Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВЕДЕНИИ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

ИВАН К. ТОНОВ

В теории многообразий ассоциативных алгебр рассматриваются три вида произведений: произведение в смысле Неймана — Шмелькина, произведение в смысле Бергмана — Левина и коммутант. В работе изучаются некоторые связи между этими произведениями и некоторые вопросы нетеровости многообразий.

1. Введение. Пусть $K\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра счетного ранга, свободно порожденная множеством переменных $X=\{x_1, x_2, \dots\}$, где K — поле нулевой характеристики. Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между многообразиями и вполне характеристическими идеалами (T-идеалами) свободной алгебры $K\langle X\rangle$, именно если $\mathfrak{M}$ — класс всех алгебр, удовлетворяющих тождествам из T, то T представляет собой множество всех тождеств, которые выполняются в каждой алгебре из класса $\mathfrak{M}$. Поэтому соответствующий T-идеал многообразию $\mathfrak{M}$ мы обозначаем через $T(\mathfrak{M})$, а если некоторый T-идеал порождается как T-идеалом некоторой системой $\{f_i, i\in I\}$ многочленов, то мы обозначаем $T=\{f_i, i\in I\}^T$.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — многообразия алгебр. Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ есть многообразие всех алгебр, которые являются расширениями алгебры из $\mathfrak{M}$ при помощи алгебры из $\mathfrak{N}$. Некоторые авторы называют эту операцию произведением в смысле Неймана — Шмелькина. Хорошо известно, что произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ определяется всеми тождествами вида $f(g_1, g_2, \dots, g_n)=0$, где $f\in T(\mathfrak{N})$, $g_i\in T(\mathfrak{N})$, то есть

$$T(\mathfrak{M}\mathfrak{N})=\{f(g_1, g_2, \dots, g_n),\ f\in T(\mathfrak{M}),\ g_i\in T(\mathfrak{N})\}^T. \tag{1}$$

Для многообразий алгебр с единицей от определения вытекает, что произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ является обычным объединением многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$. Поэтому удобно считать равенство (1) как определение произведения многообразий.

Кроме этого произведения Бергманом и Левиным в [8] было введено другое произведение. Оно определяется равенстовом

$$T(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{N})=T(\mathfrak{M})\,T(\mathfrak{N}). \tag{2}$$

Здесь имеется в виду обычное произведение идеалов в алгебре $K\langle X\rangle$.

По аналогии с теорией групп [1] обозначим через $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ многообразие, определенное равенством

$$T([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}])=[T(\mathfrak{M}), T(\mathfrak{N})]=\{[f, g], f\in T(\mathfrak{M}), g\in T(\mathfrak{N})\}^T. \tag{3}$$

Оно называется коммутантом многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

В работе изучаются некоторые связи между разными произведениями многообразий и некоторые вопросы нетеровости произведений многообразий.

2. Произведение в смысле Неймана — Шмелькина и коммутант многообразий. В этом параграфе изучается связь между произведением в смысле Неймана — Шмелькина и коммутантом многообразий ассоциативных алгебр. Напомним, что для каждого нетривиального многообразия $\mathfrak{M}$ определяется число $m=N(\mathfrak{M})$ (норма многообразия $\mathfrak{M}$) как минимальное число, для которого в T-идеале $T(\mathfrak{M})$ содержится полилинейный многочлен степени m. Известно, что $N(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)=R(\mathfrak{A}_1)N(\mathfrak{A}_2)$, и легко проверяется, что $N([\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2])=N(\mathfrak{A}_1)+N(\mathfrak{A}_2)$.

Предложение 1. *Многообразия* $\mathfrak{A}_1[\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3]$ *и* $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3]$, *вообще говоря, могут быть несравнимы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{N}_2$ — многообразие алгебр с нулевым умножением, а $\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_3=\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — единичное многообразие, состоящее только из нулевой алгебры, то есть $T(\mathcal{E})=\{x\}^T$. Тогда многообразие $\mathfrak{N}_2[\mathcal{E}, \mathcal{E}]$ не содержится в многообразии $[\mathfrak{N}_2\mathcal{E}, \mathfrak{N}_2\mathcal{E}]=[\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_2]$, потому что алгебра верхних треугольных матриц второго порядка принадлежит многообразию $\mathfrak{N}_2[\mathcal{E}, \mathcal{E}]$([2]), но не принадлежит многообразию $[\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_2]$.

