

Provided for non-commercial research and educational use. Not for reproduction, distribution or commercial use.
--

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О СЕЧЕНИЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

М. М. ЧОБАН

Работа посвящена проблеме существования непрерывных и близких к непрерывным сечений. Доказывается, что σ -дискретные множества не влияют на качественные стороны сечений отображения. Полученные результаты применяются к поведению размерности и борелевских классов при изолированных отображениях. В частности, решаются одна задача П. С. Александрова и одна задача А. Д. Тайманова.

Работа посвящена проблеме существования сечений для многозначных отображений. Эта проблема содержит как частные случаи и следующие задачи:

а⁰. Задача о продолжении отображений.

б⁰. Задача об униформизации множеств в смысле Н. Н. Лузина.

в⁰. Задача о существовании явного решения неявных функций.

Благодаря этому факту, теория многозначных отображений находит все новые и новые приложения, далеко выходящие за рамки абстрактной топологии. В случае задачи а⁰ важную роль играют только непрерывные сечения, а при решении задач б⁰ и в⁰ большое значение имеют и измеримые сечения.

В данной работе доказываются только теоремы о существовании непрерывных или близких к непрерывным (σ -непрерывные) сечений. Теория существования непрерывных сечений наиболее богата результатами для случая полунепрерывных снизу отображений. Это объясняется следующими фактами:

1⁰. Метод покрытий для построения сечений показывает, что каждое сечение связано с последовательностью покрытий. Чем эти покрытия „мельче“, тем и сечение „мельче“. Полунепрерывные снизу отображения связаны с последовательностью открытых покрытий, а в последних при определенных ограничениях „типа компактности“ можно вписать „хорошие“ покрытия, а затем строить „хорошее“ сечение.

2⁰. Среди полунепрерывных снизу отображений фактически не бывает отображений, обратных к неприводимым, за исключением случая, когда они являются однозначными.

3⁰. Если для отображения обратного к однозначному существует полунепрерывное снизу сечение, то заданное однозначное отображение индуктивно открыто.

4⁰. Среди полунепрерывных сверху многозначных отображений имеются отображения, обратные к неприводимым, а для них не существует нетривиальное полунепрерывное сверху или полунепрерывное снизу сечение.

Основные результаты данной работы были аносированы в [25].

Теоремы о сечениях применяются к поведению размерности и классов борелевских множеств при изолированных отображениях. Полученные здесь

результаты решают задачу П. С. Александрова о размерности множества $N = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \text{ несчетно}\}$ для замкнутого отображения $f: X \rightarrow Y$ счетномерного пространства X на несчетномерное пространство Y , а также задачу А. Д. Тайманова о сохранении классов борелевских множеств в классе замкнутых счетнократных отображений.

Несколько замечаний о терминологии и обозначениях.

1. Пространство следует считать регулярным, если точно не названа аксиома отделимости.

2. Если A — семейство, а γ — семейство подмножеств, то $\gamma(A) = \bigcup \{L \in \gamma \mid L \cap A \neq \emptyset\}$.

3. Пространство X является пространством с G_δ -диагональю, если $\mathcal{A}(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ есть G_δ -множество пространства $X \times X$. В этом случае существует счетное семейство $\{\gamma_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ открытых покрытий пространства X таких, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x) = \{x\}$ для любой точки $x \in X$.

4. Через $\mathcal{A}(X)$ будем обозначать совокупность всех непустых подмножеств пространства X , $\mathcal{F}(X) = \{L \in \mathcal{A}(X) \mid L \text{ замкнуто в } X\}$, а через $C(X)$ — совокупность непустых бикомпактных подмножеств.

5. Однозначное отображение $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ называется многозначным отображением пространства X в Y . Отображение θ полунепрерывно снизу (сверху), если для каждого открытого (замкнутого) в Y множества L множество $\theta^{-1}L = \{x \in X \mid \theta(x) \cap L \neq \emptyset\}$ открыто (замкнуто) в X .

5. Выражение $\theta: E \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ означает, что множества $\theta(x)$ замкнуты в Y , а выражение $\theta: X \rightarrow C(Y)$ — что $\theta(x)$ суть бикомпактные множества.

7. Выражение $f: X \rightarrow Y$ используется только для обозначения однозначных отображений.

8. Отображение $\varphi: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ является сечением для $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$, если $\varphi(x) \subseteq \theta(x)$ для всех $x \in X$.

1. Построение сечений методом покрытий. Пусть дано многозначное отображение $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ пространства X в метрическое пространство (Y, ρ) , семейство покрытий $\gamma = \{\gamma_n = \{H_\alpha^n \mid \alpha \in A_n\} \mid n = 1, 2, \dots\}$ пространства X , семейство открытых систем $\omega = \{\omega_n = \{U_\alpha^n \mid \alpha \in X_n\}\}$ пространства Y и однозначные отображения $\pi = \{\pi_n: A_{n+1} \rightarrow A_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ такие, что для любого числа n и каждого элемента $\alpha \in A_n$ имеем:

$$\text{I. } [H_\alpha^n] \subseteq \theta^{-1}U_\alpha^n \text{ и } \text{diam } U_\alpha^n < 2^{-n}.$$

$$\text{II. } H_\alpha^n = \bigcup \{H_\beta^{n+1} \mid \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)\}.$$

$$\text{III. } U_\alpha^n \supseteq \bigcup \{[U_\beta^{n+1}] \mid \beta \in \pi_n^{-1}(\alpha)\}.$$

Последовательность $\alpha = \{\alpha_n \in A_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ называется спектральной, если $\pi_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$.

IV. Для каждой спектральной последовательности $\alpha = \{\alpha_n \in A_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ множество $D(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n}^n$ не пусто. (Если (Y, ρ) — полное метрическое пространство, то условие IV вытекает из условий I и III.)

В этих условиях каноническим образом строятся многозначные отображения $\varphi = \varphi(\gamma, \omega, \pi): X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ и $\psi = \psi(\gamma, \omega, \pi): X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$, где $\varphi(x) = \bigcup \{D(\alpha) \mid x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}^n\}$, $\alpha = \{\alpha_n \in A_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ — спектральная последовательность, $\psi(x) = \bigcup \{D(\alpha) \mid x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [H_{\alpha_n}^n]\}$, $\alpha = \{\alpha_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ — спектральная последовательность.

Установим свойства отображений φ и ψ .

Свойство 1. Множество $D(\alpha)$ одноточечно для каждой спектральной последовательности $\alpha = \{\alpha_n \in A_n \mid n=1, 2, \dots\}$. Семейство $\{U_{\alpha_n}^n \mid n=1, 2, \dots\}$ есть база в точке $y = D(\alpha)$.

Доказательство. Вытекает из условий I и IV.

Свойство 2. $\varphi(x) \subseteq \psi(x) \subseteq [\theta(x)]$ для каждой точки $x \in X$.

Доказательство. Если $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}^n$, то $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}^n$. Отсюда вытекает включение $\varphi(x) \subseteq \psi(x)$. Пусть $y \in \psi(x)$. Тогда, в силу свойства I и определения отображения ψ , существует спектральная последовательность $\alpha = \{\alpha_n \in A_n \mid n=1, 2, \dots\}$, для которой $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [H_{\alpha_n}^n]$ и $y = D(\alpha)$. Так как $x \in [H_{\alpha_n}^n] \subseteq \theta^{-1}U_{\alpha_n}^n$, то $\theta(x) \cap U_{\alpha_n}^n \neq \emptyset$ для всех $n=1, 2, \dots$. Поэтому все элементы базы $\{U_{\alpha_n}^n \mid n=1, 2, \dots\}$ точки y пересекают множество $\theta(x)$. Следовательно, $y \in [\theta(x)]$. Итак, $\psi(x) \subseteq [\theta(x)]$. Свойство доказано.

Свойство 3. Положим $A_n(x) = \{\alpha \in A_n \mid x \in [H_{\alpha}^n]\}$ и $A'_n(x) = \{\alpha' \in A_n \mid x \in [H_{\alpha'}^n]\}$. Множества A_n наделим дискретной топологией. Тогда $\varphi(x)$ есть непрерывный образ пространства $A(x) = \varprojlim \{A_n(x) \mid \pi_k^m = \pi_k \circ \pi_{k+1} \circ \dots \circ \pi_{m-1}\}$, а $\psi(x)$ является непрерывным образом пространства $A'(x) = \varprojlim \{A'_n(x) \mid \pi_k^m\}$.

Доказательство. Докажем, что $\varphi(x)$ есть непрерывный образ пространства $A(x)$. Пространство $A(x)$ состоит из всех спектральных последовательностей $\alpha = \{\alpha_n \mid n=1, 2, \dots\}$, для которых $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}^n$. Пространство $A(x)$ метризуемо метрикой $d(\alpha, \alpha') = \sum \{2^{-n} \mid \text{по всем } n, \text{ для которых } \alpha_n \neq \alpha'_n\}$ и $\alpha = \{\alpha'_n\}$, $\alpha' = \{\alpha'_n\}$ — спектральные последовательности. Если $d(\alpha, \alpha') < 2^{-n}$, то $\alpha_i = \alpha'_i$ для всех $i=1, 2, \dots, n$. Строим отображение $f: A(x) \rightarrow \varphi(x)$, где $f(\alpha) = D(\alpha)$ для каждой точки $\alpha \in A(x)$. Очевидно, что f есть отображение на $\varphi(x)$. Если $d(\alpha, \alpha') < 2^{-n}$ для спектральных последовательностей $\alpha = \{\alpha_n\}$ и $\alpha' = \{\alpha'_n\}$, то $\alpha_n = \alpha'_n$, а, следовательно, $\{D(\alpha), D(\alpha')\} \subseteq U_{\alpha_n}^n = U_{\alpha'_n}^n$, то есть $\varrho(D(\alpha), D(\alpha')) = \varrho(f(\alpha), f(\alpha')) < 2^{-n}$. Значит, отображение f равномерно непрерывно. Так же доказывается, что пространство $A'(x)$ равномерно отображается на $\psi(x)$. Свойство доказано.

