

Provided for non-commercial research and educational use. Not for reproduction, distribution or commercial use.
--

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ПЕНЧО П. ПЕТРУШЕВ

Пусть $\tau(f; \delta)_L = \int_0^1 \omega(f; x; \delta) dx$, где $\omega(f; x; \delta) = \sup \{ |f(x') - f(x'')| : x', x'' \in [x - \delta/2, x + \delta/2] \cap [0, 1] \}$. Доказано, что для любой ограниченной на отрезке $[0, 1]$ функции f имеет место $R_n(f)_r = O(n^{-1} \ln(e + n\tau(f; 1/n)_L))$, где $R_n(f)_r$ — наилучшее приближение функции f на $[0, 1]$ рациональными функциями n -того порядка относительно хаусдорфовой метрики. Эта оценка неулучшаема в классе всех функций с неограниченной вариацией.

Наилучшие приближения функций и множеств алгебраическими и тригонометрическими полиномами относительно хаусдорфова расстояния изучены довольно широко (см. [1]). В настоящей статье рассмотрим менее изученный вопрос о рациональной аппроксимации функций относительно хаусдорфовой метрики. Докажем часть из результатов, анонсированных в [2].

Обозначим через F_Δ множество всех замкнутых и ограниченных точечных множеств на плоскости, которые выпуклы относительно оси y и проекция которых на оси x совпадает с интервалом $\Delta = [a, b]$. Хаусдорфово расстояние с параметром $\alpha > 0$ между множествами $F, G \in F_\Delta$ определяется через

$$r(\alpha, \Delta; F, G) = \max \left\{ \max_{A \in F} \min_{B \in G} d_\alpha(A, B), \max_{A \in G} \min_{B \in F} d_\alpha(A, B) \right\},$$

где $d_\alpha(A, B) = d_\alpha(A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)) = \max \{ \alpha^{-1} |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2| \}$. Если обозначим через F^ε и G^ε ε -окрестности соответственно множеств F и G относительно расстояния d_α , то, очевидно,

$$r(\alpha, \Delta; F, G) = \inf \{ \varepsilon : F \subset G^\varepsilon, G \subset F^\varepsilon \}.$$

Дополненный график $\bar{f}$ ограниченной на Δ функции f определяется через $\bar{f} = \bigcap \{ F : F \in F_\Delta \text{ и } (x, f(x)) \in F \text{ при } x \in \Delta \}$. Отметим, что для любой ограниченной на отрезке Δ функции f имеем $\bar{f} \in F_\Delta$. Хаусдорфово расстояние между двумя ограниченными на Δ функциями f, g определяется как хаусдорфово расстояние между их дополненными графиками, т. е. $r(\alpha, \Delta; f, g) = r(\alpha, \Delta; \bar{f}, \bar{g})$. Расстояние $r(\alpha, \Delta; f, g)$ можно рассматривать как обобщение равномерного расстояния $\|f - g\|_\Delta = \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in \Delta \}$, так как, если функции f и g непрерывны на отрезке Δ , то $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r(\alpha, \Delta; f, g) = \|f - g\|_\Delta$. В этой статье будем рассматривать только хаусдорфово расстояние с параметром $\alpha = 1$ и будем обозначать $r(\Delta; f, g) = r(1, \Delta; f, g)$. Свойства и особенности хаусдорфова расстояния обсуждаются подробно в [1; 3].

СЕРДИКА *Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 29—41.*

Через H_n будем обозначать, как обычно, множество всех алгебраических полиномов n -той степени с действительными коэффициентами, а через R_n — множество всех действительных рациональных функций n -того порядка, т. е. $R_n = \{q : q = p_1/p_2, p_1, p_2 \in H_n\}$. Обозначим еще через $E_n(f)_\Omega = E_n(f; \Delta)_\Omega$ и $R_n(f)_\Omega = R_n(f; \Delta)_\Omega$, $\Omega = r, C, L$ наилучшие приближения функции f (множества f) соответственно элементами из H_n и R_n относительно хаусдорфовой, равномерной и L -метрики. Например,

$$R_n(f)_r = R_n(f; \Delta)_r = \inf \{r(\Delta; f, q) : q \in R_n\}.$$

Основным результатом в теории хаусдорфовых аппроксимаций является следующая универсальная оценка для $E_n(f)_r$, доказанная Бл. Сендовым [4; 1]: для любого множества $f \in F_A$ справедливо

$$(1) \quad E_n(f)_r = O(\ln n/n).$$

Оценка (1) точна по порядку в классе всех абсолютно непрерывных функций [5]. Она точна по порядку и для важных в теории хаусдорфовых аппроксимаций функций

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in [-1, 0), \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x \in (0, 1], \end{cases} \quad \text{и} \quad \delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Отметим, что для этих двух функций наилучшие хаусдорфовые рациональные приближения намного лучше: $R_n(\delta)_r = 0$, $R_n(\operatorname{sgn} x)_r = O(e^{-c\sqrt{n}})$. Последнюю оценку легко получить (см. [6; 7]), имея в виду статью [8] Д. Ньюмана, где доказано, что $R_n(|x|, [-1, 1])_r = O(e^{-c\sqrt{n}})$, $c_1 > 0$.

Из (1) непосредственно следует, что для любого множества $f \in F_A$ имеет место оценка

$$(2) \quad R_n(f)_r = O(\ln n/n).$$

В следующей работе докажем, что оценка (2) точна по порядку в классе всех ограниченных на отрезке $[0, 1]$ функций, т. е. существует ограниченная на отрезке $[0, 1]$ функция f такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup R_n(f)_r n / \ln n > 0$. Этим будет решена одна проблема Бл. Сендова [24, задача 4].

Естественно, искать классы функций, которые приближаются рациональными функциями относительно хаусдорфова расстояния, лучше по порядку, чем алгебраическими полиномами. В этом направлении В. А. Попов [9] доказал, что

$$(3) \quad \sup \{R_n(f)_r : \bigvee_0^1 f \leq 1\} = O(n^{-1}),$$

где $\bigvee_0^1 f$ — вариация функции f на отрезке $[0, 1]$, и эта оценка точна по порядку.

В этой статье обобщим оценки (2), (3), пользуясь следующими характеристиками:

$$(4) \quad \tau(f; \delta)_L = \int_0^1 \omega(f; x; \delta) dx,$$

где $\omega(f; x; \delta) = \sup \{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in [x - \delta/2, x + \delta/2] \cap [0, 1]\}$ (см. [10—13]),

$$\kappa(f; n) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1 \right\} \quad (\text{см. [14; 15]}).$$

Отметим, что (см. [13])

$$(5) \quad n \cdot \tau(f; 1/n)_L \leq 6\kappa(f; n) \leq 6\sqrt[1]{f}, \quad \kappa(f; n) \leq 2n \|f\|_{[0, 1]}.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой ограниченной на отрезке $[0, 1]$ функции f имеет место оценка

$$(6) \quad R_n(f)_r \leq n^{-1} C_1 \ln(e + n\tau(f; 1/n)), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $C_1 > 0$ — абсолютная константа.

