# Serdica
## Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика
## Българско математическо списание

# APPROXIMATION VON MISCHUNGEN POISSONSCHER PUNKTPROZESSE DURCH VERSCHOBENE PUNKTPROZESSE

KARL-HEINZ FICHTNER, JOHANNES KERSTAN

Es seien $P$ ein Punktprozeß und $R$ ein substochastischer Kern auf einem vollständigen separablen metrischen Raum. Unter gewissen Voraussetzungen kann man einen neuen Punktprozeß $P_R$ konstruieren, indem man alle Punkte von $P$ unabhängig voneinander gemäß $R$ verschiebt. Für Folgen $R_1, R_2, \ldots$ substochastischer Kerne wurden von Dobruschin (1956), Debes et al. (1971) und den Verfassern hinreichende Bedingungen untersucht, unter denen die Folge der Punktprozesse $P_{R_1}, P_{R_2}, \ldots$ schwach gegen eine Mischung Poissonscher Punktprozesse konvergiert. In der vorliegenden Arbeit werden, unter gewissen natürlichen Voraussetzungen, allgemeine hinreichende und notwendige Kriterien dafür ermittelt, daß eine Mischung Poissonscher Punktprozesse durch eine Folge von Verschiebungen $P_{R_1}, P_{R_2}, \ldots$ eines Punktprozesses $P$ approximiert wird.

## 1. Grundbegriffe und Resultate.

1.1. Bezeichnungen. Bei den in diesem Abschnitt zusammengestellten Begriffen und Bezeichnungen verzichten wir auf nähere Erläuterungen und verweisen statt dessen auf die zusammenfassende Darstellung in [4].

Es seien $E$ ein vollständiger separabler metrischer Raum, $\mathfrak{A}$ die $\sigma$-Algebra der Borelmengen in $E$ und $\mathfrak{B}$ das System der beschränkten Mengen aus $\mathfrak{A}$. Ein Maß $\mu$ auf $\mathfrak{A}$ heißt $\mathfrak{B}$-endlich, wenn $\mu(B)<\infty$ für alle $B\in\mathfrak{B}$ ist. Mit $M$ bezeichnen wir die Menge aller Punktfolgen auf $E$, d. h., $M$ ist die Menge aller ganzzahligen $\mathfrak{B}$-endlichen Maße. $\mathfrak{M}$ sei die kleinste $\sigma$-Algebra auf $M$ bezüglich der die Abbildungen $\xi_B(\Phi)=\Phi(B)$; $\forall\ \Phi\in M$ für alle $B\in\mathfrak{B}$ meßbar sind. Ein Verteilungsgesetz $P$ auf dem meßbaren Raum $[M, \mathfrak{M}]$ nennen wir Punktprozeß. Das Intensitätsmaß $\Lambda_p$ von $P$ ist definiert durch $\Lambda_p(A)=\int\Phi(A)P(d\Phi)$; $\forall\ A\in\mathfrak{A}$ $P$ ist von endlicher Intensität, wenn $\Lambda_p$ ein $\mathfrak{B}$-endliches Maß ist.

Für jede Folge $B_1,\ldots, B_n\in\mathfrak{B}$ bezeichen wir mit $P^{B_1,\ldots,B_n}$ das Verteilungsgesetz des zufälligen Vektors $(\xi_{B_1},\ldots,\xi_{B_n})$ über dem Wahrscheinlichkeitsraum $[M,\mathfrak{M},P]$. Weiter bezeichnen wir für jedes $A\in\mathfrak{A}$ mit ${}_AP$ das durch die Abbildung $\Phi\to\Phi(\cap A)$ induzierte Verteilungsgesetz auf $[M,\mathfrak{M}]$.

Es seien nun $R^+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen und $[D_1, \mathfrak{D}_1]$, $[D_2, \mathfrak{D}_2]$ zwei meßbare Räume. Unter einem Kern von $[D_1, \mathfrak{D}_1]$ in $[D_2, \mathfrak{D}_2]$ verstehen wir eine Abbildung $K$ von $D_1\times\mathfrak{D}_2$ in $R^+\cup\{+\infty\}$ dergestalt, daß für jedes $A\in\mathfrak{D}_2$ die Abbildung $x\to K(x, A)$ meßbar ist und für jedes $x\in D_1$ durch $K(x,\ )$ ein Maß auf $\mathfrak{D}_2$ gegeben ist. $K$ heißt substochastisch, wenn $K(x, D_2)\leq 1$ für alle $x\in D_1$ ist und stochastisch wenn gilt: $K(x, D_2)=1$; $\forall x\in D_1$. Ist $[D_1\ \mathfrak{D}_1]=[D_2, \mathfrak{D}_2]=[D, \mathfrak{D}]$ so sprechen wir von einem Kern auf $[D, \mathfrak{D}]$. Ein Kern $K$ von $[D, \mathfrak{D}]$ in $[E, \mathfrak{A}]$ heißt $\mathfrak{B}$-endlich, wenn für alle $x\in D$ das Maß $K(x,\ )$ $\mathfrak{B}$-endlich ist. Für einen Kern $K$ von $[D_1, \mathfrak{D}_1]$ in $[D_2, \mathfrak{D}_2]$ und ein Maß $\mu$ auf $\mathfrak{D}_1$ bezeichnen wir mit $\mu{*}K$ das durch $\mu{*}K(A)=\int K(x, A)\mu(dx)$; $\forall A\in\mathfrak{D}_2$ definierte Maß auf $\mathfrak{D}_2$.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 4, 1978, p. 367—376.