Свойство 4. Если покрытия $\gamma = \{\gamma_n \mid n=1, 2, \dots\}$ точно конечны, то $\varphi(x)$ есть компакт для каждой точки $x \in X$.

Доказательство. В этом случае множества $A_n(x)$ конечны. Тогда пространство $A(x) = \varprojlim \{A_n(x) \mid \pi_n^m\}$ есть компакт. Значит, $\varphi(x)$ есть компакт, как непрерывный образ компакта.

Свойство 5. $\varphi^{-1}U_{\beta}^m \supseteq H_{\beta}^m$ и $\psi^{-1}U_{\beta}^m \supseteq [H_{\beta}^m]$ для любых $\beta \in A_m$ и $m=1, 2, \dots$

Доказательство. Пусть $x \in H_{\beta}^m$. Тогда существует спектральная последовательность $\alpha = \{\alpha_n \mid n=1, 2, \dots\}$, для которой $\alpha_m = \beta$ и $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}^n$. В этом случае $D(\alpha) \in U_{\beta}^m$, то есть $\varphi(x) \cap U_{\beta}^m \neq \emptyset$. Значит, $H_{\beta}^m \subseteq \varphi^{-1}U_{\beta}^m$.

Аналогично доказывается и включение $[H_{\beta}^m] \subseteq \psi^{-1}U_{\beta}^m$.

Свойство 6. Если покрытия $\gamma = \{\gamma_n \mid n=1, 2, \dots\}$ открыты, то отображение φ полунепрерывно снизу.

Доказательство. Пусть U — открытое в Y множество. Фиксируем точку $x \in \varphi^{-1}U$. Найдется спектральная последовательность $\alpha = \{\alpha_n \mid n=1, 2, \dots\}$, для которой $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}^n$ и $D(\alpha) \in \varphi(x) \cap U$. Найдется такой номер m , что

$U_{\alpha_m}^m \subseteq U$. Тогда $x \in H_{\alpha_m}^m \subseteq \varphi^{-1}U_{\alpha_m}^m \subseteq \varphi^{-1}U$. Так как множества H_{β}^m открыты, то для каждой точки $x \in \varphi^{-1}U$ найдется окрестность $Ox \subseteq \varphi^{-1}U$. Итак, множество $\varphi^{-1}U$ открыто. Следовательно, отображение φ полунепрерывно снизу.

Свойство 7. Если покрытия $\gamma = \{\gamma_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ дизъюнкты, то отображение φ однозначное.

Доказательство. Если $x \in X$, то существует единственная спектральная последовательность $\alpha = \{\alpha_n \mid n = 1, 2, \dots\}$, для которой $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n}$. Поэтому $\varphi(x)$ состоит из единственной точки $D(\alpha)$.

Свойство 8. Если покрытия $\gamma = \{\gamma_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ локально конечны, то ψ есть полунепрерывное сверху отображение с компактными образами $\psi(x)$.

Доказательство. В этом случае покрытия $\bar{\gamma} = \{\bar{\gamma}_n = \{H_{\alpha}^n \mid \alpha \in A_n\}\}$ локально конечны. Так как $\psi(\gamma, \omega, \pi) = \varphi(\bar{\gamma}, \omega, \pi)$, то, в силу свойства 4, множества $\psi(x)$ — суть компакты. Докажем, что отображение ψ полунепрерывно сверху. Пусть F — замкнутое в Y множество и $x \notin \psi^{-1}F$, то есть $\psi(x) \cap F = \emptyset$. Так как $\psi(x)$ есть компакт, а F — замкнутое в Y множество, то для некоторого числа m выполняется неравенство $\inf\{\varrho(z, y) \mid z \in F, y \in \psi(x)\} > 2^{-m}$. Очевидно, $x \notin \Phi = \bigcup\{[H_{\alpha}^m] \mid \alpha \in A_m \text{ и } x \notin [H_{\alpha}^m]\}$. Покажем, что $\psi^{-1}F \subseteq \Phi$. Пусть $x' \in \psi^{-1}F$. Найдется спектральная последовательность $\alpha = \{\alpha_n\}$, для которой $x' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [H_{\alpha_n}^m]$ и $D(\alpha) \in F$. Тогда $x' \in [H_{\alpha}^m]$ и $U_{\alpha}^m \cap \psi(x) = \emptyset$, то есть $x \notin [H_{\alpha}^m]$. Значит, $\psi^{-1}F \subseteq \Phi$. Итак, мы построим окрестность $Ox = X \setminus \Phi$ точки x в X , для которой $Ox \cap \psi^{-1}F = \emptyset$. Следовательно, множество $\psi^{-1}F$ замкнуто в X . Свойство доказано.

Свойства 1—8 показывают нам, как при помощи покрытий можно построить полунепрерывные сечения с компактными образами. Впервые этот метод был предложен в работах М. М. Чобана [23; 24].

2. Сечения и σ -дискретные множества

Теорема 1. Пусть $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ — полунепрерывное снизу отображение слабого паракомпакта X в полное метрическое пространство (Y, ϱ) . Если множество $L = \{x \in X \mid \theta(x) \notin \mathcal{F}(Y)\}$ σ -дискретно в X , то существует такое полунепрерывное снизу сечение $\varphi: X \rightarrow C(Y)$ для отображения θ , что $\varphi(x)$ есть конечное множество для любой точки $x \in L$.

Доказательство. Пусть $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, где множества $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ дискретны в X .

Построим открытые точечно конечные покрытия $\gamma = \{\gamma_n = \{H_{\alpha}^n \mid \alpha \in A_n\} \mid n = 1, 2, \dots\}$ пространства X , открытые системы $\omega = \{\omega_n = \{U_{\alpha}^n \mid \alpha \in A_n\} \mid n = 1, 2, \dots\}$ пространства Y , отображения $\pi = \{\pi_n: A_{n+1} \rightarrow A_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ и семейство $K = \{K(x) \mid x \in L\}$ конечных множеств пространства Y , для которых:

1. γ, ω и π удовлетворяют условиям I—IV из пункта 1.
2. $K(x) \subseteq \theta(x)$ для $x \in L$.
3. Если $x \in L_n$ и $m \geq n$, то x содержится ровно в $|K(x)|$ элементов покрытия γ_m .

(Через $|B|$ обозначим мощность множества B .)

4. Если $x_1, x_2 \in \bigcup_{i=1}^n L_i$, то для каждого $\alpha \in A_m$ при $m \geq n$ множество $H_{\alpha}^m \cap \{x_1, x_2\}$ не более чем одноточечно.

5. Если $x \in L_n \cap H_{\alpha}^m$, то $U_{\alpha}^m \cap K(x) \neq \emptyset$.

Указанные выше объекты будем строить по индукции. Можем считать, что $\text{diam } Y < 2^{-1}$. В открытое покрытие $\{V \text{ открыто в } X \mid V \cap L_1 \leq 1\}$ пространства X вписываем точечно конечное открытое покрытие $\lambda_1 = \{W_\alpha \mid \alpha \in A_1\}$, где A_1 — вполне упорядоченное множество. Пусть $x \in L_1$ и $\alpha(x)$ есть первый элемент из A_1 , для которого $x \in W_{\alpha(x)}$. Из остальных множеств W_α , где $\alpha > \alpha(x)$, мы вычитаем точку x . В итоге получаем покрытие $\gamma_1 = \{H_\alpha^1 \mid \alpha \in A_1\}$, для которого любая точка $x \in L_1$ содержится только в одном элементе $H_{\alpha(x)}^1$ из γ_1 и каждое H_α^1 содержит не более одной точки из L_1 . Поскольку из каждого W_α мы вычитали точки из дискретного множества L_1 , то покрытие γ_1 открыто. Положим $U_\alpha^1 = Y$ для всех $\alpha \in A_1$. Если $x \in L_1$, то фиксируем точку $y(x) \in \theta(x)$ и положим $K(x) = \{y(x)\}$. Покрытие γ_1 , семейство $\omega_1 = \{U_\alpha^1 \mid \alpha \in A_1\}$ и семейство $\{K(x) \mid x \in L_1\}$ построены.