Из (5), (6) следует, что для любой ограниченной на $[0, 1]$ функции f справедливо

$$(7) \quad R_n(f)_r \leq C_2 n^{-1} \ln(e + \kappa(f; n)),$$

где C_2 — абсолютная константа.

В следующей работе докажем, что оценки (6) и (7) неулучшаемы в классе функций с неограниченной вариацией. Точнее докажем, что для любой функции $\tau(\delta)$, $\delta \geq 0$ такой, что $\tau(\delta) = \tau(g; \delta)_L$ при $\delta \geq 0$, где g — ограниченная на $[0, 1]$ функция с неограниченной вариацией, существует ограниченная на $[0, 1]$ функция f такая, что $\tau(f; \delta)_L \leq \tau(\delta)$ при $\delta \geq 0$ и $\limsup_{n \rightarrow \infty} R_n(f)_r \cdot n / \ln(e + n\tau(1/n)) > 0$. В таком же смысле неулучшаема и оценка (7). Из последнего, в частности, следует, что оценка (2) точна по порядку в классе всех ограниченных на $[0, 1]$ функций.

В другой работе докажем еще, что для любой функций f , $\sqrt[1]{f} < \infty$, имеет место $R_n(f)_r = o(n^{-1})$ (срв. с (3)), и эта оценка точна по порядку в классе функций с ограниченной вариацией. Используя известное соотношение [16] между хаусдорфовой и интегральной метриками из последней оценки, следует, что если $\sqrt[1]{f} < \infty$, то $R_n(f)_L = o(n^{-1})$.

1. Обозначим через $\bigvee_r^M[a, b]$ множество всех функции f , для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f^{(r-1)}$ является первообразной некоторой функции $f^{(r)}$ такой, что $\bigvee_a^b f^{(r)} \leq M$. В работах [17; 18], на основе работы Д. Ньюмана [8], найдены оценки сверху для наилучших равномерных рациональных приближений класса $\bigvee_r^M[a, b]$, которые лучше по порядку, чем соответствующие полиномиальные оценки. Окончательный в этой направлении результат принадлежит В. А. Попову [9]: если $M \geq 0$, r — натуральное число и $[a, b]$ — конечный отрезок, то

$$(8) \quad \sup \{R_n(f)_r : f \in \bigvee_r^M[a, b]\} \leq C_r M(b-a)^r n^{-r-1},$$

где $C_r > 0$ зависит только от r . Оценка (8) точна по порядку [19].

Доказательство теоремы 1 получим, используя метод, восходящий к В. А. Попову [20]. Для этого нужно уточнить вид константы C_r из оценки (8). Покажем, что $C_r \leq D^r$, где D — абсолютная константа.

Теорема 2. Существует абсолютная константа $D \geq 1$ такая, что если $M \geq 0$, r — натуральное число и $[a, b]$ — конечный отрезок, то для любого натурального $n \geq 4r$ имеет место

$$(9) \quad \sup \{R_n(f)_c : f \in \bigvee_r^M[a, b]\} \leq D^r M(b-a)^r n^{-r-1}.$$

Доказательство оценки (9) можно получить, повторяя доказательство из [9]. Однако мы приведем новое доказательство, основанное, естественно, на идеях из [9; 21]. Отметим, что подобным образом в [22] показано, что для любой функции $f \in \bigvee_r^M[a, b]$ имеет место $R_n(f)_c = o(n^{-r-1})$. Доказательству теоремы 2 предположим несколько лемм.

Введем следующие обозначения:

$W_r(M, [a, b], k, \eta)$ — множество всех функций $f \in C[a, b]$ ($f^{(r)}$ — непрерывна на $[a, b]$) такие, что $\bigvee_a^b f^{(r)} \leq M$ и существуют точки $\{x_i\}_{i=0}^k$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ такие, что $x_i - x_{i-1} \leq \eta$ и $\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f^{(r)} \leq \eta$, $i = 1, 2, \dots, k$,

$$\Phi_r(M, \delta, k, \eta; N, B) = \sup \{ \inf \{ \|f - q\|_{[0, \delta]} : q \in R_N, \|q\|_{(-\infty, \infty)} \leq B \} : f \in W_r(M, [0, \delta], k, \eta), f^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \dots, r \},$$

где $R_N = R_{[N]}$, $[N]$ — целая часть числа $N \geq 0$. В дальнейшем, не уговаривая это, будем пользоваться фактом, что функция $\Phi_r(M, \delta, k, \eta; N, B)$ монотонна по каждому из своих аргументов.

Лемма 1. Если r, n, k — натуральные числа, $M \geq 0, B > 0$ и $[a, b]$ — конечный отрезок, то

$$\begin{aligned} & \sup \{R_{n+r}(f)_c : f \in \bigvee_r^M[a, b]\} \\ & \leq M(b-a)^r \sup \{R_n(f)_c : f \in \bigvee_r^1[0, 1] \cap C[0, 1], f^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \dots, r\} \\ & \leq M(b-a)^r \Phi_r(1, 1, 2k, 1/k; n, B). \end{aligned}$$

Доказательство. Так как множество $\bigvee_r^M[a, b] \cap C[a, b]$ плотно в множестве $\bigvee_r^M[a, b]$ ($r \geq 1$), то

$$\sup \{R_n(f)_c : f \in \bigvee_r^M[a, b]\} = \sup \{R_n(f)_c : f \in \bigvee_r^M[a, b] \cap C[a, b]\}.$$

Если $M = 0$, то утверждение леммы очевидно выполнено. Если $f \in \bigvee_r^M[0, 1] \cap C[0, 1]$, $M > 0$, то для функции

$$g(x) = M^{-1}(b-a)^{-r} (f(a + (b-a)x) - \sum_{\nu=0}^r (b-a)^\nu x^\nu f^{(\nu)}(a)/\nu!), \quad x \in [0, 1],$$

имеем $g \in \bigvee_r^1[0, 1] \cap C[0, 1]$ и $g^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \dots, r$. Следовательно, существует рациональная функция $q \in R_n$ такая, что

$$\begin{aligned} \Omega &= \sup \{R_n(f)_c : f \in \bigvee_r^1[0, 1] \cap C[0, 1], f^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \dots, r\} \geq \|g - q\|_{[0, 1]} \\ &= M^{-1}(b-a)^{-r} \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{\nu=0}^r (x-a)^\nu f^{(\nu)}(a)/\nu! - M(b-a)^r q((x-a)/(b-a)) \right|. \end{aligned}$$

