект FIBONACCI (<http://fibonacci.uni-bayreuth.de/>), българският екип на проекта обявява конкурс за учебни материали, разработени от учители, на тема:

***Изследователски подход в образованието по математика
чрез използване на софтуер за динамични конструкции.***

Предложенията (отделни уроци, серия от материали на определена тема, учебни помагала и др. подобни) могат да бъдат разработени самостоятелно или в съавторство (включително и с ученици). Целта е да се поощри изследователското начало при обучението по математика като се наблегне върху използването от страна на учители и ученици на софтуерни среди като GeoGebra, GEONExT, LOGO, ELICA, CABRI и др.

В проекта са предвидени финансови средства за поемане на разходите на най-успешните разработки – до 10 учители – за участие в двудневен семинар на същата тема, който ще се проведе в рамките на 40. пролетна конференция на СМБ от 5. до 9. април 2011 г. в Боровец.

При оценяването на разработките ще бъдат взети под внимание степената на оригиналност и приложимост. Предимство ще имат разработки, изпробвани в реална учебна среда (в клас или при извънкласни дейности) и/или представени пред колеги.

Предложенията за конкурса следва да бъдат изпратени (на хартиен и електронен носител с име и пълен адрес на подателя (включително e-mail) до 15.01.2011 г. на адрес:

Институт по математика и информатика при БАН

За конкурс FIBONACCI

ул. „Акад. Георги Бончев“, бл. 8

1113, София

Разработките ще бъдат оценени от членовете на екипа на проект FIBONACCI.

Резултатите ще бъдат обявени до 15.02.2011 г. на сайта на секция ОМИ към ИМИ-БАН <http://www.math.bas.bg/omi/InnoMathEd>