Пусть построены покрытия γ_i , системы ω_i и множества $K(x)$ для всех номеров $i \leq n$ и точек $x \in \bigcup_{i=1}^n L_i$. Строим покрытие γ_{n+1} , семейство ω_{n+1} и множества $K(x)$ для точек $x \in L_{n+1}$. Фиксируем $\alpha \in A_n$. Рассмотрим семейство открытых множеств $\lambda_\alpha = \{U \subseteq Y \mid U \subseteq U_\alpha^n, \text{diam } U < 2^{-n-1}\}$. Так как $[H_\alpha^n] \subseteq \theta^{-1}U_\alpha^n$, то $\lambda_\alpha^{-1} = \{\theta^{-1}U \mid U \in \lambda_\alpha\}$ есть открытое в X покрытие множества $[H_\alpha^n]$. Если $x \in H_\alpha^n \cap (\bigcup_{i=1}^n L_i)$, то фиксируем окрестность Ox точки в X и $U_x \in \lambda_\alpha$ такие, что $[Ox] \subseteq \theta^{-1}U_x$, $U_x \cap K(x) \neq \emptyset$ и $Ox \cap L_{n+1} = \emptyset$. Если же $x \in H_\alpha^n \cap L_{n+1}$, то фиксируем окрестность Ox и множество $U_x \in \lambda_\alpha$, для которых $[Ox] \subseteq \theta^{-1}U_x$ и $Ox \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} L_i) = \{x\}$. Множество $L_\alpha = H_\alpha^n \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} L_i)$ замкнуто в X . В открытое в X покрытие $\{Ox, \bigvee \lambda_\alpha \mid V \in \lambda_\alpha^{-1}, x \in L_\alpha\}$ замкнуто вписываем открытое в X точечно конечное покрытие $\mu_\alpha = \{W_\beta \mid \beta \in A_\alpha^{n+1}\}$ множества $[H_\alpha^n]$ такое, что для каждой точки $x \in L_\alpha$ существует единственный элемент $\beta(x) \in A_\alpha^{n+1}$, при котором $x \in W_{\beta(x)}$. В этом случае $[W_{\beta(x)}] \subseteq Ox$ для всех $x \in L_\alpha$. Положим $U_{\beta(x)}^{n+1} = U_x$ для $x \in L_\alpha$. Если $\beta \in A_\alpha^{n+1} \setminus \{\beta(x) \mid x \in L_\alpha\}$, то фиксируем такой элемент $U_\beta^{n+1} \in \lambda_\alpha$, что $[W_\beta] \subseteq \theta^{-1}U_\beta^{n+1}$. Если $x \in W_\beta \cap L_{n+1} \cap L_\alpha$, то фиксируем точку $y_\beta(x) \in \theta(x) \cap U_\beta^{n+1}$. Положим $A_{n+1} = \bigcup \{A_\alpha^{n+1} \mid \alpha \in A_n\}$, $\gamma_{n+1} = \{H_\beta^{n+1} = W_\beta \cap H_\alpha^n \mid \beta \in A_\alpha^{n+1}, \alpha \in A_n\} = \{H_\beta^{n+1} \mid \beta \in A_{n+1}\}$, $\pi_n: A_{n+1} \rightarrow A_n$, где $\pi_n^{-1}\alpha = A_\alpha^{n+1}$, а $K(x) = \{y_\beta(x) \mid \beta \in A_{n+1}\}$ для всех $x \in L_{n+1}$. (Если $y_\beta(x) = y_{\beta'}(x)$, при $\beta \neq \beta'$ то точки $y_\beta(x)$ и $y_{\beta'}(x)$ следует считать различными. Этот факт влияет на $|K(x)|$.) Множество $K(x)$ конечно для любой точки $x \in L_{n+1}$, поскольку покрытие γ_{n+1} точечно конечно. Условия 1, 2, 4 и 5 легко проверяются. Если $x \in \bigcup_{i=1}^n L_i$, то x содержится в элементах $U_{\alpha_1}^n, \dots, U_{\alpha_m}^n$, где $m = |K(x)|$, покрытия γ_n . Но в каждой системе μ_{α_i} , где $i \leq m$, точка x содержится только в одном элементе. Поэтому x содержится ровно в m элементах покрытия γ_{n+1} . Если $x \in L_{n+1}$, то, по построению, точка x содержится ровно в $|K(x)|$ элементов покрытия γ_{n+1} . Таким образом, выполняется и условие 3. Итак, покрытия γ , семейства ω и K и отображения π построены.

Берем отображение $\varphi = \varphi(y, \omega, \pi)$. В силу свойств 4 и 6, отображение φ полунепрерывно снизу и множества $\varphi(x)$ бикомпактны. На основании свойства 2, $\varphi(x) \subseteq [\theta(x)] = \theta(x)$ для каждой точки $x \in X \setminus L$. Пусть $x \in L_n$ для некоторого числа n . Покажем, что $\varphi(x) \subseteq K(x)$. Пусть $y \in \varphi(x)$. Тогда существует спектральная последовательность $\alpha = \{\alpha_m \mid m = 1, 2, \dots\}$, для которой $y = D(\alpha)$

и $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H_{a_m}^m$. По условию 5, $U_{a_m}^m \cap K(x) \neq \emptyset$ для всех $m=1, 2, \dots$. Так как $K(x)$ есть бикомпакт, то $D(a) = \bigcap_{m=1}^{\infty} [U_{a_m}^m] \in K(x)$.

Итак, $y \in K(x)$, то есть $\varphi(x) \subseteq K(x) \subseteq \theta(x)$. Значит, φ является сечением для θ , а множество $\varphi(x)$ конечно для каждой точки $x \in L$. Теорема доказана.

Первое замечание к доказательству теоремы 1. Пусть X — паракомпакт. Тогда существуют открытые локально конечные покрытия $\xi = \{\xi_n = \{V_\alpha^n \mid \alpha \in A_n\} \mid n=1, 2, \dots\}$ такие, что $[V_\alpha^n] \subseteq H_\alpha^n$ для всех $\alpha \in A_n$ и $n=1, 2, \dots$. На основании свойства 5, имеем $\varphi^{-1}U_{a_m}^m \supseteq H_{a_m}^m \supseteq [V_\alpha^n]$. Значит, покрытия ξ удовлетворяют условиям I—IV относительно отображения π . Тогда $\varphi(\xi, \omega, \pi)$ и $\psi(\xi, \omega, \pi)$ являются сечениями для φ и, тем более, для θ .

Справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ — полунепрерывное снизу отображение паракомпактного пространства X в полное метрическое пространство Y . Если множество $L = \{x \in X \mid \theta(x) \notin \mathcal{F}(Y)\}$ σ -дискретно в X , то существуют многозначные отображения $\varphi: X \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ и $\psi: X \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ для которых:

- $\varphi(x) \subseteq \psi(x) \subseteq \theta(x)$ для любой точки $x \in X$;
- отображение φ полунепрерывно снизу;
- отображение ψ полунепрерывно сверху;
- для $x \in L$ множества $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ конечны.

Второе замечание к доказательству теоремы 1. Если X — нульмерный в смысле $\dim$ паракомпакт, то можно построить дискретные покрытия $\gamma = \{\gamma_n \mid n=1, 2, \dots\}$. Тогда, по свойству 7, отображение $\varphi = \varphi(\gamma, \omega, \pi)$ будет однозначным. Следовательно, имеет место

Теорема 3. Пусть $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ — полунепрерывное снизу отображение нульмерного паракомпакта X в полное метрическое пространство Y . Если множество $L = \{x \in X \mid \theta(x) \notin \mathcal{F}(Y)\}$ σ -дискретно в X , то существует непрерывное однозначное сечение $f: X \rightarrow Y$ для θ .

Третье замечание к доказательству теоремы 1. По построению сечений φ и ψ для точек $x \in L_1$, образы $\varphi(x) = \psi(x)$ одноточечны и могут быть фиксированы произвольно. Таким образом, в теоремах 1 и 2 для сечений φ и ψ и фиксированного дискретного множества M образы $\varphi(x) = \psi(x)$ точек $x \in M$ одноточечны и могут принять заранее заданные значения из $\theta(x)$. Для этого достаточно включить M в L_1 .

Четвертое замечание к доказательству теоремы 1. К множеству L мы могли бы еще присоединить любое σ -дискретное в X множество M . Поэтому в условиях теорем 1 и 2 для любого σ -дискретного множества $M \subseteq X$ можно считать, что образы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ точек $x \in M$ конечны.

В точках $x \in X$, где $\varphi(x) = \psi(x)$ отображения φ и ψ непрерывны (см. [11, стр. 182, теорема 2]).

Замечание. В случае $L = \emptyset$ теорема 1 доказана М. Чобаном [24], а теоремы 2 и 3 — Е. Майклом [13; 14].

Из теорем 1—3 вытекает, что σ -дискретные множества не влияют на существование „хороших“ сечений. Кроме того, теоремы 1—3 позволяют получить интересные теоремы о сечениях для σ -дискретных пространств.

Пространство X называется σ -дискретным множеством, если оно является объединением счетного числа дискретных подмножеств. (Вообще говоря, пространство называется σ -дискретным, если оно является объединением счетного числа дискретных пространств. В данной работе такое поня-

тие мы рассматривать не будем. В случае метрических пространств эти понятия совпадают.)

Теорема 4. Пусть $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ — полунепрерывное снизу отображение слабо паракомпактного σ -дискретного множества X в T_0 -пространство Y с первой аксиомой счетности. Тогда существует такое полунепрерывное снизу сечение $\varphi: X \rightarrow C(Y)$ для θ , что множества $\varphi(x)$ конечны.