1.2. **Verschiebungen von Punktprozessen durch substochastische Kerne.** Es sei $R$ ein substochastischer Kern auf $[E, \mathfrak{A}]$. Mit $M(R)$ bezeichnen wir die Menge aller $\Phi \in M$ für die $\Phi * R$ ein $\mathfrak{B}$-endliches Maß ist. Weiter bezeichnet für jedes $x \in E$ $(\delta_{\delta_x})_R$ den durch

$$(\delta_{\delta_x})_R(\{\Phi \in M; \quad \Phi(E) \leq 1\}) = 1, \ (\delta_{\delta_x})_R(\{\Phi \in M; \quad \Phi(A) = 1\}) = R(x, A); \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

charakterisierten Punktprozeß. Für alle $\Phi \in M(R)$ existiert die Faltung (siehe [2])

$$(\delta_\Phi)_R = \mathop{*}_{x \in E, \Phi(x) > 0} ((\delta_{\delta_k})_R)^{\Phi(x)*}.$$

Für jeden Punktprozeß $P$ mit $P(M(R)) = 1$ setzen wir nun

$$P_R(Y) =_{\mathrm{Def}} \int_{M(R)} (\delta_\Phi)_R(Y)\, P(d\Phi), \quad \forall Y \in \mathfrak{M}.$$

Der Punktprozeß $P$ läßt sich deuten als das Verteilungsgesetz eines zufälligen Punktsystems aus $E$. Verschiebt man nun alle Punkte dieses Punktsystems unabhängig voneinander dergestalt, daß ein ursprünglich am Ort $x \in E$ befindlicher Punkt nach der Verschiebung mit Wahrscheinlichkeit $R(x, A)$ in der Menge $A \in \mathfrak{A}$ liegt und mit Wahrscheinlichkeit $1 - R(x, E)$ aus $E$ entfernt wird, so gelangt man zu einem neuen zufälligen Punktsystem, dessen Verteilungsgesetz mit $P_R$ identisch ist (siehe etwa [2]). Wir bezeichnen deshalb $P_R$ als Verschiebung von $P$ gemäß $R$.

Die Forderung $P(M(R)) = 1$ ist stets erfüllt, wenn $A_p * R$ ein $\mathfrak{B}$-endliches Maß ist (vergleiche etwa [2]).

1.3. **Mischungen Poissonscher Prozesse und Grundabschätzungen.** Für jedes $\mathfrak{B}$-endliche Maß $\mu$ auf $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit $P_{(\mu)}$ den Poissonschen Punktprozeß mit dem Intensitätsmaß $\mu$. Zu jedem $\mathfrak{B}$-endlichen Kern $K$ von einem meßbaren Raum $[D, \mathfrak{D}]$ in $[E, \mathfrak{A}]$ ist dann durch $S^K(x, Y) := P_{(K(x, \cdot))}(Y); \ \forall x \in D, \ \forall Y \in \mathfrak{M}$, ein stochastischer Kern $S^K$ von $[D, \mathfrak{D}]$ in $[M, \mathfrak{M}]$ definiert. Das folgende Lemma enthält eine Grundabschätzung für den Variationsabstand (stets mit $\| \ \|_{\mathrm{Var}}$ bezeichnet) zweier Mischungen Poissonscher Prozesse.

**Lemma 1.** *Es seien $K$ und $L$ zwei $\mathfrak{B}$-endliche Kerne von einem meßbaren Raum $[D, \mathfrak{D}]$ in $[E, \mathfrak{A}]$, $Q$ ein Verteilungsgesetz auf $[D, \mathfrak{D}]$ und $B_1, \ldots, B_n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{B}$.*

*Dann gilt:*

$$\|(Q * S^K)^{B_1, \ldots, B_n} - (Q * S^L)^{B_1, \ldots, B_n}\|_{\mathrm{Var}}$$
$$\leq 2 \int \min\{1, \sum_{i=1}^{n} |K(x, B_i) - L(x, B_i)|\}\, Q(dx).$$

Es sei nun $R$ ein substochastischer Kern auf $[E, \mathfrak{A}]$. Durch

$$K^R(\Phi, B) =_{\mathrm{Def}} \begin{cases} \Phi * R(B); & \forall \Phi \in M(R), \\ 0 & ; \quad \forall \Phi \in M \setminus M(R), \end{cases}$$

ist ein $\mathfrak{B}$-endlicher Kern $K_R$ von $[M, \mathfrak{M}]$ in $[E, \mathfrak{A}]$ definiert. Wie man leicht sieht, gilt für jeden Punktprozeß $P$ mit $P(M(R)) = 1$:

$$P * S^{K^R} = \int_{M(R)} P_{(\Phi * R)}(\ )\, P(d\Phi).$$

Lemma 2. *Es seien $R$ ein substochastischer Kern auf $[E, \mathfrak{A}]$ und $P$ ein Punktprozeß mit $P(M(R)) = 1$. Für alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt dann:*

$$\| {}_B(P_R) - {}_B(P * S^{K^R}) \|_{\mathrm{Var}} \leq 2 \int \min \{1, \int (R(x, B))^2 \Phi(dx)\} P(d\Phi).$$

1.4. Approximation von Mischungen Poissonscher Prozesse. In diesem Abschnitt soll dargestellt werden, wann eine Folge von Verschiebungen $P_{R_0}, P_{R_1}, \ldots$ eines Punktprozesses $P$ eine Mischung Poissonscher Punktprozesse approximiert.