Из последнего следует, что $R_{n+r}(f)_c \leq M(b-a)^r \Omega$, и так как функция f выбрана произвольно из множества $\bigvee_r^M[a, b] \cap C[a, b]$, то левое из неравенств (10) доказано. Правое неравенство сразу следует, имея в виду, что $\bigvee_r^1[0, 1] \cap C[0, 1] \subset W(1, [0, 1], 2k, 1/k)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Существует абсолютная константа $D_1 \geq 1$ такая, что если r, n — натуральные числа и $\lambda \geq 8$, то

$$\sup_{\delta > 0, M \geq 0} \Phi_r(M, \delta, 1, 16\lambda r/n; \lambda r, (M\delta^r)^{3/2} \cdot n^{(r+1)/2}) \leq D_1 \lambda / n^{r+1}.$$

Доказательство. Если $f \in W_r(M, [0, \delta], 1, \eta)$, $\eta = 16\lambda r/n$, $M > 0$ (случай $M = 0$ очевиден) и $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, r$, то $\|f^{(r)}\|_{[0, \delta]} \leq \eta$, $\delta \leq \eta$, $\|f^{(r)}\|_{[0, \delta]} \leq M$, $\|f\|_{[0, \delta]} \leq M\delta^r$ и, следовательно, согласно теореме Джексона, существует полином $p \in H_{[\lambda/2]r}$ такой, что $\|p\|_{[0, \delta]} \leq 2\|f\|_{[0, \delta]} \leq 2M\delta^r$ и

$$\|f - p\|_{[0, \delta]} \leq C_1 \delta^r \|f^{(r)}\|_{[0, \delta]} / ([\lambda/2]r - r)^r \leq C_1 \eta^{r+1} / (\lambda r/4)^r \leq C_2 \lambda / n^{r+1},$$

где C_1, C_2 — абсолютные константы. Положим $q = p / (1 + \varepsilon p^2)$, $\varepsilon = (M\delta^r)^{-3} n^{-r-1}$. Тогда имеем $q \in R_{\lambda r}$, $\|q\|_{(-\infty, \infty)} \leq 1/2\sqrt{\varepsilon} \leq (M\delta^r)^{3/2} n^{(r+1)/2}$ ввиду неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$, $\|f - q\|_{[0, \delta]} \leq \|f - p\|_{[0, \delta]} + \varepsilon \|f\|_{[0, \delta]} \cdot \|p\|_{[0, \delta]}^2 \leq C_3 \lambda / n^{r+1} + 4\varepsilon (M\delta^r)^3 \leq D_1 \lambda / n^{r+1}$, где D_1 — абсолютная константа. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. Существует абсолютная константа $d > 1$ такая, что для любых положительных чисел α, β, γ существует рациональная функция σ порядка не выше $d \ln(e + 1/\gamma) \ln(e + \beta/\alpha)$ такая, что

$$\begin{aligned} |\sigma(x)| &\leq \gamma^{3/2} && \text{при} && x \in (-\infty, -\alpha] \cap [-\beta, 0], \\ |1 - \sigma(x)| &\leq \gamma^{3/2} && \text{при} && x \in [0, \beta] \cap [\alpha, \infty] \text{ и} \\ 0 \leq \sigma(x) &\leq 1 && \text{при} && x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Доказательство. Из результатов А. А. Гончара [6; 7], полученных на основе работы Д. Ньюмана [8], следует, что существует абсолютная константа $d > 0$ такая, что для любых ε, θ , $0 < \varepsilon < 1/2$, $0 < \theta \leq 1/\varepsilon$, существует четное число $n \leq d \ln(1/\varepsilon) \ln(1/\theta)$ такое, что для рациональной функции $\sigma^*(x) = (1 + s_n(x))^{-1}$, $s_n(x) = p_n(x)/p_n(-x)$, $p_n(x) = \prod_{i=1}^n (1 - \varepsilon^{i/n})$, имеют место неравенства $|\sigma^*(x)| \leq 2^{-1/\theta^{3/2}}$ при $x \in [-1, -\varepsilon]$, $|1 - \sigma^*(x)| \leq 2^{-1/\theta^{3/2}}$ при $x \in [\varepsilon, 1]$ и $0 \leq \sigma^*(x) \leq 1$ при $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Так как n — четное, то $s_n(x) \geq 0$ при $|x| \geq 1$ и, следовательно, $0 \leq \sigma^*(x) \leq 1$ при $|x| \geq 1$. Тогда для рациональной функции $\sigma(x) = (\sigma^*(\beta x) + 2^{-1/\theta^{3/2}}) / (1 + \theta^{3/2})$, порядка не выше n , имеем $|\sigma(x)| \leq \theta^{3/2}$ при $x \in [-\beta, -\varepsilon\beta]$, $|1 - \sigma(x)| \leq \theta^{3/2}$ при $x \in [\varepsilon\beta, \beta]$ и $0 \leq \sigma(x) \leq 1$ при $x \in (-\infty, \infty)$. Из последнего, полагая $\varepsilon = (e + \beta/\alpha)^{-1}$ и $\theta = (e + 1/\gamma)^{-1}$, получаем утверждение леммы.

Лемма 4. Если $x_1, x_1, y_1, y_2 \geq 0$ и r — натуральное число, то

$$\ln((e + x_1)(e + y_1)^r) + \ln^2((e + x_2)(e + y_2)^r) \leq 2 \ln^2((e + (x_1 + x_2)/2)(e + (y_1 + y_2)/2)^r),$$

т. е. функция $F(x, y) = -\ln((e + x)(e + y)^r)$ выпукла на множестве $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Доказательство. Утверждение леммы выполнено ввиду того, что функции $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2$ неотрицательны на множестве D (см. [23, стр. 94]).