Доказательство. По теореме В. И. Пономарева [17], существует открытое непрерывное отображение $g: Z \rightarrow Y$ метрического пространства Z на Y . Отображение $\bar{\theta}: X \rightarrow \mathcal{A}(Z)$, где $\bar{\theta}(x) = g^{-1}(\theta(x))$ полунепрерывно снизу. Так как X есть σ -дискретное множество, то и множество $L = \{x \in X \mid \bar{\theta}(x) \notin \mathcal{F}(\bar{Z})\}$ σ -дискретно в X . ($\bar{Z}$ есть некоторое полное метрическое пространство, содержащее Z как подпространство.) По теореме 1 существует такое полунепрерывное сечение $\bar{\varphi}: X \rightarrow C(Z)$ для $\bar{\theta}$, что множества $\bar{\varphi}(x)$ конечны. Отображение $\varphi: X \rightarrow C(Y)$, где $\varphi(x) = g(\bar{\varphi}(x))$ искомо. Теорема доказана.

Поскольку коллективно нормальные σ -дискретные множества нульмерны и паракомпактны, то тем же способом, с помощью теоремы 3, доказывается и следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ — полунепрерывное снизу отображение коллективно нормального σ -дискретного множества X в T_0 -пространство Y с первой аксиомой счетности. Тогда существует непрерывное однозначное сечение $f: X \rightarrow Y$ для θ .

3. Общие следствия. Отображения $f: X \rightarrow Y$ метризуемого пространства X в Y равномерно почти полно, если существует метрика ϱ на пространстве X , для которой множество $\{y \in Y \mid f^{-1}(y) \text{ не полно в метрике } \varrho\}$ σ -дискретно в Y .

Теорема Н. С. Лашнева [12] утверждает, что замкнутые отображения метрических пространств равномерно почти полны.

Замечание. Отображение $f: X \rightarrow Y$ индуктивно открыто, если для некоторого $X' \subseteq X$ выполнено $fX' = Y$ и отображение $f|X'$ открыто.

Следствие 1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — почти полное индуктивно открытое отображение метрического пространства X на пространство Y . Тогда:

1. Если пространство Y слабо паракомпактно, то существует подмножество $X_1 \subseteq X$, для которого $fX_1 = Y$ и отображение $f|X_1$ открыто и бикомпактно. В частности, пространство Y обладает равномерной базой.

2. Если Y — паракомпакт, то существует замкнутое подмножество $X_2 \subseteq X$, для которого $fX_2 = Y$, а $f|X_2$ есть совершенное открытое отображение. В частности, Y метризуемо.

3. Если Y — паракомпакт, а $\dim Y = 0$, то существует подмножество $X_1 \subseteq X$, для которого $fX_1 = Y$ и $f|X_1$ есть гомеоморфизм.

Доказательство. Пусть $fX' = Y$ и $f|X'$ — открытое отображение, а $(\bar{X}, \varrho)$ — пополнение пространства X по метрике ϱ , относительно которой отображение f равномерно почти полно. Положим $\theta(y) = |f^{-1}(y) \cap X'|_X$. Тогда $\theta: Y \rightarrow \mathcal{A}(\bar{X})$ есть полунепрерывное снизу отображение, а множество $L = \{y \in Y \mid \theta(y) \notin \mathcal{F}(\bar{X})\} \subseteq \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \text{ не полно относительно } \varrho\}$ σ -дискретно

в Y . Значит, θ удовлетворяют условиям теорем 1—3. Пусть $\varphi: Y \rightarrow C(\tilde{X})$ и $\psi: Y \rightarrow C(\tilde{X})$ — полунепрерывные снизу и сверху сечения, соответственно, для θ . Положим $X_1 = \bigcup \{\varphi(y) \mid y \in Y\}$ и $X_2 = \bigcup \{\psi(y) \mid y \in Y\}$. Тогда $X_1 \subseteq X$, $X_2 \subseteq X$, отображение $f|X_1$ открыто и бикомпактно, а отображение $f|X_2$ совершенно. Если $\varphi(y) \subseteq \psi(y)$ для всех $y \in Y$, то $X_1 \subseteq X_2$. Если же φ однозначна, то $f|X_1$ — гомеоморфизм. Теоремы 1—3 позволяют построить такие сечения φ и ψ в соответствующих случаях. Доказательство следствия завершается, если учесть, что открытый бикомпактный образ метрического пространства есть пространство с равномерной базой [7], а совершенный образ метрического пространства есть метрическое пространство [18].

Аналогичными построениями, при помощи теорем 1—5 доказываются и следующие следствия.

Следствие 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — открытое непрерывное отображение T_0 -пространства X с первой аксиомой счетности на слабо паракомпактное σ -дискретное множество. Тогда существует подмножество $X_1 \subseteq X$ такое, что $f|X_1 = Y$ и $f|X_1$ — открытое конечнократное отображение.

Следствие 3 (Б. А. Пасынков [15]). Пусть $f: X \rightarrow Y$ — открытое непрерывное отображение T_0 -пространства X с первой аксиомой счетности на коллективно нормальное пространство Y . Тогда для любого σ -дискретного подмножества Z пространства Y существует подмножество $X_1 \subseteq X$ такое, что $f|X_1 = Z$ и $f|X_1$ есть гомеоморфизм.

Теорема 6. Пусть X — слабо паракомпактное σ -дискретное множество с первой аксиомой счетности. Тогда:

1. X есть открытый конечнократный образ некоторого σ -дискретного метрического пространства.

2. X обладает равномерной базой.

Доказательство. По теореме В. И. Пономарева [17], существует открытое непрерывное отображение $f: Z \rightarrow X$ некоторого метрического пространства Z на X . На основании следствия 2, существует подпространство $S \subseteq Z$, для которого $fS = X$, а $f|S$ — открытое конечнократное отображение. Пространство S σ -дискретно как конечнократный непрерывный прообраз σ -дискретного пространства. Теорема доказана.

4. σ -непрерывные сечения. Точки взаимной однозначности при выяснении строения отображений были впервые использованы П. С. Александровым [4]. Фактически, эти точки дают возможность построить некоторые сечения, которые мы в дальнейшем назовем σ -непрерывными. В свою очередь, σ -непрерывные сечения позволяют выяснить поведение размерностных и дескриптивных свойств пространства при отображениях, для которых применим этот метод. В дальнейшем метод П. С. Александрова был применен А. Н. Колмогоровым [10], А. Д. Таймановым [19] и А. А. Архангельским [7; 8]. Теорема 2.6 из работы А. В. Архангельского [8] фактически есть пример утверждения о σ -непрерывных сечениях.

В данном параграфе метод изолированных точек будет развит для многозначных отображений. Содержание метода раскрывают две следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ — полунепрерывное сверху отображение совершенно нормального пространства X в пространство Y с G_δ — диагональю, а F — замкнутое в Y множество. Тогда множество $H(\theta, F) = \{x \in X \mid \theta(x) \cap F \text{ одноточечно}\}$ есть G_δ -множество, а отображение $f: H(\theta, F) \rightarrow Y$, где $f(x) = \theta(x) \cap F$, непрерывно и однозначно.

Доказательство. Непрерывность отображения f вытекает из равенства $f^{-1}U = (X \setminus \theta^{-1}(F \setminus U)) \cap H(\theta, F)$, где U — произвольное открытое в Y множество. Пусть теперь Y является пространством с G_δ -диагональю. Тогда существуют открытые покрытия $\{\gamma_n | n=1, 2, \dots\}$ пространства Y такие, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(y) = \{y\}$ для любой точки $y \in Y$. Положим $V_n = \bigcup \{X \setminus \theta^{-1}(F \setminus U) | U \in \gamma_n\}$. Множества $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ открыты в X . Так как X совершенно нормально, то из равенства $H(\theta, F) = \theta^{-1}F \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ вытекает, что $H(\theta, F)$ есть G_δ -множество пространства X . Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ — полунепрерывное снизу отображение совершенно нормального пространства X в пространство Y , а U — открытое в Y множество. Тогда $H(\theta, U) = \{x \in X | \theta(x) \cap U \text{ одноточечно}\}$ есть одновременно F_σ -множество и G_δ -множество, а отображение $f: H(\theta, U) \rightarrow Y$, где $f(x) = \theta(x) \cap U$ непрерывно и однозначно.

Доказательство. Непрерывность отображения f вытекает из равенства $f^{-1}\Phi = (X \setminus \theta^{-1}(U \setminus \Phi)) \cap H(\theta, U)$, где Φ — произвольное замкнутое в Y множество. Докажем, что $H(\theta, U)$ замкнуто в $\theta^{-1}U$. Пусть $x \in \theta^{-1}U \setminus H(\theta, U)$. Тогда существуют различные точки $y_1, y_2 \in \theta(x) \cap U$. Берем непересекающиеся окрестности Oy_1 и Oy_2 точек y_1 и y_2 . В этом случае окрестность $Ox = \theta^{-1}(Oy_1 \cap U) \cap \theta^{-1}(Oy_2 \cap U)$ точки x не пересекается с множеством $H(\theta, U)$. Так как X совершенно нормально, а $\theta^{-1}U$ есть открытое множество, то $H(\theta, U)$ есть F_σ -множество и G_δ -множество одновременно. Лемма доказана.

Определение 1. Отображение $f: X \rightarrow Y$ σ -непрерывно, если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ и $f|X_n$ непрерывно для любого n . Если при этом для каждого числа n множество X_n замкнуто в X , то отображение f называется F_σ -непрерывным.