Theorem 1. *Es seien $\mathfrak{H}$ ein Halbring von Mengen aus $\mathfrak{B}$, $K$ ein $\mathfrak{B}$-endlicher Kern von $[M, \mathfrak{M}]$ in $[E, \mathfrak{A}]$, $P$ ein Punktprozeß und $R_0, R_1, \ldots$ eine Folge substochastischer Kerne auf $[E, \mathfrak{A}]$ mit:*

(Ver 0) *Für alle* $n = 0, 1, \ldots$ ist $P(M(R_n)) = 1$,

(Erg 0) *Für alle $\varepsilon > 0$ und $B \in \mathfrak{H}$ gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} P(\{\Phi \in M(R);\ |\Phi * R_n(B) - K(\Phi, B)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

*Dann sind folgende beide Aussagen äquivalent:*

(Kon) *Für alle Folgen $B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{H}$ gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| P_{R_n}^{B_1, \ldots, B_k} - (P * S^K)^{B_1, \ldots, B_k} \right\|_{\mathrm{Var}} = 0,$$

(DK 0) *Für alle $\varepsilon > 0$ und $B \in \mathfrak{B}$ gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} P(\{\Phi : \int (R_n(x, B))^2 \Phi(dx) \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Bei Konvergenzuntersuchungen von Folgen verschobener Punktprozesse werden gewöhnlich schärfere Voraussetzungen als (Ver 0) und (Erg 0) gemacht (siehe etwa [1; 6] und [2]). Bei den Untersuchungen in [5] wird speziell das folgende Theorem ausgenutzt.

Theorem 2. *Es seien $\mathfrak{H}$ ein Halbring von Mengen aus $\mathfrak{B}$, $K$ ein $\mathfrak{B}$-endlicher Kern von $[M, \mathfrak{M}]$ in $[E, \mathfrak{A}]$, $P$ ein Punktprozeß und $R_0, R_1, \ldots$ eine Folge substohastischer Kerne auf $[E, \mathfrak{A}]$ mit:*

(Ver 1) *Für alle $n = 0, 1, \ldots$ ist $\Lambda_p * R_n$ ein $\mathfrak{B}$-endliches Maß auf $\mathfrak{A}$.*

(Erg 1) *Für alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \int | \Phi * R_n(B) - K(\Phi, B | P(d\Phi) = 0.$$

*Dann ist die Aussage* (Kon) *unter Theorem* 1 *äquivalent zu*

(DK 1) *Für alle $B \in \mathfrak{H}$ ist*

$$\lim_{n \to \infty} \int (R_n(x, B))^2 \Lambda_p(dx) = 0.$$

Wir spezialisieren jetzt die Situation in den Theoremen 1 und 2 auf den Fall, daß der Punktprozeß $P$ die Gestalt $\delta^\Phi$ für ein $\Phi \in M$ hat. Vom $\mathfrak{B}$-endlichen Kern $K$ bleibt dann nur noch das $\mathfrak{B}$-endliche Maß $K(\Phi, \ )$ als wesentlich übrig. Die Bedingungen (Ver 0), (Ver 1) sind in diesem Falle ebenso wie die Bedingungen (Erg 0), (Erg 1) und (DK 0), (DK 1) gleichwertig. Die Theoreme 1 und 2 lassen sich zu einer Charakterisierung von (Kon) veschärfen.

Theorem 3. *Es seien $\mathfrak{H}$ ein Halbring von Mengen aus $\mathfrak{B}$, $\mu$ ein $\mathfrak{B}$-endliches Maß auf $\mathfrak{A}$, $\Phi \in M$ und $R_0, R_1, \ldots$ eine Folge substochastischer Kerne auf $[E, \mathfrak{A}]$ mit:*

(Ver) *Für alle $n = 0, 1, \ldots$ ist $\Phi \in M(R_n)$.*

*Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*
(I) *Für alle Folgen* $B_1, \ldots B_s \in \mathfrak{H}$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (\delta_\Phi)_{R_n}^{B_1, \ldots, B_s} - P_{(\mu)}^{B_1, \ldots, B_s} \right\|_{\mathrm{Var}} = 0.$$

(II) *Für alle* $B \in \mathfrak{H}$ *gelten die Beziehungen:*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi * R_n(B) = \mu(B), \quad \lim_{n\to\infty} \int (R_n(x, B))^2 \, \Phi(dx) = 0.$$

1.6. Ein Satz über Poissonsche Punktprozesse. Es seien wieder $\mathfrak{H}$ ein Halbring von Mengen aus $\mathfrak{B}$ und $R_0, R_1, \ldots$ eine Folge substochastischer Kerne auf $[E, \mathfrak{A}]$.