Лемма 5. Если r, k и n — натуральные числа, $M_1, M_2, \eta, N, B \geq 0$, $A > 0$ и $[a, b]$ — конечный отрезок, $a > 0$, то

$$\sup \{ \inf \{ \|f - q\|_{[a, b]} : q \in R_{N+2r}, \|q\|_{(-\infty, \infty)} \leq B + 2^{-1}(AM_1 b^r)^{3/2} n^{(r+1)/2} \}$$

$$: f \in W_r(M_2, [a, b], k, \eta), |f^{(i)}(a)| \leq M_1 a^{r-i}, \quad i=0, 1, \dots, r\} \\ \leq \Phi_r(M_2, b-a, k, \eta; N, B) + A^{-3} n^{-r-1}.$$

Доказательство. Если $M_1=0$, то утверждение леммы очевидно выполнено. Пусть $f \in W_r(M_2, [a, b], k, \eta)$ и $|f^{(i)}(a)| \leq M_1 a^{r-i}$, $i=0, 1, \dots, r$, $M_1 > 0$. Тогда для функции

$$g(x) = f(a+x) - \sum_{v=0}^r x^v f^{(v)}(a)/v! \quad \text{имеем} \quad g^{(i)}(0) = 0, \quad i=0, 1, \dots, r$$

и так как $\bigvee_{x'} x'' g(r) = \bigvee_{x'+a} x'' f(r)$ для любых $x', x'' \in [0, b-a]$, то $g \in W_r(M_2, [0, b-a], k, \eta)$. Следовательно, существует рациональная функция $q \in R_n$ такая, что $\|q\|_{(-\infty, \infty)} \leq B$ и

$$\Phi_r(M_2, b-a, k, \eta; N, B) \\ \geq \|g - q\|_{[0, b-a]} = \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{v=0}^r (x-a)^v f^{(v)}(a)/v! - g(x-a) \right|.$$

Положим $p(x) = \sum_{v=0}^r (x-a)^v f^{(v)}(a)/v!$, $u(x) = q(x-a)$, $v = p/(1+\varepsilon p^2)$, $\varepsilon = (AM_1 b^r)^{-3} n^{-r-1}$. Тогда $v \in R_{2r}$, $\|p\|_{[a, b]} \leq M_1 \sum_{v=0}^r (b-a)^v a^{r-v}/v! \leq M_1 \sum_{v=0}^r \binom{r}{v} \times (b-a)^v a^{r-v} = M_1 b^r$, $\|v\|_{(-\infty, \infty)} \leq 1/2\sqrt{\varepsilon} = 2^{-1} (AM_1 b^r)^{3/2} n^{(r+1)/2}$, $\|p-v\|_{[a, b]} \leq \varepsilon \|p\|_{[a, b]}^3 \leq \varepsilon (M_1 b^r)^3 = A^{-3} n^{-r-1}$ и, следовательно,

$$\|f - (v+u)\|_{[a, b]} \leq \|f - p - u\|_{[a, b]} + \|p - v\|_{[a, b]} \\ \leq \Phi_r(M_2, b-a, k, \eta; N, B) + A^{-3} n^{-r-1},$$

$$\|v+u\|_{(-\infty, \infty)} \leq \|q\|_{(-\infty, \infty)} + \|v\|_{(-\infty, \infty)} \leq B + 2^{-1} (AM_1 b^r)^{3/2} n^{(r+1)/2}.$$

Из последних неравенств, имея в виду, что $u+v \in R_{N+2r}$, получаем утверждение леммы.

Обозначим

$$N_r(M, \delta, m, \lambda, n) = \sum_{v=0}^m 2^v \{d \ln^2((e + Mn4^m 8^{-v})(e + \delta n4^m 8^{-v})^r) + 4r\} + 2^m \lambda r,$$

где d — константа из леммы 3.

Лемма 6. Пусть $m \geq 0$, m — целое число, r и n — натуральные числа $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 8$. Тогда, если

$$(11) \quad \sup_{\delta > 0, M \geq 0} \Phi_r(M, \delta, 2^m, \lambda_1 r/n; N_r(M, \delta, m, \lambda_2, n), (2^m M \delta r)^{3/2} n^{(r+1)/2}), \\ \leq \varphi(m)/n^{r+1},$$

где $\varphi(m) \geq 1$, то

$$\sup_{\delta > 0, M \geq 0} \Phi_r(M, \delta, 2^{m+1}, \lambda_1 r/n; N_r(M, \delta, m+1, \lambda_2, n), (2^{m+1} M \delta r)^{3/2} n^{(r+1)/2}) \\ \leq \varphi(m)(1 + 4/2^{m+1})/n^{r+1}.$$

Доказательство. Если $f \in W_r(M, [0, \delta], 2^{m+1}, \lambda_1 r/n)$, $M > 0$ (случай $M=0$ очевиден), $\delta > 0$ и $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, r$, то существует точка $z_1 \in (0, \delta)$ такая, что

$$f \in W_r(M_1, [z_0, z_1], 2^m, \lambda_1 r/n) \quad \text{и} \quad f \in W_r(M_2, [z_1, z_2], 2^m, \lambda_1 r/n),$$

$z_0 = 0$, $z_2 = \delta$, для некоторых M_1, M_2 , $\bigvee_{z_0}^{z_1} f^{(r)} = M_1$, $\bigvee_{z_1}^{z_2} f^{(r)} = M_2$, $M_1 + M_2 \leq M$.

Обозначим $\Delta_1 = [z_0, z_1 + \varepsilon]$, $\Delta_2 = [z_1 - \varepsilon, z_2]$, $\varepsilon = 4^{-m-1} M^{-1} \cdot \delta^{-r+1} \cdot n^{-r-1}$, $\Delta = [z_0, z_2]$, $\delta_1 = z_1 - z_0$, $\delta_2 = z_2 - z_1$. Пусть α_1, α_2 — линейные трансформации, которые отображают Δ_1, Δ_2 соответственно на $[z_0, z_1], [z_1, z_2]$. Тогда имеем

$$(12) \quad |\alpha_i(x) - x| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in \Delta_i, \quad i = 1, 2.$$

Из (11) следует, что существует рациональная функция q_1 порядка не выше $N_r(M_1, \delta_1, m, \lambda_2, n)$ такая, что

$$(13) \quad \|f - q_1\|_{[z_0, z_1]} \leq \varphi(m)/n^{r+1}, \\ \|q_1\|_{(-\infty, \infty)} \leq (2^m M_1 \delta_1^{r-1})^{3/2} n^{(r+1)/2} \leq (2^{m+1} M \delta^r)^{3/2} n^{(r+1)/2}.$$