Определение 2. Однозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ изолировано, если для каждой точки $y \in Y$ подпространство $f^{-1}(y)$ содержит изолированную точку.

Определение 3. Мнозначное отображение $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ называется X -изолированным, если для каждой точки $x \in X$ подпространство $\theta(x)$ содержит изолированную точку.

Определение 4. Пространство X называется σ -паракомпактным, если в каждое открытое покрытие X можно вписать замкнутое σ -дискретное покрытие.

Определение 5. Отображение $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ называется X -замкнутым, если существуют пространство Z , замкнутое непрерывное отображение $\varphi: Z \rightarrow Y$ и непрерывное отображение $\psi: Z \rightarrow Y$, для которых $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$. Все X -замкнутые отображения полунепрерывны сверху.

X — замкнутые отображения обладают следующим свойством: если $\gamma = \{L_\alpha | \alpha \in A\}$ есть локально конечная система пространства Y , то система $\gamma^{-1} = \{\theta^{-1}L_\alpha | \alpha \in A\}$ наследственно консервативна, т. е. для любого семейства $\{M_\alpha \subseteq \theta^{-1}L_\alpha | \alpha \in A\}$ имеем $[\bigcup \{M_\alpha | \alpha \in A\}] = \bigcup \{M_\alpha | \alpha \in A\}$.

Лемма 3. Пусть $\gamma = \{L_\alpha | \alpha \in A\}$ — локально конечная система из G_δ -множеств совершенно нормального пространства X . Тогда существует счетное число дискретных семейств $\lambda_n = \{L_\beta^n | \beta \in B_n\}$, $n = 1, \dots$, для которых:

- 1) $L_n = \bigcup \{L_\beta^n | \beta \in B_n\}$ есть G_δ — множество пространства X .
- 2) λ_n вписано в γ .
- 3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = \bigcup \{L_\alpha | \alpha \in A\}$.

Доказательство. Система $\{F_\alpha = [I_\alpha] \mid \alpha \in A\}$ локально конечна и замкнута. Рассмотрим семейства $\Omega_n = \{F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = F_{\alpha_1} \cap F_{\alpha_2} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A; \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n\}$ и множества $Q_n = \bigcup \{F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \in \Omega\}$ для $n = 1, 2, \dots$ (Считаем, что A вполне упорядочено, а наборы $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ берутся в порядке нахождения элементов в A .) Семейство Ω_n локально конечно, и поэтому Q_n есть замкнутое в X множество. Тогда $Q_n \setminus Q_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_{nk}$, где множества Φ_{nk} замкнуты в X . Система $\Omega_{nk} = \{F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \cap \Phi_{nk} \mid F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \in \Omega_n\}$ дискретна в X . Поэтому и система $\lambda_{nki} = \{L_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{nki} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A; \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n\}$, где $L_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{nki} = I_{\alpha_i} \cap F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{nki}$, при $i \leq n$ дискретна. Множество $L_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{nki}$ имеет тип G_δ как пересечение конечного числа G_δ -множеств. Обозначим $L_{nki} = \bigcup \{L_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{nki} \in \lambda_{nki}\}$. Ясно, что L_{nki} есть G_δ -множество. По построению, система λ_{nki} вписана в γ . Пусть $x \in \bigcup \{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Тогда существует n различных элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$, для которых $x \in F_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ и $x \in Q_n \setminus Q_{n+1}$. Отметим, что $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_n \supset \dots$. В этом случае $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n L_{nki}^{nki}$. Таким образом, семейства $\{\lambda_{nki} \mid i \leq n; n, k = 1, 2, \dots\}$ можно взять в качестве искомых. Для этого остается лишь перейти к одноиндексной нумерации семейств $\{\lambda_{nki}\}$. Лемма доказана.

Теорема 7. Пусть $\theta: X \rightarrow C(Y)$ — полунепрерывное сверху X -изолированное отображение совершенно нормального пространства X в σ -паракомпактное пространство Y с G_δ -диагональю. Тогда существуют непрерывные однозначные отображения $\{f_n: X_n \rightarrow Y \mid n = 1, 2, \dots\}$ — множеств $\{X_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ пространства X такие, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ и $f_n(x) \in \theta(x)$ для любых n и $x \in X_n$. В частности, для θ существует однозначное σ -непрерывное сечение.

Доказательство. В пространстве Y существует семейство $\{\mu_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ открытых покрытий таких, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mu_n(y) = \{y\}$ для любой точки $y \in Y$. В покрытие μ_n вписываем замкнутое покрытие $\omega_n = \{F_\alpha^{nm} \mid \alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}\}$, где семейства $\omega_{nm} = \{F_\alpha^{nm} \mid \alpha \in A_{nm}\}$ дискретны. Положим $I_\alpha^{nm} = H(\theta, F_\alpha^{nm}) = \{x \in X \mid \theta(x) \cap F_\alpha^{nm} \text{ одноточечно}\}$ и $f_\alpha^{nm}: I_\alpha^{nm} \rightarrow Y$, где $f_\alpha^{nm}(x) = \theta(x) \cap F_\alpha^{nm}$. По лемме 1, отображение f_α^{nm} непрерывно и однозначно, а I_α^{nm} есть G_δ -множество пространства X . Так как семейство $\{\theta^{-1} F_\alpha^{nm} \mid \alpha \in A_{nm}\}$ локально конечно в X , то и семейство $\gamma_{nm} = \{I_\alpha^{nm} \subseteq F_\alpha^{nm} \mid \alpha \in A_{nm}\}$ локально конечно. По лемме 3, существуют дискретные семейства $\lambda_{nmk} = \{L_\beta^{nmk} \mid \beta \in B_{nmk}\}$, для которых:

- 1) λ_{nmk} вписано в γ_{nm} .
- 2) $L_{nmk} = \bigcup \{L_\beta^{nmk} \mid \beta \in B_{nmk}\}$ есть G_δ -множество пространства X .
- 3) $\bigcup_{k=1}^{\infty} L_{nmk} = \bigcup \{I_\alpha^{nm} \mid \alpha \in A_{nm}\}$.

Для каждого элемента $\beta \in B_{nmk}$ фиксируем элемент $\alpha(\beta) \in A_{nm}$ такой, что $L_\beta^{nmk} \subseteq I_{\alpha(\beta)}^{nm}$. Отображение $f_{nmk}: L_{nmk} \rightarrow Y$ таково, что $f_{nmk}|_{L_\beta^{nmk}} = f_{\alpha(\beta)}^{nm}|_{L_\beta^{nmk}}$. Так как семейство λ_{nmk} дискретно, а отображения f_α^{nm} непрерывны, то f_{nmk} есть непрерывное однозначное отображение, а $f_{nmk}(x) \in \theta(x)$ для любой точки $x \in L_{nmk}$.

Покажем, что $X = \bigcup \{L_{nmk} \mid n, m, k = 1, 2, \dots\}$. Фиксируем точку $x_0 \in X$. Тогда в $\theta(x_0)$ существует изолированная точка $y_0 \in \theta(x_0)$. Для каждого n

мера n найдется элемент $F_{\alpha_n}^{nm} \ni y_0$. Так как $\theta(x_0)$ есть бикомпакт, а $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha_n}^{nm} = \{y_0\}$, то для некоторого номера n выполнено $\theta(x_0) \cap F_{\alpha_n}^{nm} = \{y_0\}$. Тогда $x_0 \in \Gamma_{\alpha_n}^{nm}$, то есть $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} L_{nmk}$. Путем изменения индексов от семейства $\{L_{nmk} | n, m, k = 1, 2, \dots\}$ переходим к семейству $\{X_n | n = 1, 2, \dots\}$. Доказательство теоремы завершено. Чтобы построить σ -непрерывное сечение, возьмем такое отображение $f: X \rightarrow Y$, что $f|(X_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i) = f_n|(X_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i)$.

Замечание. Пусть пространство Y удовлетворяет одному из следующих условий:

1. Y метризуемо;
2. Y обладает равномерной базой;
3. Y обладает σ -дискретной сетью;
4. Y сильно симметризуемо.

Тогда Y σ -паракомпактно и является пространством с G_δ -диагональю. Поэтому теорема 7 справедлива, в частности, и в каждом из этих случаев. Кроме того, в этих случаях пространство Y совершенно нормально, как только оно нормально.

Следствие 4. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — совершенное изолированное отображение σ -паракомпактного пространства X с G_δ -диагональю на совершенно нормальное пространство Y . Тогда существует счетное число $\{X_n | n = 1, 2, \dots\}$ G_δ -множеств пространства X таких, что:

- 1) $Y_n = fX_n$ есть G_δ -множество пространства Y ;
- 2) $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$;
- 3) $f|X_n$ — гомеоморфизм.

Следствие 4 справедливо и когда X удовлетворяет одному из условий 1—4 замечания. Для пространств со счетной сетью это следствие доказано А. В. Архангельским [8, теорема 2.6].

Теорема 8. $f: X \rightarrow Y$ — замкнутое, изолированное или счетнократное отображение метрического пространства X на пространство Y . Тогда существует счетное число $\{X_n | n = 1, 2, \dots\}$ G_δ -множеств пространства X для которых:

1. $Y_n = fX_n$ есть G_δ -множество пространства Y ;
2. $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$;
3. $f|X_n$ — гомеоморфизм.