Theorem 4. *Sind $\lambda$ und $\mu$ $\mathfrak{B}$-endliche Maße auf $\mathfrak{A}$, so daß für alle $n = 0, 1, \ldots$ auch $\mu * R_n$ ein $\mathfrak{B}$-endliches Maß ist, dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*
(E) *Für alle* $B \in \mathfrak{H}$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int |\Phi * R_n(B) - \lambda(B)| \, P_{(\mu)}(d\Phi) = 0.$$

(F) *Für alle* $B \in \mathfrak{H}$ *gelten die Beziehungen:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu * R_n(B) = \lambda(B), \quad \lim_{n\to\infty} \int (R_n(x, B))^2 \, \mu(dx) = 0.$$

Die Forderung (Ver 0) unter Theorem 1 ist offensichtlich minimal, da nur so die Existenz der Folge $P_{R_0}, P_{R_1}, \ldots$ gesichert werden kann. Ihre Verschärfung (Ver 1) ist bei Verschiebungen von Punktprozessen endlicher Intensität im allgemeinen eine natürliche Voraussetzung. Die Forderungen (Erg 0) beziehungsweise ihre Verschärfung (Erg 1) erscheinen auf den ersten Blick jedoch rein technischer Natur zu sein. Daß das nicht so ist, erkennt man mit Hilfe von Theorem 4 auf die folgende Weise:

Wir spezialisieren die Situation in Theorem 2 auf $P = P_{(\mu)}$, $K(\Phi, \,) = \lambda; \forall \Phi \in M$. Die Aussage (Erg 1) ist dann identisch mit der Aussage (E) unter Theorem 4. Weiter ist in diesem Fall die Bedingung $\lim_{n\to\infty} \mu * R_n(B) = \lambda(B)$; $\forall B \in \mathfrak{H}$ äquivalent mit (Kon). Ist deshalb die Behauptung von Theorem 2 richtig, d. h. sind (Kon) und (DK 1) äquivalent, und ist (Kon) oder (DK 1) gültig, dann muß wegen Theorem 4 auch die Forderung (Erg 1) und damit auch (Erg 0) erfüllt sein.

**2. Beweis von Lemma 1 und Lemma 2.** Bei den Beweisen stützen wir uns auf die folgenden beiden bekannten Beziehungen:

2.1. Es sei $(\alpha_r)_{r=1, 2, \ldots}$ eine Folge von 0-1-Verteilungen mit den Parametern $[q_1^{(r)}, \ldots, q_n^{(r)}]$, so daß $\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} q_i^{(r)} < \infty$ ist (d. h., die Folge der Faltungen $\alpha_1 * \ldots * \alpha_m$ konvergiert gegen ein Verteilungsgesetz $\alpha$). Bezeichnen wir mit $\beta$ die $n$-dimensionale Poissonverteilung mit den Parametern $[\sum_{r=1}^{\infty} q_1^{(r)}, \ldots \sum_{r=1}^{\infty} q_n^{(r)}]$, so gilt:

$$\|\alpha - \beta\|_{\mathrm{Var}} \leq 2 \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} q_i^{(r)}\right)^2.$$

2.2. Für zwei Poissonsche Verteilungsgesetze $\alpha$ bzw. $\beta$ mit den Parametern $[q_1, \ldots, q_n]$ bzw. $[q'_1, \ldots, q'_n]$ gilt: $\|\alpha - \beta\|_{\mathrm{Var}} \leq 2 \sum_{i=1}^{n} |q_i - q'_i|$.

B e w e i s  v o n  L e m m a 1. Für alle $x \in E$ sind $P^{B_1, \ldots, B_n}_{(K(x, \cdot))}$ bzw. $P^{B_1, \ldots, B_n}_{(L(x, \cdot))}$ Poissonsche Verteilungsgesetze mit den Parametern $K(x, B_1), \ldots, K(x, B_n)$ bzw. $L(x, B_1), \ldots, L(x, B_n)$. Wegen 2.2. ist deshalb stets

$$\| (S^K(x, \cdot))^{B_1, \ldots, B_n} - (S^L(x, \cdot))^{B_1, \ldots, B_n} \|_{\mathrm{Var}} \leqq 2 \sum_{i=1}^{n} | K(x, B_i) - L(x, B_i) | .$$

Andererseits ist $\| (S^K(x, \cdot))^{B_1, \ldots, B_n} - (S^L(x, \cdot))^{B_1, \ldots, B_n} \|_{\mathrm{Var}} \leqq 2$. Wir haben damit für alle $x \in E$

$$\| (S^K(x, \cdot))^{B_1, \ldots, B_n} - (S^L(x, \cdot))^{B_1, \ldots, B_n} \|_{\mathrm{Var}} \leqq 2 \min \{ 1, \sum_{i=1}^{n} | K(x, B_i) - L(x, B_i) | \}.$$

Wegen

$$\| (Q * S^K)^{B_1, \ldots, B_n} - (Q * S^L)^{B_1, \ldots, B_n} \|_{\mathrm{Var}} \leqq \int \| (S^K(x, \cdot))^{B_1, \ldots, B_n} - (S^L(x, \cdot))^{B_1, \ldots, B_n} \|_{\mathrm{Var}} \, Q(dx)$$

können wir daraus auf die Behauptung von Lemma 1 schließen.

B e w e i s  v o n  L e m m a 2. Es bezeichne $\mathfrak{Z}$ die Menge aller endlichen Zerlegungen $(B_1, \ldots, B_n)$ der Menge $B$. Es ist dann

$$\|_B(P_R) - _B(P * S^{K^R})\|_{\mathrm{Var}} \leqq \int_{M(R)} \sup_{(B_1, \ldots, B_n) \in \mathfrak{Z}} \| (\delta_\Phi)_R^{B_1, \ldots, B_n} - P_{(\Phi * R)}^{B_1, \ldots, B_n} \|_{\mathrm{Var}} \, P(d\Phi).$$

Zum Beweis von Lemma 2 genügt es deshalb zu zeigen, daß für jedes $\Phi \in M(R)$ und jede Folge $B_1, \ldots, B_n$ paarweise disjunkter Mengen mit $\cup_{i=1}^{n} B_i = B$ gilt:

(1) $$\| (\delta_\Phi)_R^{B_1, \ldots, B_n} - P_{(\Phi * R)}^{B_1, \ldots, B_n} \|_{\mathrm{Var}} \leqq 2 \int (R(x, B))^2 \, \Phi(dx).$$

Dazu sei $\Phi \in M(R)$ und $B_1, \ldots, B_n$ eine solche Mengenfolge. $P_{(\Phi * R)}^{B_1, \ldots, B_n}$ ist dann eine $n$-dimensionale Poissonverteilung mit den Parametern $[\sum_{x \in E,\ \Phi(x) > 0} \Phi(\{x\}) R(x, B_1), \ldots, \sum_{x \in E,\ \Phi(x) > 0} \Phi(\{x\}) R(x, B_n)]$, während $(\delta_\Phi)_R^{B_1, \ldots, B_n}$ sich als abzählbare Faltung von 0-1-Verteilungen mit den Parametern $[R(x, B_1), \ldots, R(x, B_n)]$ darstellen läßt. Wegen 2.1. ist deshalb

$$\| (\delta_\Phi)_R^{B_1, \ldots, B_n} - P_{(\Phi * R)}^{B_1, \ldots, B_n} \|_{\mathrm{Var}} \leqq 2 \sum_{x \in E \Phi(x) > 0} \Phi(x) \, (\sum_{i=1}^{n} R(x, B_i))^2 = \int (R(x, B))^2 \, \Phi(dx)$$

(1) ist also richtig und Lemma 2 damit bewiesen.

**3. Beweis von Theorem 1.** Wir zeigen zunächst:

3.1. Aus der Bedingung (DK 0) folgt die Aussage (Kon) Beweis: Wir können uns auf den Fall beschränken, daß die Mengen $B_1, \ldots, B_k$ paarweise disjunkt sind. Es sei $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$. Unter Verwendung von Lemma 1 und Lemma 2 erhalten wir dann:

(2) $$\| P_{R_n}^{B_1, \ldots, B_k} - (P * S_K)^{B_1, \ldots, B_k} \|_{\mathrm{Var}}$$

$$\leq 2\int \min\{1, \int (R_n(x, B)^2 \Phi(dx)\} P(d\Phi)$$
$$+2\int \min\{1, \sum_{i=1}^{k} |\Phi * R_n(B_i) - K(\Phi, B_i)|\} P(d\Phi).$$

Wegen (Erg 0) ist

(3) $$\lim_{n\to\infty} \int \min\{1, \sum_{i=1}^{k} |\Phi * R_n(B_i) - K(\Phi, B_i)|\} P(d\Phi) = 0.$$

Aus (DK 0) folgt wegen

$$\int (R_n(x, B))^2 \Phi(dx) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} [\int \Phi(dx)\,(R_n(x, B_i))^2]^{1/2}\right)^2$$

die Beziehung

(4) $$\lim_{n\to\infty} \int \min\{1, \int (R_n(x, B))^2 \Phi(dx)\} P(d\Phi) = 0.$$

2), (3) und (4) ergeben $\lim_{n\to\infty} \| P_{R_n}^{B_1, \ldots, B_k} - (P * S^K)^{B_1, \ldots, B_k} \|_{Var} = 0$. Damit ist (3. 1. bewiesen.

Wir müssen noch zeigen, daß gilt:

3.2. *Aus* (Kon) *folgt* (DK 0).

Beweis. Es sei $B \in \mathfrak{B}$. Wir setzen

$$f_n(x) = \begin{cases} \ln [1/(1 - R_n(x, B)] & \text{falls } R_n(x, B) < 1, \\ +\infty & \text{falls } R_n(x, B) = 1, \end{cases}$$
$$H_n(\Phi) = \exp(-\int f_n(x)\, \Phi(dx)); \quad \forall \Phi \in M.$$

Es ist dann $R_n(x, B) \leq f_n(x)$; $\forall x \in E$; $H_n(\Phi) = (\delta_\Phi)_{R_n}^B(\{0\})$. Aus (Kon) und (Erg 0) erhalten wir

(5) $$\lim_{n\to\infty} \int H_n(\Phi) P(d\Phi) = \int \exp(-K(\Phi, B))\, P(d\Phi),$$

(6) $$\lim_{n\to\infty} P(\{\Phi : |\Phi * R_n(B) - K(\Phi, B)| \geq \varepsilon\}) = 0; \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Aus (6) folgt

(7) $$\lim_{n\to\infty} \int |\exp(-\Phi * R_n(B)) - \exp(-K(\Phi, B))|\, P(d\Phi) = 0.$$

Aus (7) und (5) ergibt sich

(8) $$\lim_{n\to\infty} \int (\exp(-\Phi * R_n(B)) - \exp(-\int f_n(x)\, \Phi(dx)))\, P(d\Phi) = 0.$$

Wegen $R_n(x, B) \leq f_n(x)$ bekommt man aus (7) und (8)

$$\lim_{n\to\infty} \int |H_n(\Phi) - \exp(-K(\Phi, B))|\, P(d\Phi) = 0.$$

Daraus kann man

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\{\Phi: |\int f_n(x)\Phi(dx) - K(\Phi, B)| \geqq \varepsilon\}) = 0$$

ableiten. Weiter haben wir

$$\{\Phi: |\int f_n(x)\Phi(dx) - \Phi * R_n(B)| \geqq \varepsilon\} \subseteq \{\Phi: |\int f_n(x)\Phi(dx) - K(\Phi, B)| \geqq \varepsilon/2\} \cup \{\Phi: |\Phi * R_n(B) - K(\Phi, B)| \geqq \varepsilon/2\}.$$