Так как $|f^{(i)}(z_1)| \leq M_1 \delta_1^{r-i}$, $i = 0, 1, \dots, r$, ввиду того, что $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, r$ и $\bigvee_{z_0}^{z_1} f^{(r)} \leq M_1$, то из (11), применяя лемму 5 при $k = 2^m$, $\eta = \lambda_1 r/n$, $N = N_r(M_2, \delta_2, m, \lambda_2, n)$, $B = (2^m M_2 \delta_2^{r-1})^{3/2} n^{(r+1)/2}$, $A = 2^{m+1}$ и $[a, b] = [z_1, z_2]$ получаем, что существует рациональная функция q_2 порядка не выше $N_r(M_2, \delta_2, m, \lambda_2, n) + 2r$ такая, что

$$(14) \quad \|f - q_2\|_{[z_1, z_2]} \leq \Phi_r(M_2, \delta_2, 2^m, \lambda_1 r/n; N_r(M_2, \delta_2, m, \lambda_2, n), (2^m M_2 \delta_2^{r-1})^{3/2} n^{(r+1)/2}) \\ + 2^{-m-1} n^{-r-1} \leq \varphi(m)/n^{r+1} + 2^{-m-1} n^{-r-1}, \\ \|q_2\|_{(-\infty, \infty)} \leq (2^m M_2 \delta_2^{r-1})^{3/2} n^{(r+1)/2} + 2^{-1} (2^{m+1} M_1 \delta^r)^{3/2} n^{(r+1)/2} \leq (2^{m+1} M \delta^r)^{3/2} n^{(r+1)/2}.$$

Так как $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, \dots, r$ и $\bigvee_{z_0}^{z_2} f^{(r)} \leq M$, то

$$(15) \quad \omega(f; t) \leq t \|f'\|_{[z_0, z_2]} \leq M \delta^{r-1} t, \quad t \geq 0,$$

где $\omega(f; t) = \sup \{ |f(x') - f(x'')| : x', x'' \in \Delta, |x' - x''| \leq t \}$.

Из (12)–(15) получаем

$$\max_{x \in \Delta_i \cap \Delta} |f(x) - q_i(\alpha_i(x))| \leq \max_{x \in \Delta_i \cap \Delta} |f(x) - f(\alpha_i(x))| + \max_{x \in \Delta_i \cap \Delta} |f(\alpha_i(x)) - q_i(\alpha_i(x))| \\ \leq \omega(f; \varepsilon) + \|f - q_i\|_{[z_{i-1}, z_i]} \leq M \delta^{r-1} 4^{-m-1} M^{-1} \delta^{-r+1} n^{-r-1} + \varphi(m) n^{-r-1} + 2^{-m-1} n^{-r-1} \\ \leq \varphi(m) n^{-r-1} + 2 \cdot 2^{-m-1} n^{-r-1},$$

т. е.

$$(16) \quad \max_{x \in \Delta_i \cap \Delta} |f(x) - q_i(\alpha_i(x))| \leq \varphi(m) \cdot n^{-r-1} + 2 \cdot 2^{-m-1} n^{-r-1},$$

$$(17) \quad \|q_i(\alpha_i)\|_{(-\infty, \infty)} \leq (2^{m+1} M \delta^r)^{3/2} n^{(r+1)/2},$$

где $q_i(\alpha_i)$ — рациональная функция порядка не выше $N_r(M_i, \delta_i, m, \lambda_2, n) + 2r$, $i = 1, 2$.

Перейдем к „склеиванию“ двух рациональных функций q_1, q_2 , пользуясь рациональной функцией σ порядка не выше $d \ln(e + M\delta^r n^{r+1} 4^{m+1})$ из леммы 3, где $\alpha = \varepsilon = 4^{-m-1} M^{-1} \delta^{-r+1} n^{-r-1}$, $\beta = \delta$, $\gamma = 4^{-m-1} M^{-1} \delta^{-r} n^{-r-1}$. Рассмотрим рациональную функцию

$$q(x) = q_1(\alpha_1(x)) + \sigma(x - z_1)(q_2(\alpha_2(x)) - q_1(\alpha_1(x)))$$

порядка не выше $N_r(M_1, \delta_1, m, \lambda_2, n) + 2r + N_r(M_2, \delta_2, m, \lambda_2, n) + 2r + d \ln^2(e + M\delta^r n^{r+1} 4^{m+1})$.

Оценим $|f(x) - q(x)|$ для $x \in A$, пользуясь (16), (17) и леммой 3:

а) если $x \in (-\infty, z_1 - \varepsilon) \cap A$, то

$$\begin{aligned} |f(x) - q(x)| &\leq |f(x) - q_1(\alpha_1(x))| + \sigma(x - z_1)(|q_1(\alpha_1(x))| + |q_2(\alpha_2(x))|) \\ &\leq \varphi(m)n^{-r-1} + 2 \cdot 2^{-m-1}n^{-r-1} + 2(2^{m+1}M\delta^r)^{3/2}n^{(r+1)/2}(4^{m+1}M\delta^r n^{r+1})^{-3/2} \\ &\leq \varphi(m)n^{-r-1} + 4 \cdot 2^{-m-1} \cdot n^{-r-1}; \end{aligned}$$

б) если $x \in [z_1 - \varepsilon, z_1 + \varepsilon] \cap A$, то

$$\begin{aligned} |f(x) - q(x)| &\leq (1 - \sigma(x - z_1))|f(x) - q_1(\alpha_1(x))| + \sigma(x - z_1)|f(x) - q_2(\alpha_2(x))| \\ &\leq \varphi(m)n^{-r-1} + 2 \cdot 2^{-m-1}n^{-r-1}; \end{aligned}$$

в) если $x \in [z_1 + \varepsilon, \infty) \cap A$, то

$$\begin{aligned} |f(x) - q(x)| &\leq |f(x) - q_2(\alpha_2(x))| + (1 - \sigma(x - z_1))(|q_1(\alpha_1(x))| + |q_2(\alpha_2(x))|) \\ &\leq \varphi(m)n^{-r-1} + 4 \cdot 2^{-m-1}n^{-r-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|f - q\|_A \leq \varphi(m)(1 + 4/2^{m+1})/n^{r+1}$.

С другой стороны, из (17) получаем

$$|q(x)| \leq (1 - \sigma(x - z_1))|q_1(\alpha_1(x))| + \sigma(x - z_1)|q_2(\alpha_2(x))| \leq (2^{m+1}M\delta^r)^{3/2}n^{(r+1)/2}$$

и, следовательно, $|q|_{(-\infty, \infty)} \leq (2^{m+1}M\delta^r)^{3/2}n^{(r+1)/2}$.