Доказательство. По теореме Н. С. Лашнева [12], существует счетное число дискретных множеств $\{L_n | n = 1, 2, \dots\}$ пространства Y таких, что для любой точки $y \in Y' = Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ множество $f^{-1}(y)$ есть бикомпакт. Положим $X' = f^{-1}Y'$ и $f' = f|X'$. Тогда $f': X' \rightarrow Y'$ есть совершенное изолированное отображение метрического пространства X' на метрическое пространство Y' . На основании следствия 1, существуют G_δ -множества $\{X'_n | n = 1, 2, \dots\}$ пространства X' такие, что $Y' = \bigcup_{n=1}^{\infty} fX'_n$ и $f|X'_n$ есть гомеоморфизм. Для каждой точки $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ фиксируем точку $x(y) \in f^{-1}(y)$ и положим $M_n = \{x(y) | y \in L_n\}$. Множества $\{M_n | n = 1, 2, \dots\}$ дискретны в X . Поэтому множества $\{X'_n, M_n | n = 1, 2, \dots\}$ можно взять в качестве искомым множеств $\{X_n | n = 1, 2, \dots\}$. Теорема доказана.

Лемма 5. Пусть $\gamma_1 = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ — открытое точечно конечное семейство и $\gamma = \{L_\alpha | \alpha \in A\}$ — система из F_σ -множеств пространства X , а

$L_\alpha \subseteq U_\alpha$ для любого $\alpha \in A$. Тогда существует счетное число замкнутых дискретных систем $\{\lambda_n = \{\Phi_\beta^n \mid \beta \in B_n\} \mid n=1, 2, \dots\}$, для которых:

$$1. \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup \{\Phi_\beta^n \mid \beta \in B_n\} = \bigcup \{L_\alpha \mid \alpha \in A\};$$

2. Семейства $\{\lambda_n \mid n=1, 2, \dots\}$ вписаны в γ .

Доказательство. Множество A вполне упорядочим. По условию, $L_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_\alpha^n$, где $F_\alpha^1, F_\alpha^2, \dots$ — замкнутые в X множества. Положим $\omega_n = \{U_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^n = \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A; \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n\}$ и $U_n = \bigcup \{U_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^n \in \omega_n\}$, где $n=1, 2, \dots$. Тогда $U_n \setminus U_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_{nk}$, где множества $\Phi_{n1}, \Phi_{n2}, \dots$ замкнуты в X и $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$. По построению, семейства $\{U_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^n \setminus U_{n+1} \mid U_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^n \in \omega_n\}$ дискретны в $U_n \setminus U_{n+1}$. Положим $\lambda_{nkmi} = \{\Phi_{nkmi}^{nm} = \Phi_{nk} \cap F_{\alpha_i}^m \cap U_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^n\}$, где $i \leq n$ и $n, k, m=1, 2, \dots$. Семейства $\{\lambda_{nkmi}\}$ искомы. Лемма доказана.

Теорема 9. Пусть $\theta: X \rightarrow C(Y)$ является X -изолированным полунепрерывным снизу отображением совершенно нормального пространства X в паракомпактное пространство Y с G_δ -диагональю. Тогда существует однозначное F_σ -непрерывное сечение для θ .

Доказательство. В пространстве Y существует счетное число открытых локально конечных покрытий $\{\omega_n = \{U_\alpha^n \mid \alpha \in A_n\} \mid n=1, 2, \dots\}$ таких, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\omega_n(y)] = \{y\}$ для любой точки $y \in Y$, а покрытие ω_{n+1} вписано в ω_n . Положим $L_\alpha^n = H(\theta, U_\alpha^n) = \{x \in X \mid \theta(x) \cap U_\alpha^n \text{ одноточечно}\}$. Тогда $\gamma'_n = \{\theta^{-1}U_\alpha^n \mid \alpha \in A_n\}$ есть открытое точечно конечное покрытие пространства, а $\gamma_n = \{L_\alpha^n \mid \alpha \in A_n\}$ — такое семейство из F_σ -множеств пространства X , что $L_\alpha^n \subseteq \theta^{-1}U_\alpha$. На основании леммы 5, существуют замкнутые дискретные семейства $\{\lambda_{nm} = \{\Phi_\beta^{nm} \mid \beta \in B_{nm}\} \mid n, m=1, 2, \dots\}$, для которых:

1. Для каждого числа n, m и элемента $\beta \in B_{nm}$ существует элемент $\alpha(\beta) \in A_n$ такой, что $\Phi_\beta^{nm} \subseteq L_{\alpha(\beta)}^n$.

$$2. \bigcup \{\Phi_\beta^{nm} \mid \beta \in B_{nm}; n, m=1, 2, \dots\} = \bigcup \{L_\alpha^n \mid \alpha \in A_n; n=1, 2, \dots\}.$$

Положим $X_{nm} = \bigcup \{\Phi_\beta^{nm} \mid \beta \in B_{nm}\}$ и $f_{nm}: X_{nm} \rightarrow Y$, где $f_{nm}(x) = \theta(x) \cap U_{\alpha(\beta)}^n$ для любой точки $x \in \Phi_\beta^{nm}$. Тогда множества X_{nm} замкнуты в X , а отображения f_{nm} непрерывны и однозначны. Покажем, что $X = \bigcup \{X_{nm} \mid n, m=1, 2, \dots\}$. Пусть $x_0 \in X$, а y_0 — изолированная точка подпространства $\theta(x_0)$. Так как $\theta(x_0)$ есть бикомпакт и $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\omega_n(y_0)] = \{y_0\}$, то $\omega_n(y_0) \cap \theta(x_0) = \{y_0\}$ для некоторого числа n . Значит, если $y_0 \in U_\alpha^m$, то $x_0 \in L_\alpha^n$. Поэтому $X = \bigcup \{X_{nm} \mid n, m=1, 2, \dots\}$.

Пусть g — взаимно однозначное соответствие между множествами $\{(n, m) \mid n, m=1, 2, \dots\}$ и $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Отображение $f: X \rightarrow Y$, где $f(x) = f_{nm}(x)$ для любой точки $x \in X_{nm} \setminus \bigcup \{X_{lk} \mid g(l, k) < g(n, m)\}$, искомо. Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — открытое бикомпактное изолированное отображение паракомпактного пространства X с G_δ -диагональю на совершенно нормальное пространство Y . Тогда найдется счетное число замкнутых в X подмножеств $\{X_n \mid n=1, 2, \dots\}$ таких, что:

$$1. Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} f X_n;$$

2. $f|X_n$ есть гомеоморфизм для любого $n=1, 2, \dots$;

3. $f X_n$ замкнуто в Y для всех $n=1, 2, \dots$.

Теорема 10. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — индуктивно открытое счетнократное отображение метрического пространства X на слабопаракомпакт Y . Пусть, далее, отображение f замкнуто или равномерно почти полно. Тогда существует счетное число замкнутых подмножеств $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$ пространства X , для которых $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} fX_n$ и $f|X_n$ есть гомеоморфизм при любых $n=1, 2, \dots$.

Доказательство. Если f замкнуто, то f равномерно почти полно. Пусть ρ -метрика на X , для которой множество $L = \{y \in Y | f^{-1}(y) \text{ не полно}\}$ σ -дискретно в Y . По следствию 1, существует подмножество $X' \subseteq X$, для которой $fX' = Y$ и $f|X'$ есть открытое бикомпактное отображение. Так как отображение $f|X'$ открыто бикомпактно и счетнократно, то оно изолировано. Следствие 5 завершает доказательство.

5. Приложения к поведению размерности. Все пространства в этом параграфе предполагаются нормальными.

Пространство X называется счетномерным, если X является объединением счетного числа нульмерных в смысле $\dim$ подпространств.

Предложение 1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение пространства X на Y и существуют подмножества $\{X_n | n=1, 2, \dots\}$ пространства X , для которых $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} fX_n$ и $f|X_n$ есть гомеоморфизм при любом $n=1, 2, \dots$. Тогда:

- 1) Если X счетномерно и совершенно нормально, то и Y счетномерно;
- 2) Если множества $\{fX_n, n=1, 2, \dots\}$ замкнуты в Y , а отображение f непрерывно, то $\dim Y \leq \dim X$. Если, кроме того, X совершенно нормально, то $\text{Ind } Y \leq \text{Ind } X$.

Доказательство. Утверждение 1 очевидно. Утверждение 2 вытекает из того, что множества $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$ замкнуты в X как только отображение f непрерывно, а сами множества $\{fX_n, n=1, 2, \dots\}$ замкнуты в Y . Предложение доказано.

Предложение 1 и результаты пункта 1 позволяют установить справедливость следующих утверждений.

Следствие 6. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — совершенное отображение σ -паракомпактного пространства X с G_δ -диагональю на пространство Y . Тогда:

- 1) Если отображение f изолировано, а X счетномерно, то Y счетномерно.
- 2) Если X счетномерно, а Y несчетномерно, то подпространства $N_1 = \{y \in Y | f^{-1}(y) \text{ не содержит изолированной точки}\}$ и $N_2 = \{y \in Y | f^{-1}(y) \text{ несчетно}\}$ несчетномеры.

Замечание. Заметим, что $N_1 \subseteq N_2$. Утверждение 2 следствия 6 позволяет оценить размерность множества N_1 в очень широком классе пространств. В случае, когда пространство X либо метризуемо, либо обладает счетной сетью, утверждение следствия 6 доказано А. В. Архангельским [8].