Aus (6) und (9) folgt deshalb

$$(10)\qquad \lim_{n\to\infty} P(\{\Phi: |\int f_n(x)\Phi(dx) - \Phi * R_n(B)| \geqq \varepsilon\}) = 0; \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Nach der Definition von $f_n$ ist stets $f_n(x) - R_n(x, B) \geqq (R_n(x, B))^2/2$. Aus (10) können wir deshalb auf $\lim_{n\to\infty} P(\{\Phi: \int (R_n(x, B))^2 \Phi(dx) \geqq \varepsilon\}) = 0; \quad \forall\, \varepsilon > 0$, schließen. Damit ist 3.2. bewiesen und der Beweis von Theorem 1 abgeschlossen.

**4. Beweis von Theorem 2.** Aus (Ver 1) und (Erg 1) folgt sofort, daß $P * K(B) < \infty$ für alle $B \in \mathfrak{H}$ ist. Auch sind mit (Ver 1) und (Erg 1) immer (Ver 0) und (Erg 0) erfüllt. Setzen wir deshalb voraus, daß (DK 1) und damit auch (DK 0) richtig ist, dann muß nach Theorem 1 die Aussage (Kon) gelten.

Wir nehmen nun an, daß (Kon) erfüllt ist. Nach Theorem 1 ist dann (DK 0) richtig, d. h., wir haben

$$(11)\qquad \lim_{n\to\infty} P(\{\Phi: \int (R_n(x, B))^2 \Phi(dx) \geqq \varepsilon\}) = 0; \quad \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, B \in \mathfrak{H}.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ und $B \in \mathfrak{H}$. Wir setzen $\xi_n(\Phi) = \Phi * R_n(B)$. Weiter seien $a, b > 0$ und $c = a + b$. Aus (11) folgt

$$\int_{\xi_n \leqq c} \int (R_n(x, B))^2 \Phi(dx) P(d\Phi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Weiter hat man

$$(12)\qquad \int_{\xi_n > c} \int (R_n(x, B))^2 \Phi(dx) P(d\Phi) \leqq \int_{\xi_n > c} \xi_n(\Phi) P(d\Phi)$$
$$\leqq \int_{\xi_n > c} K(\Phi, B) P(d\Phi) + \int |\xi_n(\Phi) - K(\Phi, B)| P(d\Phi).$$

Ist $\xi_n(\Phi) > c$, so ist $K(\Phi, B) > a$ oder $K(\Phi, B) \leqq a$ und $\xi_n(\Phi) - K(\Phi, B) > b$ erfüllt. Wir haben deshalb

$$\int_{\xi_n > c} K(\Phi, B) P(d\Phi) \leqq \int_{K(\Phi, B) > c} K(\Phi, B) P(d\Phi) + a P(\{\Phi: \xi_n(\Phi) - K(\Phi, B) > b\})$$
$$\leqq \int_{K(\Phi, B) > c} K(\Phi, B) P(d\Phi) + \frac{a}{b} \int |\xi_n(\Phi) - K(\Phi, B)| P(d).$$

Wegen (Erg 1) ergibt letzteres in Verbindung mit (12)

$$\lim_{n\to\infty} \int (R_n(x, B))^2 \Lambda_P(dx) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int \int (R_n(x, B))^2 \Phi(dx) P(d\Phi) \leqq \int_{K(\ ,B) > a} K(\Phi, B) P(d\Phi).$$

Wir hatten bereits festgestellt, daß die Funktion $K(\ , B)$ bezüglich $P$ integrierbar war. Es ist deshalb $\lim_{a\to\infty} \int_{K(\ , B) > a} K(\Phi, B) P(d\Phi) = 0$. Aus (13) folgt deshalb

$\lim_{n\to\infty}\int(R_n(x, B))^2 \Lambda_p(dx) = 0$. Damit ist gezeigt, daß aus (Kon) die Bedingung (DK 1) folgt und Theorem 2 ist bewiesen.

**5. Beweis von Theorem 3.** Jedes der Theoreme 1 und 2 sichert, daß die Bedingung (II) die Konvergenzaussage (I) nach sich zieht. Wir müssen daher nur zeigen, daß aus (I) stets (II) folgt. Dazu bezeichne $A$ die Menge aller $x \in E$ mit $\Phi(x) > 0$, und es sei $B \in \mathfrak{H}$. Wie beim Beweis von Theorem 1 setzen wir

$$f_n(x) = \begin{cases} \ln[1/(1-R_n(x, B))] & \text{falls} \quad R_n(x, B) < 1, \\ +\infty & \text{falls} \quad R_n(x, B) = 1. \end{cases}$$

Wir haben für alle $n = 1, 2, R_n(x, B) \leq f_n(x)$; $(\delta_\Phi)^B_{R_n}(\{0\}) = \exp(-\int f_n(x)\Phi(dx))$ $\forall x \in E$; Aus (I) folgt deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-\int f_n(x)\Phi(dx)) = \exp(-\mu(B)). \tag{14}$$