Чтобы доказать, что и другое включение не имеет места, мы должны проверить, что тождество $[x_1, x_2][x_3, x_4]=0$ не является следствием тождества $[x_1x_2, x_3x_4]=0$. Действительно, если

$$[x_1, x_2]\,[x_3, x_4]=\sum_\sigma \alpha_\sigma[x_{\sigma(1)}\, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}],$$

где $\alpha_\sigma\in K$ и σ пробегает все перестановки множества $\{1, 2, 3, 4\}$, то подставляя вместо x_1, x_2, x_3, x_4 квадратные матрицы, всегда в правой стороне получается матрица с нулевым следом. Тогда если $x_1=e_{11}$, $x_2=e_{12}$, $x_3=e_{22}$, $x_4=e_{21}$, то получим $[e_{11}, e_{12}]\,[e_{22}, e_{21}]=e_{12}e_{21}=e_{11}$. Но след этой матрицы не равен нулю. Предложение доказано.

Далее, мы изучем те многообразия $\mathfrak{M}$, для которых выполняется

$$\mathfrak{A}_1[\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3]\cap\mathfrak{M}=[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3]\cap\mathfrak{M}, \tag{4}$$

где $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ — произвольные подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$.

Из предложения 1 сразу следует, что если некоторое многообразие $\mathfrak{M}$ удовлетворяет (4), то в T-идеале $T(\mathfrak{M})$ содержатся многочлены вида

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)=[x_1\, x_2, x_3\, x_4]+\sum_\sigma\lambda_\sigma[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\,[x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}],\ \lambda_\sigma\in K, \tag{5}$$

$$\psi(x_1, x_2, x_3, x_4)=[x_1, x_2]\,[x_3, x_4]+\sum_\sigma\mu_\sigma[x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\, x_{\sigma(4)}],\ \mu_\sigma\in K. \tag{6}$$

Здесь σ пробегает все перестановки множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Сравнения по модулю $T(\mathfrak{M})$ обозначим через „$\equiv$“.

Так как в [3] полагая в (5) $x_1=x_2=x$; $x_3=x_4=y$, получим $[x^2, y^2]+\lambda[x, y]^2\equiv 0$, где $\lambda\in K$. Из (6) после подстановки $x_1=x_3=x$; $x_2=x_4=y$ имеем $[x, y]^2+\mu_2[yx, xy]+\mu_2[x^2, y^2]\equiv 0$, где μ_1, $\mu_2\in K$. Если в последнем сравнении заменим x и y, получим $[x, y]^2-\mu_1[yx, xy]-\mu_2[x^2, y^2]\equiv 0$, откуда $[x, y]^2\equiv 0$, а из первого сравнения — $[x^2, y^2]\equiv 0$.

Линеаризуя, получаем

$$[x_1\circ x_2, x_3\circ x_4]\equiv 0. \tag{7}$$

Из сравнения (7), очевидно, вытекают сравнения

(8) $$[x_1x_2x_3,\ x_4\circ x_5]\equiv 0,$$

(9) $$[x_1x_2x_3,\ x_4x_5x_6]\equiv 0,$$

(10) $$[x_1x_2x_3x_4x_5x_6,\ x_7]\equiv 0,$$

(11) $$u[x,\ y]v\equiv 0,$$

где u и v — слова от переменных и $\deg u+\deg v\geq 6$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие ассоциативных алгебр. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *Для любых подмногообразий $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ многообразия $\mathfrak{M}$ выполяется* (4), *то есть* $\mathfrak{A}_1[\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3]\cap\mathfrak{M}=[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3]\cap\mathfrak{M}$.

$$\text{(ii)}\ [x_1x_2,\ x_3x_4]+\sum_\sigma\lambda_\sigma[x_{\sigma(1)},\ x_{\sigma(2)}]\ [x_{\sigma(3)},\ x_{\sigma(4)}]\equiv 0,$$

$$[x_1,\ x_2]\ [x_3,\ x_4]+\sum_\sigma\mu_\sigma[x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)},\ x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}]\equiv 0,$$

(12) $$[x_1,\ x_2]\circ[x_3,\ x_4]\equiv 0,$$

(13) $$[x_1,\ x_2,\ x_3[\ [x_4,\ x_5]\equiv 0.$$

(iii) *Для любого подмногообразия $\mathfrak{B}$ многообразия $\mathfrak{M}$ выполняется $\mathfrak{A}\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B}=\mathfrak{B}\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — подмногообразие коммутативных алгебр многообразия $\mathfrak{M}$. Здесь $\mathfrak{A}\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B}$ означает так называемое $\mathfrak{M}$-произведение, то есть $\mathfrak{A}\langle\circ,\ \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cap\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Начнем с доказательства эквивалентности утверждений (i) и (ii).