Осталось показать, что порядок рациональной функции q не выше $N_r(M, \delta, m+1, \lambda_2, n)$. Действительно, ввиду леммы 4 получаем

$$\begin{aligned} &N_r(M_1, \delta_1, m, \delta_2, n) + N_r(M_2, \delta_2, m, \lambda_2, n) + 4r + d \ln^2(e + M\delta^r n^{r+1} 4^{m+1}) \\ &\leq \sum_{\nu=0}^m 2^\nu \{d \ln^2((e + M_1 n 4^m 8^{-\nu})(e + \delta_1 n 4^m 8^{-\nu}))^r \\ &\quad + d \ln^2((e + M_2 n 4^m 8^{-\nu})(e + \delta_2 n 4^m 8^{-\nu}))^r + 2 \cdot 4r\} \\ &\quad + 2 \cdot 2^m \lambda_2 r + d \ln^2((e + M n 4^{m+1})(e + \delta \cdot n \cdot 4^{m+1}))^r + 4r \\ &\leq \sum_{\nu=0}^m 2^\nu \{2d \ln^2((e + (M_1 + M_2) n 4^m 8^{-\nu} \cdot 2^{-1})(e + (\delta_1 + \delta_2) n 4^m 8^{-\nu} 2^{-1}))^r + 2 \cdot 4r\} \\ &\quad + d \ln^2((e + M n 4^{m+1})(e + \delta n 4^{m+1}))^r + 4r + 2^{m+1} \lambda_2 r \leq N_r(M, \delta, m+1, \lambda_2, n). \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть r — натуральное число, $M \geq 0$ и $[a, b]$ — конечный отрезок. Рассмотрим сначала случай, когда $4r \leq n < 2^{29} d^2 r^4$, где $d > 1$ — абсолютная константа из леммы 3. Имея в виду, что

для $f \in \bigvee_1^1[0, 1]$ и $f^{(r)}(0) = 0$ выполнено $\|f^{(r)}\|_{[0, 1]} \leq 1$, то из леммы 1 и теоремы Джексона следует, что

$$\begin{aligned} \sup \{R_n(f)_c : f \in \bigvee_r^M[a, b]\} &\leq M(b-a)^r C_1^r \|f^{(r)}\|_{[0, 1]} / (n-2r)^r \\ &\leq C_1^r 2^{r+1} 2^{29} d^2 r^4 M(b-a)^r / n^{r+1} \leq D_2^r M(b-a)^r / n^{r+1}, \end{aligned}$$

где D_2 — абсолютная константа, т. е. в этом случае неравенство (9) выполнено с $D = D_2$.

Рассмотрим случай, когда $n \geq 2^{29} d^2 r^4$. Пусть $\lambda = 2^{26} d^2 r^3$. Так как $n \geq 8\lambda r$, то существует натуральное число m такое, что $2^{m-2} \leq n/16\lambda r < 2^{m-1}$. Применяя лемму 1 при $k = 2^{m-1}$ и учитывая, что $1/k \leq 16\lambda r/n$ и $n \geq 2r$, получаем

$$(18) \quad \sup \{R_n(f)_c : f \in \bigvee_r^M[a, b]\} \leq M(b-a)^r \Phi_r(1, 1, 2^m, 16\lambda r/n; n/2, (2^m)^{3/2} n^{(r+1)/2}).$$

С другой стороны, имеем, согласно лемме 2,

$$(19) \quad \sup_{\delta > 0, M \geq 0} \Phi_r(M, \delta, 1, 16\lambda r/n; \lambda r, (M\delta r)^{3/2} n^{(r+1)/2}) \leq D_1^r \lambda / n^{r+1},$$

где $D_1 \geq 1$ — абсолютная константа. Применяя лемму 6 с $\lambda_1 = 16\lambda$ и $\lambda_2 = \lambda$ последовательно m раз, начиная с неравенства (19), получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\delta > 0, M \geq 0} \Phi_r(M, \delta, 2^m, 16\lambda r/n; N_r(M, \delta, m, \lambda, n), (2^m M\delta r)^{3/2} n^{(r+1)/2}) \\ \leq D_1^r \lambda \prod_{v=1}^m (1 + 4/2^v) / n^{r+1} \leq e^4 D_1^r \lambda / n^{r+1} \leq D_3^r / n^{r+1}, \end{aligned}$$

где D_3 — абсолютная константа и, следовательно,

$$(20) \quad \Phi_r(1, 1, 2^m, 16\lambda r/n; N_r(1, 1, m, \lambda, n), (2^m)^{3/2} n^{(r+1)/2}) \leq D_3^r / n^{r+1}.$$

Если докажем, что $N_r(1, 1, m, \lambda, n) \leq n/2$, то из (18), (20) будет следовать утверждение теоремы. Учитывая выбор λ , m и то, что функции $2^x(m+1+2/\ln 2-x)^2$ и $2^x(m+1+2/\ln 2-x)$ неубывающие на отрезке $[0, m+1]$ и $\ln x < \ln^2 x \leq \sqrt{x}$ при $x \geq 2^{16}$, получаем

$$\begin{aligned} N_r(1, 1, m, \lambda, n) &= \sum_{v=0}^m 2^v \{d \ln^2((e + n4^m 8^{-v})^{r+1}) + 4r\} + 2^m \lambda r \\ &\leq d(r+1)^2 \sum_{v=0}^m 2^v \ln^2((n2^{-m})8^{m+1+2/\ln 2-v}) + 8r2^m + \lambda r2^m \\ &\leq 4dr^2 \sum_{v=0}^m 2^v \{ \ln^2(8\lambda r) + 2 \ln(8\lambda r) \ln 8(m+1+2/\ln 2-v) \\ &\quad + \ln^2 8(m+1+2/\ln 2-v)^2 \} + 8r2^m + \lambda r2^m \\ &\leq 4dr^2 \left\{ 2 \ln^2(8\lambda r) \cdot 2^m + 6 \ln(8\lambda r) \int_0^{m+1} 2^x(m+1+2/\ln 2-x) dx \right. \\ &\quad \left. + 9 \int_0^{m+1} 2^x(m+1+2/\ln 2-x)^2 dx \right\} + 8r \cdot 2^m + \lambda r2^m \end{aligned}$$

$$\leq 4dr^2\{2\sqrt{8\lambda r} \cdot 2^m + 6\sqrt{8\lambda r} \cdot 2^5 \cdot 2^m + 9 \cdot 2^8 2^m\} + 8r2^m + \lambda r2^m \\ \leq 2^{14} dr^{5/2} \lambda^{1/2} \cdot 2^m + \lambda r2^m \leq n/2.$$

Тем самым теорема 2 доказана.