Damit ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\Phi(dx) = \mu(B) \tag{15}$$

gesichert. Aus diesen Aussagen ergibt sich weiter, daß ein $n_0$ existiert, so daß für alle $n > n_0$ und alle $x \in A$ $f_n(x) < +\infty$, d. h., $R_n(x, B) < 1$ ist. Für alle $n \geqq n_0$ ist dann

$$(\delta_\Phi)^B_{R_n}(\{1\}) = \int_A [R_n(x, B)/(1-R_n(x, B))] \exp[-\int f_n(x)\Phi(dx)]\Phi(dx).$$

Aus (I) folgt deshalb

$$\mu(B)\exp(-\mu(B)) = \lim_{n\to\infty} \int_A [R_n(x, B)/(1-R_n(x, B))] \exp[-\int f_n(x)\Phi(dx)]\Phi(dx).$$

Das ergibt in Verbindung mit (14) wegen $\exp(-\mu(B)) > 0$

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \int [R_n(x, B)/(1-R_n(x, B))]\Phi(dx). \tag{16}$$

Da für alle a mit $0 \leqq a < 1$ stets $a/(1-a) - \ln[1/(1-a)] \geqq a^2/2(1-a)$ ist, bekommen wir aus (15) und (16)

$$\lim_{n\to\infty} \int [(R_n(x, B))^2/(1-R_n(x, B))]\Phi(dx) = 0. \tag{17}$$

Weiter ist für alle a mit $0 \leq a < 1$ stets $a/(1-a) - a^2/(1-a) = a$. Aus (16) und (17) folgt deshalb $\lim_{n\to\infty} \Phi * R_n(B) = 0$. Weiter folgt sofort aus (17) $\lim_{n\to\infty}\int(R_n(x, B))^2\Phi(dx) = 0$. Damit ist gezeigt, daß (II) aus der Konvergenzaussage (I) folgt, und Theorem 3 ist bewiesen.

**6. Beweis von Theorem 4.** Zum Beweis von Theorem 4 benötigen wir eine Formel für die gemischten Momente von Sekundärgrößen über einem Poissonschen Prozeß. Es sei h eine meßbare nichtnegative reelle Funktion auf $[E, \mathfrak{A}]$. Mit Hilfe der Definition $\xi_h(\Phi) = \int h(x)\Phi(dx)$; $\forall \Phi \in M$, erhalten wir eine meßbare Abbildung von $M$ in $[0, +\infty]$. Wir beweisen nun die folgende Beziehung:

6.1. *Es seien $\mu$ ein $\mathfrak{B}$-endliches Maß auf $\mathfrak{A}$ und $f, g$ nichtnegative meßbare reelle Funktionen auf $[E, \mathfrak{A}]$. Dann gilt:*

$$\int \xi_f(\Phi)\xi_g(\Phi)P_{(\mu)}(d\Phi) = (\int \xi_f(\Phi)P_{(\mu)}(d\Phi))(\int \xi_g(\Phi)P_{(\mu)}(d\Phi)) + \xi_{fg}(\Phi)P_{(\mu)}(d\Phi). \tag{18}$$

**Beweis.** Wir bezeichnen mit $k_A$ die Indikatorfunktion von Mengen $A \in \mathfrak{A}$. Für alle $A, B \in \mathfrak{B}$ erhalten wir folgende Gleichungskette:

$$\left(\int \xi_{k_A}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi)\right)\left(\int \xi_{k_B}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi)\right) + \int \xi_{k_A k_B}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi) = \mu(A)\mu(B) + \mu(A \cap B)$$

$$= \mu(A)\mu(\bar{A} \cap B) + \mu(A \cap B)\mu(A \cap B) + \mu(A \cap B)(1 + \mu(A \cap B))$$

$$= \int \Phi(A)\Phi(\bar{A} \cap B) P_{(\mu)}(d\Phi) + \int \Phi(A \cap \bar{B})\Phi(B \cap A) P_{(\mu)}(d\Phi) + \int (\Phi(A \cap B))^2 P_{(\mu)}(d\Phi)$$

$$= \int \Phi(A)\Phi(B) P_{(\mu)}(d\Phi) = \int \xi_{k_A}(\Phi)\xi_{k_B}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi).$$

Wir haben damit

6.1.1. Die Gleichung (18) ist richtig, wenn $f$ und $g$ Indikatorfunktionen von Mengen aus $\mathfrak{B}$ sind.

Für die nichtnegativen meßbaren Funktionen $f$ und $g$ existieren nun Folgen von Funktionen $(f_n)_{n=1,2,\ldots}$ und $(g_n)_{n=1,2,\ldots}$ der Gestalt

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{s_n} a_i^{(n)} k_{A_i^{(n)}}(x), \quad \forall\, x \in E,\; g_n(x) = \sum_{i=1}^{s_n} b_i^{(n)} k_{B_i}(x), \quad \forall\, x \in E; \text{ mit}$$

$$a_i^{(n)}, b_i^{(n)} \geq 0; \quad A_i^{(n)}, B_i^{(n)} \in \mathfrak{B}; \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots, 1 \leq i \leq s_n;$$

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x),\; g_n(x) \leq g_{n+1}(x); \; \forall\, n = 1, 2, \ldots, \; \forall\, x \in E; \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\; \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x); \; \forall\, x \in E. \tag{20}$$