Пусть выполняется (i). Верность первых двух сравнений вытекает из предложения 1. Чтобы доказать третье сравнение, пусть $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_\circ$ — многообразие антикоммутативных ассоциативных алгебр, а $\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_3=\mathcal{E}$. Так как $T[(\mathfrak{A}_0,\ \mathfrak{A}_0])\subset(\mathfrak{M})$ (это легко видно от сравнений (7), (8), (9), (10), (11), то и $T(\mathfrak{A}_0[\mathcal{E}\ \mathcal{E}]\subset T(\mathfrak{M})$. Следовательно $[x_1,\ x_2]\circ[x_3,\ x_4]\equiv 0$. А так как $[x_1,\ x_2]x_3\in T(\mathfrak{A}_0)$, еще получим, что

$$0\equiv([x_1,\ x_2]x_3)\circ[x_4,\ x_5]=[x_1,\ x_2]x_3[x_4,\ x_5]+[x_4,\ x_5]\,[x_1,\ x_2]x_3$$

$$=[x_1,\ x_2]x_3[x_4,\ x_5]+([x_1,\ x_2]\circ[x_4,\ x_5])x_3-[x_1,\ x_2]\ [x_4,\ x_5]x_3\equiv-[x_1,\ x_2]\ [x_4,\ x_5,\ x_3]$$

и из доказанного выше вытекает, что $[x_1,\ x_2,\ x_3]\ [x_4,\ x_5]\equiv 0$ после подходящей перестановки переменных. Таким образом, из верности (i) следует (ii).

Пусть выполнется (ii). Чтобы доказать, что из (ii) вытекает (i), мы должны проверить равенство $T(\mathfrak{A}_1[\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_3])+T(\mathfrak{M})=T([\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3])+T(\mathfrak{M})$ для любых подмногообразий $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ многообразия $\mathfrak{M}$.

Получим некоторые сравнения по модулю $T(\mathfrak{M})$. Из (12) имеем $([x_1,\ x_2]\circ[x_3,\ x_4])\ [x_5,\ x_6]\equiv 0$, а из (13) — $[(x_1,\ x_2],\ [x_3,\ x_4]]\,[x_5,\ x_6]\equiv 0$, откуда

(14) $$[x_1,\ x_2]\ [x_3,\ x_4]\,[x_5,\ x_6]\equiv 0.$$

При помощи (14) из (5) и (6) получается

(15) $$[x_1x_2,\ x_3x_4]\ [x_5,\ x_6]\equiv 0,$$

$$[x_1, x_2]\ [x_3x_4,\ x_5x_6] \equiv 0. \tag{16}$$

Приступим к доказательству. Пусть $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T(\mathfrak{A}_1)$ и $g_1, g_2, \ldots, g_n \in T([\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3])$. Мы докажем, что

$$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in T([\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3]) + T(\mathfrak{M}).$$

Действительно, если $n \geqq 3$, из (14) вытекает, что $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in T(\mathfrak{M})$, а, следовательно, и $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in T([\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3]) + T(\mathfrak{M})$. Рассмотрим случай $n=2$. Тогда $f(x_1, x_2)$ совпадает с некоторым из полиномов $[x_1, x_2]$, $x_1 \circ x_2$, x_1x_2. Если $\deg g_1 + \deg g_2 \geqq 8$, то из (11) следует тоже, что $f(g_1, g_2) \in T(\mathfrak{M})$. Пусть $\deg g_1 + \deg g_2 \leqq 7$. Тогда одно из чисел $\deg g_1$ и $\deg g_2$ меньше либо равно 3, которое показывает, что, по крайней мере, одно из многообразий $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$ имеет норму 1, а другое имеет норму меньше либо равную 2. Пусть, например, $N(\mathfrak{A}_3)=1$ и $N(\mathfrak{A}_2) \leqq 2$.

1. сл. $f(x_1, x_2)=[x_1, x_2]$ и $x_1x_2 \notin T(\mathfrak{A}_1)$.

Если $\deg g_1 \geqq 3$ и $\deg g_2 \geqq 3$, что возможно только когда $N(\mathfrak{A}_2)=2$, то из (9) имеем $f(g_1, g_2) \in T(\mathfrak{M})$. Пусть $N(\mathfrak{A}_2)=1$, то есть $\mathfrak{A}_2=\mathcal{E}$. Тогда $[\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3] = \mathfrak{A}$ — многообразие коммутативных алгебр и

$$[g_1, g_2] \in T([\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]) + T(\mathfrak{M}) = T([\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3]) + T(\mathfrak{M}).$$

2 сл. $f(x_1, x_2)=x_1x_2$.