2. Перейдем к доказательству теоремы 1. Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7. Для любой ограниченной на отрезке $[0, 1]$ функции f и для любого натурального числа m существует ступенчатая функция s , непрерывная слева в каждой точке $x \in (0, 1]$, со скачками в точках $x_i = i/2m$, $i = 1, 2, \dots, 2m-1$ такая, что $\bigvee_0^1 s \leq 8m\tau(f; 1/m)_L$, $r([0, 1]; f, s) \leq 1/m$ и

$$\int_0^1 |f(x) - s(x)| dx \leq 2\tau(f; 1/m)_L.$$

Доказательство. Каждой точке $(x, y) \in \bar{f}$ ($\bar{f}$ — дополненный график функции f) сопоставим отрезок $A(x, y) = \{(\xi, \eta) : \xi \in [x - 1/m, x + 1/m]\}$. Обозначим

$$A = \{\bigcup \{A(x, y) : (x, y) \in \bar{f}\} \cap \{[0, 1] \times (-\infty, \infty)\},$$

$$S = (f; x; \delta) = \sup \{f(t) : t \in [x - \delta/2, x + \delta/2]\},$$

$$I(f; x; \delta) = \inf \{f(t) : t \in [x - \delta/2, x + \delta/2]\},$$

$$B = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [I(f; x; 2/m), S(f; x; 2/m)]\}.$$

Из геометрических соображений ясно, что $A = B$. С другой стороны, очевидно $\omega(f; x; 2/m) = |I(f; x; 2/m) - S(f; x; 2/m)|$ и, следовательно,

$$(21) \quad \text{mes}_2 A = \text{mes}_2 B = \int_0^1 \omega(f; x; 2/m) dx = \tau(f; 2/m)_L.$$

Определим функцию s , о существовании которой утверждается в лемме 7. Пусть $m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\}$,

$$M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\}, \quad x_i = i/2m, \quad i = 0, 1, \dots, 2m.$$

Положим

$$s(x) = \begin{cases} m_{2i-1} & \text{при } x \in (x_{2i-2}, x_{2i-1}] \\ M_{2i-1} & \text{при } x \in (x_{2i-1}, x_{2i}], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad s(0) = s(+0). \end{cases}$$

Непосредственно видно, что $r([0, 1]; f, s) \leq 1/m$. Так как $x_{2i} - x_{2i-2} \leq 1/m$, то $A(x_{2i-1}, m_{2i-1}) \subset A$ и $A(x_{2i-1}, M_{2i-1}) \subset A$. Следовательно, $s \subset A$ и, ввиду определения множества A , имеем $|s(x_i) - s(x_{i-1})|/2m \leq \text{mes}_2 (A \cap \{[x_{i-2}, x_i] \times (-\infty, \infty)\})$, $i = 2, 3, \dots, 2m$. Из последнего, учитывая (21), определение функции s и то, что $\tau(f; k\delta)_L \leq k\tau(f; \delta)_L$, k — натуральное, $\delta \geq 0$ (см. [12; 13]), получаем

$$\bigvee_0^1 s \leq 4m \text{mes}_2 A = 4m\tau(f; 2/m)_L \leq 8m\tau(f; 1/m)_L.$$

Так как $f, s \subset A$, то $\int_0^1 |f(x) - s(x)| dx \leq \text{mes}_2 A \leq 2\tau(f; 1/m)_L$. Тем самым лемма доказана.

Замечание. Из доказательства леммы 7 непосредственно следует что $m\tau(f; 2/m)_L \geq \sup\{f(x): x \in [0, 1]\} - \inf\{f(x): x \in [0, 1]\}$. Для этого достаточно обратить внимание на (21) и на то, что множество A содержит любую точку $(x, y) \in f$ вместе с отрезком $A(x, y) \cap \{[0, 1] \times (-\infty, \infty)\}$ длиной не менее $1/m$.

Доказательство теоремы 1. Пусть n — произвольное натуральное число и f — произвольная ограниченная на отрезке $[0, 1]$ функция. Не ограничивая общность доказательства, будем считать, что $\sup\{f(x): x \in [0, 1]\} - \inf\{f(x): x \in [0, 1]\} = 2 \|f\|_{[0, 1]}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\|f\|_{[0, 1]} \geq e^{n/B}$, где $B = 32eD$, $D \geq 1$ — константа из теоремы 2. Из замечания к лемме 7 следует, что

$$n\tau(f; 1/n)_L \geq 2^{-1}(\sup\{f(x): x \in [0, 1]\} - \inf\{f(x): x \in [0, 1]\}) = \|f\|_{[0, 1]}.$$

Тогда имеем

$$(22) \quad R_n(f)_r \leq R_1(f)_r \leq 1 \leq Bn^{-1} \ln e^{n/B} \leq Bn^{-1} \ln \|f\|_{[0, 1]} \leq 32eDn^{-1} \ln(e + n\tau(f; 1/n)_L).$$

Если $n \leq B^2$, то очевидно выполнены неравенства

$$(23) \quad R_n(f)_r \leq 1 \leq B^2n^{-1} \leq (32eD)^2n^{-1} \ln(e + n\tau(f; 1/n)_L).$$

Пусть $n\tau(f; 1/n)_L \leq e$ и $n > B^2$. Согласно лемме 7 существует ступенчатая функция s , непрерывная слева в любой точке $x \in (0, 1]$ $s(0) = s(+0)$, со скачками в точках $x_i = i/2n$, $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, для которой $\bigvee_0^1 s \leq 8n\tau(f; 1/n)_L$ и $r([0, 1]; f, s) \leq 1/n$. Положим $s(x) = s(1)$ при $x > 1$ и рассмотрим функцию Стеклова $s_h(x) = h^{-1} \int_0^h s(x+t)dt$, $h = 1/2n$. Очевидно $\bigvee_0^1 s'_h = h^{-1} \bigvee_0^1 (s(x+h) - s(x)) \leq 16h^{-1}n\tau(f; 1/n)_L \leq 32en$ и $r([0, 1]; s, s_h) \leq h = 1/2n$. Из теоремы 2 учитывая, что $n > B^2 > 4$, имеем $R_n(s_h)_c \leq Dn^{-2} \bigvee_0^1 s'_h \leq 32eDn^{-1}$ и, следовательно,

$$(24) \quad R_n(f)_r \leq r([0, 1]; f, s) + r([0, 1]; s, s_h) + R_n(s_h)_c \leq n^{-1} + 2^{-1}n^{-1} + 32eDn^{-1} \leq 33eDn^{-1} \ln(e + n\tau(f; 1/n)_L).$$

Осталось рассмотреть случай, когда $\|f\|_{[0, 1]} \leq e^{n/B}$, $B = 32eD$, $n > B^2$, $n\tau(f; 1/n)_L \geq e$. Положим $r = [\ln(n\tau(f; 1/n)_L)]$, $h = 2eD/n$, $m = [1/2rh]$. Тогда, учитывая очевидное неравенство $n\tau(f; 1/n)_L \leq 2n\|f\|_{[0, 1]}$ и то, что $\ln x \leq \sqrt{x}$ для $x \geq e^2$, получаем

$$(25) \quad 2rh = 2[\ln(n\tau(f; 1/n)_L)]2eDn^{-1} \leq 4eDn^{-1} \ln(2n\|f\|_{[0, 1]}) \leq 4eDn^{-1} \ln(2ne^{n/B}) = 4eDn^{-1} \ln(2n) + 1/8 \leq 1/2$$