Пространство X слабо счетномерно, если оно является объединением счетного числа замкнутых конечномерных подпространств.

Следствие 7. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение паракомпактного пространства X с G_δ -диагональю на совершенно нормальное пространство Y . Пусть, далее, для некоторого подмножества $X' \subseteq X$ отображение $f|X'$ открыто бикомпактно и изолировано. Тогда:

- 1) Если X счетномерно или слабо счетномерно, то таково же и Y ;
- 2) $\dim Y \leq \dim X$ и $\text{Ind } Y \leq \text{Ind } X$.

Следствие 8. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — замкнутое или равномерно почти полное индуктивно открытое счетнократное отображение метризуемого пространства X на слабопаракомпакт Y . Тогда:

- 1) Если X счетномерно или слабо счетномерно, то таково же и Y ;
 2) $\dim Y \leq \dim X$ и $\dim Y = \text{Ind } Y$.

Поведение размерности при открытых изолированных отображениях пространств со счетной базой было исследовано А. Д. Таймановым [19], а для метрических пространств — А. В. Архангельским [7]. Случай открыто счетнократных отображений компактов рассмотрен П. С. Александровым [4] и А. Н. Колмогоровым [10].

6. Приложения к поведению борелевских классов. В этом параграфе все пространства предполагаются метризуемыми.

Пусть задано пространство X . Тогда в пространстве X определены трансфинитные последовательности $\{\mathcal{F}_\alpha(X) \mid \alpha < \omega_1\}$ и $\{\mathcal{V}_\alpha(X) \mid \alpha < \omega_1\}$, где:

- 1°. $\mathcal{F}_0(X)$ — семейство всех замкнутых подмножеств X .
 2°. Элементы семейства $\mathcal{F}_\alpha(X)$ являются или пересечениями, или объединениями счетных последовательностей множеств, принадлежащих $\bigcup \{\mathcal{F}_\xi(X) \mid \xi < \alpha\}$ в зависимости от того, четно или нечетно число α .
 3°. $\mathcal{V}_0(X)$ — семейство всех открытых подмножеств X .
 4°. Элементы семейства $\mathcal{V}_\alpha(X)$ являются или объединениями, или пересечениями счетных последовательностей множеств, принадлежащих $\bigcup \{\mathcal{V}_\xi(X) \mid \xi < \alpha\}$ в зависимости от того, четно или нечетно число α .

Положим $D_\alpha(X) = \mathcal{F}_\alpha(X) \cap \mathcal{V}_\alpha(X)$ — двухсторонние борелевские множества класса α .

Семейства $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{V}_\alpha$ и D_α обладают следующими свойствами:

1. $\mathcal{V}_\alpha(X) = \{X \setminus L \mid L \in \mathcal{F}_\alpha(X)\}$ для любого $\alpha < \omega_1$.
 2. Объединение и пересечение конечного числа множеств, принадлежащих одному и тому же семейству, принадлежит тому же семейству.
 3. $\mathcal{V}_\alpha(X) \cup \mathcal{F}_\alpha(X) \subseteq D_{\alpha+1}(X)$, для всех $\alpha < \omega_1$.
 4. Семейства $D_\alpha(X)$ инвариантны относительно операции дополнения.

Доказательства этих свойств элементарны (см., например, [22]).

Лемма 6. Пусть $\{L_1, L_2, \dots, L_n, \dots\}$ дизъюнктное покрытие пространства X из множеств класса $D_2(X)$. Тогда для любого $\alpha \geq 2$ имеем:

1. Если $M \cap L_n \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то $M \in \mathcal{F}_\alpha(X)$.
 2. Если $M \cap L_n \in \mathcal{V}_\alpha(X)$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то $M \in \mathcal{V}_\alpha(X)$.

Доказательство. Пусть $M \cap L_n \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ для $n = 1, 2, \dots$. Возможны два случая.

1. Число α нечетно. В этом случае семейство $\mathcal{F}_\alpha(X)$ замкнуто относительно счетных объединений. Поскольку $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \cap L_n)$, то $M \in \mathcal{F}_\alpha(X)$.

2. Число α четно. В этом случае семейство $\mathcal{V}_\alpha(X)$ счетно аддитивно. Так как $L_n \setminus (M \cap L_n) \in \mathcal{V}_\alpha(X)$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то $X \setminus M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (L_n \setminus (M \cap L_n)) \in \mathcal{V}_\alpha(X)$. Поэтому $M \in \mathcal{F}_\alpha(X)$.

Таким же образом доказывается и второе утверждение. Лемма доказана.

Определение 1. Пространство X называется абсолютным борелевским множеством $\mathcal{V}$ -класса α , если для некоторого полного метрического пространства Y имеем $X \in \mathcal{V}_\alpha(X)$. В этом случае обозначим $\text{cl}_{\mathcal{V}} X \leq \alpha$. Если же $X \in \mathcal{F}_\alpha(Y)$, то X есть абсолютное борелевское множество $\mathcal{F}$ -класса α и положим $\text{cl}_{\mathcal{F}} X \leq \alpha$.

Неравенство $\text{cl}_{\mathcal{F}} X_1 \leq \text{cl}_{\mathcal{F}} X_2$ означает, что мы имеем одновременно $\text{cl}_{\mathcal{V}} X_1 \leq \text{cl}_{\mathcal{V}} X_2$ и $\text{cl}_{\mathcal{F}} X_1 \leq \text{cl}_{\mathcal{F}} X_2$. Если $\text{cl}_{\mathcal{F}} X_1 \leq \text{cl}_{\mathcal{F}} X_2$ и $\text{cl}_{\mathcal{V}} X_2 \leq \text{cl}_{\mathcal{V}} X_1$, то будем писать $\text{cl } X_1 = \text{cl } X_2$.

Предложение 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, а для некоторого счетного семейства $\{X_n | n=1, 2, \dots\}$ пространства X имеем:

1. $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} fX_n$.
2. $f|X_n$ — гомеоморфизм для всех $n=1, 2, \dots$. Тогда выполняется неравенство $\text{cl } Y \leq \text{cl } X$, как только $\text{cl}_{\mathcal{F}} X \geq 2$ и $\text{cl}_{\mathcal{Q}} X \geq 2$.

Доказательство. Допустим, что $\tilde{X}$ есть некоторое полное метризуемое пространство, содержащее X , а $\tilde{Y}$ — полное метризуемое пространство, содержащее Y . Предположим, что $\text{cl}_{\mathcal{F}} X = \alpha$ и $\text{cl}_{\mathcal{Q}} X = \beta$, где $\alpha \geq 2$ и $\beta \geq 2$. По теореме М. А. Лаврентьева об инвариантности классов [11, с. 443], $X \in \mathcal{F}_{\alpha}(\tilde{X})$ и $X \in \mathcal{Q}_{\beta}(\tilde{X})$.

По теореме М. А. Лаврентьева о продолжении гомеоморфизмов, [11, 439], существуют G_{δ} -множества $\{\tilde{X}_n | n=1, 2, \dots\}$ пространства $\tilde{X}$ G_{δ} -множества $\{\tilde{Y}_n | n=1, 2, \dots\}$ пространства $\tilde{Y}$ и гомеоморфизмы $\{g_n: \tilde{X}_n \rightarrow \tilde{Y}_n | n=1, 2, \dots\}$ такие, что $X_n \subseteq \tilde{X}_n$ и $g_n|X_n = f|X_n$ для всех $n=1, 2, \dots$. В силу непрерывности отображения f , имеем $f(\tilde{X}_n \cap X) = g_n(\tilde{X}_n \cap X)$ для любого числа n . (Таким образом, мы могли бы считать, что $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — суть G_{δ} -множества пространства X , а $X_n = \tilde{X}_n \cap X$ для всех $n=1, 2, \dots$). Поэтому $\bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(\tilde{X}_n \cap X) = Y$. Кроме того, для любого числа n множество $\tilde{Y}_n \cap Y$ принадлежит семействам $\mathcal{F}_{\alpha}(\tilde{Y})$ и $\mathcal{Q}_{\beta}(\tilde{Y})$.

Положим $L_0 = \tilde{Y} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{Y}_n$ и $L_n = \tilde{Y}_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \tilde{Y}_i$ для $n=1, 2, \dots$. Тогда $\{L_n | n=0, 1, 2, \dots\}$ есть дизъюнктное покрытие пространства $\tilde{Y}$ из элементов класса $D_2(\tilde{Y})$. По построению, $Y \cap L_0 = \emptyset$ и $Y \cap L_n = L_n \cap g_n(\tilde{X}_n \cap X)$ для $n=1, 2, \dots$. Поэтому $Y \cap L_n \in \mathcal{F}_{\alpha}(\tilde{Y}) \cap \mathcal{Q}_{\beta}(\tilde{Y})$ для всех $n=0, 1, 2, \dots$. На основании леммы 6, $Y \in \mathcal{F}_{\alpha}(\tilde{Y})$ и $Y \in \mathcal{Q}_{\beta}(\tilde{Y})$. Значит, $\text{cl}_{\mathcal{F}} Y \leq \alpha$ и $\text{cl}_{\mathcal{Q}} Y \leq \beta$, то есть $\text{cl } Y \leq \text{cl } X$. Предложение доказано.

Результаты пункта 4 позволяют, в совокупности с предложением 2, установить справедливость следующих утверждений.