Пусть $N(\mathfrak{A}_2)=2$. Многочлены g_1 и g_2 представим линейной комбинацией элементов вида $y^{\varepsilon}[h, x]\,z^{\eta}$, где $h \in T(\mathfrak{A}_2)$, $\deg h \geqq 2$, ε, $\eta=0{,}1$. Тогда по (6) имеем

$$[h_1, x_1]\ [h_2, x_2] \equiv \sum_{\sigma,\tau} a_{\sigma,\tau}[h_{\sigma(1)}h_{\sigma(2)},\ x_{\tau(1)}x_{\tau(2)}].$$

Другие слагаемые по модулю $T(\mathfrak{M})$ нулевые. Это видно из (15) и (16). Кроме, того, $[h_1, x_1]\,y[h_2, x_2]=[h_1, x_1, y]\,[h_2, x_2]+y[h_1, x_1]\,[h_2, x_2] \equiv y[h_1, x_1]\,[h_2, x_2]$ Таким образом $f(g_1, g_2) \in T([\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3]) + T(\mathfrak{M})$.

3 сл. $f(x_1, x_2)=x_1 \circ x_2$, но $x_1x_2 \notin T(\mathfrak{A}_1)$.

Тогда для любых $g_1, g_2 \in T([\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3])$ из (7) имеем $f(g_1, g_2) \in T(\mathfrak{M})$. Окончательно $T(\mathfrak{A}_1[\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3]) \subset T([\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3]) + T(\mathfrak{M})$.

Пусть $f \in T(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)$ и $g \in T(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3)$. Мы докажем, что $[f, g] \in T(\mathfrak{A}_1[\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3]) + T(\mathfrak{M})$.

Если $\deg f \geqq 3$ и $\deg g \geqq 3$, то из (9) следует, что $[f, g] \in T(\mathfrak{M})$.

Если $\deg f=2$, то либо $f(x_1, x_2)=x_1x_2$, либо $f(x_1, x_2)=[x_1, x_2]$, либо $f(x_1, x_2)=x_1 \circ x_2$. Это возможно, когда $\mathfrak{A}_2=\mathcal{E}$ и $N(\mathfrak{A}_1)=2$. Пусть, например, $f(x_1, x_2)=x_1x_2$. Тогда $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{N}_2$ и $[f, g]$ линейно выражается многочленами вида $[x_1x_2, g_1g_2]$, где $g_1, g_2 \in T(\mathfrak{A}_3)$. Из (5) имеем

$$[x_1x_2,\ g_1g_2] \equiv \sum_{\alpha,\sigma} a_{\sigma,\tau}\ [x_{\sigma(1)},\ g_{\tau(1)}]\ [x_{\sigma(2)},\ g_{\tau(2)}] + \beta[x_1, x_2]\ [g_1, g_2] + \gamma[g_1, g_2]\ [x_1, x_2].$$

Но из (15) и (16) имеем $[x_1, x_2]\,[g_1, g_2] \equiv [g_1, g_2]\,[x_1, x_2] \equiv 0$ и, следовательно, $[x_1x_2, g_1g_2] \in T(\mathfrak{A}_1[\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3]) + T(\mathfrak{M})$.

Случаи $f(x_1, x_2)=[x_1, x_2]$ и $f(x_1, x_2)=x_1 \circ x_2$, но $x_1x_2 \notin T(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)$ рассматриваются аналогично.

Таким образом эквивалентность утверждений (i) и (ii) доказана. Сейчас мы легко докажем, что (iii) эквивалентно с (i) и (ii) по схеме (i) $\to$ (iii) $\to$ (ii).

Пусть имеет место (i). Тогда $\mathfrak{B}\langle \circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\langle \circ, \mathfrak{M}\rangle[\mathcal{E}, \mathcal{E}] = [\mathfrak{B}\mathcal{E}, \mathfrak{B}\mathcal{E}] \cap \mathfrak{M}. = [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}] \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{A}\langle \circ, \mathfrak{M}\rangle\mathfrak{B}$.

При доказательстве (i) $\to$ (ii) мы получили сравнения (ii), используя в качестве примеров для многообразия $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$ единичное многообразие $\mathcal{E}$, откуда и получается импликация (iii) $\to$(ii).