и, следовательно,

$$(26) \quad m \geq 2, 1/2rh \geq m \geq 1/4rh, \quad rh \leq 1/2m.$$

Согласно лемме 7 существует ступенчатая функция s со скачками в точках $x_i = i/2m$, $i = 1, 2, \dots, 2m-1$ такая, что $s(x) = s(x-0)$, $x \in (0, 1]$, $s(0) = s(+0)$,

$$(27) \quad \bigvee_0^1 s \leq 8m\tau(f; 1/m)_L, \quad r([0, 1]; f, s) \leq 1/m.$$

Положим $s(x) = s(1)$ для $x > 1$ и рассмотрим следующую функцию Стеклова:

$$s_h(x) = h^{-r} \int_0^h \int_0^h \dots \int_0^h s(x + t_1 + t_2 + \dots + t_r) dt_1 dt_2 \dots dt_r.$$

Так как $rh \leq 1/2m$, согласно (26), то

$$(28) \quad r([0, 1]; s, s_h) \leq rh.$$

С другой стороны, $s_h^{(r)}(x) = h^{-r} \sum_{v=0}^r \binom{r}{v} (-1)^{r+v} s(x + vh)$ для всех $x \in [0, 1]$, исключая конечное число точек и, следовательно, $\bigvee_0^1 s_h^{(r)} \leq 2^r h^{-r} \bigvee_0^1 s \leq 82^r h^{-r} m\tau(f; 1/m)_L$. Из (25) имеем $r \leq 1/4h = n/8eD < n/4$ или $n \geq 4r$. Тогда, согласно теореме 2, для $r = [\ln(n\tau(f; 1/n)_L)]$, имеем

$$(29) \quad R_n(s_h)_c \leq 82^r D^r h^{-r} n^{-r-1} m\tau(f; 1/m)_L.$$

Из (27)–(29) получаем

$$\begin{aligned} R_n(f)_r &\leq r([0, 1]; f, s) + r([0, 1]; s, s_h) + R_n(s_h)_c \\ &\leq m^{-1} + rh + 82^r D^r h^{-r} n^{-r-1} m\tau(f; 1/m)_L. \end{aligned}$$

Из последнего, учитывая (26), определения r , h и m и то, что функция $\tau(f; \delta)_L$ неубывающая на $[0, \infty)$ и $\tau(f; \lambda\delta) \leq (\lambda+1)\tau(f; \delta)_L$, $\lambda, \delta \geq 0$ (см. [12–13]), получаем

$$\begin{aligned} (30) \quad R_n(f)_r &\leq 4rh + rh + 8(2D)^r (2eD)^{-r} n^r n^{-r-1} m\tau(f; 1/m)_L \\ &\leq 10eDn^{-1} \ln(n\tau(f; 1/n)_L) + 8e^{-r} (4eDr)^{-1} \tau(f; 8eDr/n) \\ &\leq 10eDn^{-1} \ln(n\tau(f; 1/n)_L) + 32en^{-1} \leq 42eDn^{-1} \ln(e + n\tau(f; 1/n)_L). \end{aligned}$$

Окончательно, из (22)–(24) и (30) получаем, что существует константа $C = (32eD)^2$, для которой

$$R_n(f)_r \leq Cn^{-1} \ln(e + n\tau(f; 1/n)_L)$$

для всех натуральных n . Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в Хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, 24, 1969, № 5, 141–178.
2. П. П. Петрушев. Рациональные приближения в хаусдорфовой метрике. *Доклады БАН*, 31, 1977, 155–158.
3. Bl. Sendov, V. A. Popov. On a Generalization of Jackson's Theorem for Best Approximation. *J. Approxim. Theory*, 9, 1973, 102–111.
4. Бл. Сендов. Аппроксимация на функции с алгебраичными полиномами по отношению на една метрика от хаусдорфовски тип. *Годишник Соф. унив., Физ.-мат. фак.*, 55, 1962, 1–39.
5. Т. П. Боянов. О порядке наилучшего приближения алгебраическими многочленами относительно расстояния хаусдорфского типа. *Доклады БАН*, 23, 1970, 635–638.
6. А. А. Гончар. Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения. *Мат. сб.*, 72, 1967, 489–503.
7. А. А. Гончар. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями. *Мат. сб.*, 73, 1967, 630–638.

8. D. J. Newman. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Math. J.*, **11**, 1964, 11—14.
9. V. A. Попов. Uniform rational approximation of the class V_r and its applications. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **29**, 1977, 110—129.
10. Бл. Сендов. Аппроксимация относительно хаусдорфова расстояния. *Диссертация*. Москва, 1967.
11. П. П. Коровкин. Опыт аксиоматического построения некоторых вопросов теории приближений. *Уч. зап. Калин. гос. инст.*, **69**, 1969, 91—109.
12. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно-монотонных (в частности рациональных) функций. *Мат. сб.*, **101**, 1976, 508—541.
13. A. Andreev, V. A. Попов, Bl. Sendov. Jackson's type theorems for oned-sided polynomial and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **30**, 1977, 1533—1536.
14. V. A. Попов. On the connection between rational and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **27**, 1974, 623—626.
15. З. А. Чантурия. Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье. *Доклады АН СССР*, **214**, 1974, 63—66.
16. Бл. Сендов, В. А. Попов. Об аппроксимации сплайн-функциями. *Доклады БАН*, **23**, 1970, 755—758.
17. P. Szűsz, P. Turan. On the constructive theory of functions. *Studia Sci. Math. Hung.*, **1**, 1966, 315—322.
18. G. Freud. Über die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17**, 1966, 313—324.
19. G. Freud. On rational approximation of differentiable functions. *Studia Sci. Acad. Hung.*, **5**, 1970, 437—439.
20. П. П. Петрушев, В. Х. Христов. О приближении полиномами Мюнца в метрике Хаусдорфа. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 955—958.
21. В. А. Попов, П. П. Петрушев. Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями. *Мат. сб.*, **103**, 1977, 285—292.
22. П. П. Петрушев. Равномерные рациональные аппроксимации функций класса V_r . *Доклады БАН*, **31**, 1978, 1535—1538.
23. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. М., 1948.
24. Бл. Сендов. Некоторые проблемы хаусдорфовой аппроксимации. В сб. *Теория приближения функций*. Москва, 1977, 278—282.