Следствие 9. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — равномерно почти полное индуктивно открытое счетнократное отображение пространства X на пространство Y . Тогда:

- 1) $\text{cl}_{\mathcal{F}} Y \leq \text{cl}_{\mathcal{F}} X$, если $\text{cl}_{\mathcal{F}} X \geq 2$;
- 2) $\text{cl}_{\mathcal{Q}} Y \leq \text{cl}_{\mathcal{Q}} X$, если $\text{cl}_{\mathcal{Q}} X \geq 1$.

Следствие 10. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — замкнутое изолированное отображение пространства X на Y . Тогда:

- 1) $\text{cl}_{\mathcal{F}} Y \leq \text{cl}_{\mathcal{F}} X$, если $\text{cl}_{\mathcal{F}} X \geq 2$;
- 2) $\text{cl}_{\mathcal{Q}} X \leq \text{cl}_{\mathcal{Q}} Y$, если $\text{cl}_{\mathcal{Q}} X \geq 1$.

Теорема 10. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — замкнутое счетнократное отображение пространства X на Y . Тогда:

- 1) $\text{cl}_{\mathcal{F}} X = \text{cl}_{\mathcal{F}} Y$, если $\text{cl}_{\mathcal{F}} Y \geq 2$;
- 2) $\text{cl}_{\mathcal{Q}} X = \text{cl}_{\mathcal{Q}} Y$, если $\text{cl}_{\mathcal{Q}} Y \geq 1$.

Доказательство. По теореме Н. С. Лашнева [12], существует σ -дискретное подмножество L пространства Y такое, что $f^{-1}(y)$ есть компакт для $y \in Y_1 = Y \setminus L$. Так как отображение f счетнократно, то $M = f^{-1}L$ есть σ -дискретное подмножество пространства X . Положим $X_1 = X \setminus M$ и $f_1 = f|X_1$.

Тогда $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ является совершенным счетнократным отображением. По теореме И. А. Вайнштейна [9], $\text{cl} X_1 \leq \text{cl} Y_1$. Согласно следствию 10, $\text{cl} Y_1 \leq \text{cl} X_1$. Так как $\text{cl} L \leq 1$ и $\text{cl} M \leq 1$, то $\text{cl}(X_1 \cup M) = \text{cl}(Y_1 \cup L)$. Теорема доказана.

Исследование дескрептивных свойств замкнутых отображений начато в работе И. А. Вайнштейна [9]. Поведение борелевских классов при замкнутых отображениях пространств со счетной базой исследовано в работах А. Д. Тайманова [20; 21], который доказал, что „если $f: X \rightarrow Y$ — замкнутое отображение пространства со счетной базой X и X есть абсолютно борелевское множество класса $\alpha \geq 2$, то Y есть абсолютно борелевское множество класса $\leq 1 + \alpha$ “. Он же поставил вопрос о том, является ли Y абсолютно борелевским множеством класса α . Теорема 10 дает положительный ответ на задачу Тайманова в случае замкнутых счетнократных отображений. В случае произвольных метрических пространств аналог теоремы Тайманова получен М. М. Чобаном [24]. Поведение борелевских классов при открытых изолированных отображениях в классе пространств со счетной базой исследовано А. Д. Таймановым [19].

Поведение борелевских классов при открытых отображениях связано с размерностью образа. Имеет место

Теорема 11. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — равномерно почти полное индуктивно открытое отображение пространства X на счетномерное пространство Y . Если $\text{cl}_Y X \geq 2$ и $\text{cl}_X X \geq 2$, то $\text{cl} Y \leq \text{cl} X$.

Доказательство. По предположению $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, где $\dim Y_n = 0$ для любого $n = 1, 2, \dots$. В силу теоремы 3 существуют такие подмножества $X_1, X_2, \dots$ пространства X , для которых $f X_n = Y_n$ и $f|_{X_n}$ есть гомеоморфизм для любого n . Предложение 2 завершает доказательство теоремы.

Для счетномерных пространств имеет место

Теорема 12. Пусть $\theta: X \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ — полунепрерывное снизу отображение счетномерного паракомпакта X в полное метризуемое пространство. Если множество $L = \{x \in X \mid \theta(x) \notin \mathcal{F}(Y)\}$ σ -дискретно в X , то для θ существует однозначное σ -непрерывное сечение.

Доказательство. Пусть $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где $\dim X_n = 0$ для всех n . В силу теоремы 2 из [26] для каждого n существует непрерывное сечение $f_n: X \rightarrow Y$ отображения $\theta|_{X_n}$. Тогда отображения f_n порождают σ -непрерывное сечение отображения θ .

Следствие 11. Для метризуемого пространства X следующие утверждения равносильны:

1. Пространство X счетномерно.

2. Для любого полунепрерывного снизу отображения $\theta: X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ в произвольное полное метризуемое пространство Y существует σ -непрерывное сечение.

3. Для любого полунепрерывного снизу отображения $\theta: X \rightarrow C(Y)$ в произвольное метризуемое пространство существует σ -непрерывное сечение.

Доказательство. Импликации $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ вытекают из теорем 12 и 2. Докажем импликацию $3 \rightarrow 1$. Существует открытое непрерывное бикомпактное отображение $f: Y \rightarrow X$ нульмерного метризуемого пространства Y на X (см. [7]). Тогда для отображения $\theta = f^{-1}: X \rightarrow C(Y)$ существует σ -непрерывное сечение $g: X \rightarrow Y$. Пусть $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ и $g|_{X_n}$ — непрерывно для всех n . Тогда $g|_{X_n}$ есть гомеоморфизм для любого n . Таким образом $\dim X_n = 0$ для каждого n . Поэтому пространство X счетномерно. Доказательство завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. О некоторых результатах в теории топологических пространств, полученных за последние 25 лет. *Успехи мат. наук*, 15, 1960, № 2, 25—95.
2. P. S. Alexandroff. On some results concerning Topological spaces and their continuous mappings. *Proc. Symp. Gen. Topology*, Prague, 1961, 41—54.
3. П. С. Александров. О некоторых основных направлениях в общей топологии. *Успехи мат. наук*, 19, 1964, № 6, 3—46.
4. П. С. Александров. О счетнократных открытых отображениях. *Доклады АН СССР*, 4, 1936, 283—288.
5. П. С. Александров. О метризации топологических пространств. *Бюлл. Польской АН, сер. матем.*, 8, 1960, № 3, 135—140.
6. А. В. Архангельский. Отображения и пространства. *Успехи мат. наук*, 21, 1966, № 4, 133—184.
7. А. В. Архангельский. Отображения открытые и близкие к открытым. Связи между пространствами. *Труды Моск. мат. об-ва*, 15, 1966, 181—223.
8. А. В. Архангельский. О замкнутых отображениях, бикомпактных множествах и одной задаче П. С. Александрова. *Мат. сб.*, 69, 1966, № 1, 13—33.
9. И. А. Вайнштейн. О замкнутых отображениях. *Ученые записки Моск. гос. ун-та, Математика*, 5, 1952, вып. 135, 3—53.
10. А. Н. Колмогоров. Точки локальной топологичности счетнократных открытых отображений компактов. *Доклады АН СССР*, 30, 1941, 477—479.
11. К. Куратовский. Топология, I. Москва, 1966.
12. Н. С. Лашнев. О непрерывных разбиениях и замкнутых отображениях метрических пространств. *Доклады АН СССР*, 165, 1965, 756—758.
13. E. Michael. Selected selection theorems. *Amer. Math. Monthly*, 63, 1956, 233—238.
14. E. Michael. A theorems on semi-continuous set-valued functions. *Duke Math J.*, 26, 1969, 647—656.
15. Б. А. Пасынков. О сечениях над нульмерными подмножествами фактор-пространств локально бикомпактных групп. *Доклады АН СССР*, 178, 1968, 1255—1258.
16. Б. А. Пасынков. О топологических группах. *Доклады АН СССР*, 188, 1969, 286—289.
17. В. И. Пономарев. Аксиомы счетности и непрерывные отображения. *Бюлл. Польской АН, сер. Матем.*, 8, 1960, № 3, 127—134.
18. A. H. Stone. Metrizability of decomposition spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7, 1956, 690—700.
19. А. Д. Тайманов. Об открытых образах борелевских множеств. *Мат. сб.*, 37, 1955, 293—300.
20. А. Д. Тайманов. О замкнутых отображениях, I. *Мат. сб.*, 36, 1955, 349—352.
21. А. Д. Тайманов. О замкнутых отображениях, II. *Мат. сб.*, 52, 1960, 579—588.
22. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. Москва—Ленинград, 1937.
23. М. М. Чобан. Многозначные отображения и борелевские множества, I. *Труды Моск. мат. об-ва*, 22, 1970, 229—250.
24. М. М. Чобан. Многозначные отображения и борелевские множества, II. *Труды Моск. мат. об-ва*, 23, 1970, 277—301.
25. М. М. Чобан. Многозначные отображения и некоторые смежные вопросы. *Доклады АН СССР*, 190, 1970, 293—296.
26. М. М. Чобан. Редукционные теоремы о существовании непрерывных сечений. Сечения над подмножествами фактор-пространств топологических групп. *Мат. исследования*, 8, 1973, № 4, 111—156.

Тираспольский пединститут
Тирасполь, Молдавская ССР

Поступила 19. 12. 1977