Auf Grund von **6.1.1.** und der Definition von $\xi_h$ erhalten wir für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$\int \xi_{f_n}(\Phi)\xi_{g_n}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi) = \sum_{i=1}^{s_n}\sum_{j=1}^{s_n} a_i^{(n)} b_j^{(n)} \int \xi_{k_{A_i^{(n)}}}(\Phi)\xi_{k_{B_j^{(n)}}}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi)$$

$$= \sum_{i=1}^{s_n}\sum_{j=1}^{s_n} a_i^{(n)} b_j^{(n)} \left(\left(\int \xi_{k_{A_i^{(n)}}}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi)\right)\left(\int \xi_{k_{B_j^{(n)}}}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi)\right)\right.$$

$$\left. + \int \xi_{k_{A_i^{(n)}} k_{B_j^{(n)}}}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi)\right)$$

$$= \left(\int \xi_{f_n}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi)\right)\left(\int \xi_{g_n}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi)\right) + \int \xi_{f_n g_n}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi).$$

Um den Beweis von 6.1. abzuschließen, müssen wir deshalb nur noch die Gültigkeit der folgenden Beziehung zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \int \xi_{f_n}(\Phi)\xi_{g_n}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi) = \int \xi_f(\Phi)\xi_g(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi), \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int \xi_{f_n}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi) = \int \xi_f(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi), \tag{22}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int \xi_{g_n}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi) = \int \xi_{g_n}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi), \tag{23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int \xi_{f_n g_n}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi) = \int \xi_{gf}(\Phi) P_{(\mu)}(d\Phi). \tag{24}$$

Dazu erhalten wir aus (19) und (20)

$$\xi_{f_n}(\Phi) \leq \xi_{f_{n+1}}(\Phi),\; \xi_{g_n}(\Phi) \leq \xi_{g_{n+1}}(\Phi); \; \forall\, n = 1, 2, \ldots, \forall\, \Phi \in M; \tag{25}$$

$$(26) \qquad \lim_{n\to\infty} \xi_{f_n}(\Phi) = \xi_f(\Phi),\ \lim_{n\to\infty} \xi_{g_n}(\Phi) = \xi_g(\Phi);\ \forall\, \Phi \in M,$$

$$(27) \qquad \xi_{f_n g_n}(\Phi) \leq \xi_{f_{n+1} g_{n+1}}(\Phi);\ \forall\, n = 1, 2, \ldots,\ \forall\, \Phi \in M,$$

$$(28) \qquad \lim_{n\to\infty} \xi_{f_n g_n}(\Phi) = \xi_{fg}(\Phi);\ \forall\, \Phi \in M.$$

(24) folgt sofort aus (21) und (28), während (25) und (26) die Beziehungen (22) und (23) nach sich ziehen. Aus (25) und (26) folgt weiter

$$\xi_{f_n}(\Phi)\xi_{g_n}(\Phi) \leq \xi_{f_{n+1}}(\Phi)\xi_{g_{n+1}}(\Phi);\ \lim_{n\to\infty} \xi_{f_n}(\Phi)\xi_{g_n}(\Phi) = \xi_f(\Phi)\xi_g(\Phi);$$

$$\forall\, n = 1, 2, \ldots,\ \forall\, \Phi \in M.$$

Es muß deshalb auch (21) richtig sein. 6.1. ist damit bewiesen. Wir kommen jetzt zum Beweis von Theorem 4:

Es sei zunächst die Aussage (E) erfüllt. Daraus folgt unmittelbar

$$\lim_{n\to\infty} \mu * R_n(B) = \lambda(B);\ \forall\, B \in \mathfrak{H}.$$

Das zieht

$$\lim_{n\to\infty} \| (P_{(\mu)})_{R_n}^{B_1, \ldots, B_k} - P_{(\lambda)}^{B_1, \ldots, B_k} \|_{\mathrm{Var}} = 0$$

für alle Folgen $B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{H}$ nach sich.

Wegen Theorem 2 muß deshalb auch $\lim_{n\to\infty} \int (R_n(x, B))^2 \mu(dx) = 0$ für alle $B \in \mathfrak{H}$ sein. Damit haben wir (F). Für alle $B \in \mathfrak{B}$ erhalten wir unter Verwendung von 6.1.

$$\left(\int |\Phi * R_n(B) - \lambda(B)|\, P_{(\mu)}(d\Phi)\right)^2$$

$$\leq \int (\Phi * R_n(B) - \lambda(B))^2 P_{(\mu)}(d\Phi) = (\mu * R_n(B) - \lambda(B))^2 + \int (R_n(x, B))^2 (dx).$$

Diese Abschätzung zeigt, daß (F) stets die Aussage (E) nach sich zieht.

Damit ist Theorem 4 bewiesen.

## LITERATUR


1. Р. Л. Добрушон. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве. *Укр мат. ж.*, **8**, 1956, 127—134.
2. H. Debes, A. Liemant, J. Kerstan, K. Matthes. Verallgemeinerung eines Satzes von Dobruschin III. *Math. Nachr.*, **50**, 1971, 99—139.
3. K.-H. Fichtner. Gleichverteilungseigenschaften substochastischer Kerne und zufällige Punktfolgen. *Math. Nachr.*, **62**, 1974, 251—260.
4. J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecke. Unbegrenzt teilbare Punktprozesse. Berlin, 1974.
5. J. Kerstan, K.-H. Fichtner. Invarianz von Punktprozessen bei zufälligen Bewegungen I. (in Vorbereitung).
6. C. Stone. On a theorem by Dobrushin. *Ann. Math. Statistics*, **39**, 1968, 1391—1401.



*Friedrich-Schiller-Universität*
*Sektion Mathematik*
*UHH, 17.06 69 Jena*


*Eingegangen am 30. 3. 1978*