В связи с этой теоремой можно поставить аналогичную задачу для умножения справа, то есть описать все многообразия $\mathfrak{M}$, для которых выполняется $[\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2]\mathfrak{A}_3 \cap \mathfrak{M} = [\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3] \cap \mathfrak{M}$. Известно, что всегда имеет место включение $[\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3] \subseteq [\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2]\mathfrak{A}_3$, но иногда оно может быть и строгое. Пример в этом направлении:

Пусть $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$ — многообразие коммутативных алгебр, а $\mathfrak{A}_2 = \mathcal{E}$ и $\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{N}_2$. Тогда элемент $[[x_1x_2, x_3x_4]x_5, x_6x_7] \in T([\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_2])$, но не лежит в идеале $T([\mathfrak{A}, \mathcal{E}]\mathfrak{N}]^2$, потому что все тождества многообразия $[\mathfrak{A}, \mathcal{E}]\mathfrak{N}_2$ являются тождествами в алгебре Грассмана, а $[[x_1x_2, x_3x_4]x_5, x_6x_7] = 0$ не является таким. То же самое относится для многочлена $[x_1[x_2x_3, x_4x_5], x_6x_7]$.

2. Нетеровы многообразия. В работах [3] и [5] описаны лево (право, слабо) нетеровы многообразия ассоциативных алгебр, то есть такие многообразия $\mathfrak{M}$, что каждая конечно-порожденная алгебра $A \in \mathfrak{M}$ удовлетворяет условию максимальности на левых (правых, двусторонних) идеалах. В [4] описаны почти лево (право, слабо) нетеровы мнгообразия, т. е. такие многообразия $\mathfrak{M}$, которые не являются лево (право, слабо) нетеровыми, а каждое собственное подмногообразие $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ является лево (право, слабо) нетеровым. Напомним результат этой работы.

Предложение 2 (Ю. Н. Мальцев). *Многообразие $\mathfrak{M}$ является почти лево (право, слабо) нетеровым тогда и только тогда, когда*

$$T(\mathfrak{M}) = \{x_1[x_2, x_3]\}^T (T(\mathfrak{M}) = \{[x_1, x_2]x_3\}^T, \quad T(\mathfrak{M}) = \{x_1[x_2, x_3]x_4\}^T.$$

Широко известно, что если многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей является лево нетеровым, оно энгелево, то есть $T(\mathfrak{M})$ содержит многочлены вида $[x, y, y, \ldots, y]$ и, следовательно, оно и право нетерово. В работе [4] описаны почти энгелевы многообразия алгебр с единицей. Они определяются равенством $T(\mathfrak{M}) = \{[x_1, x_2]\,[x_3, x_4]\}^T$. Автор [7] описал почти слабо нетеровы многообразия алгебр с единицей. Они определяются следующим образом:

$$T(\mathfrak{M}) = \{S_4, [[x_1, x_2]\,[x_3, x_4], x_5], [x_1, x_2]\,[x_3, x_4]\,[x_5, x_6]\}^T.$$

В работах [3] и [6] решается вопрос, когда многообразие $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ (произведение в смысле Неймана — Шмелькина) является лево (право, слабо) нетеровым. В этом параграфе решается аналогичный вопрос для произведения в смысле Бергмана — Левина и для коммутанта.

Теорема 2. *Произведение $\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N}$ в смысле Бергмана — Левина слабо нетерово тогда и только тогда, когда многообразие $\mathfrak{M}$ — лево нетерово, а многообразие $\mathfrak{N}$ — право нетерово.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — лево нетерово, а $\mathfrak{N}$ — право нетерово многообразие. Имеем ([5])

$$xy^n + \sum_{p=1}^{n} \alpha_p y^p x y^{n-p} \in T(\mathfrak{M}), \quad \alpha_p \in K.$$

$$y^m x + \sum_{q=0}^{m-1} \beta_q y^q x y^{m-q} \in T(\mathfrak{N}), \quad \beta_q \in K.$$

Следовательно в $T(\mathfrak{M}).T(\mathfrak{N})$ лежит многочлен

$$(xy^n+\sum_{p=1}^{n}\alpha_p y^p xy^{n-p})\,(y^m x+\sum_{q=0}^{m-1}\beta_q y^q xy^{m-q}),$$

который имеет вид $xy^{n+m}x+yf_1(x, y)+f_2(x, y)\,y$, которое показывает, что $\mathfrak{M}.\mathfrak{N}$ — слабо нетерово.

Пусть $\mathfrak{M}.\mathfrak{N}$ — слабо нетерево. Мы докажем, что многообразие $\mathfrak{M}$ — лево нетерово. Если предположим, что $\mathfrak{M}$ не является лево нетеровым, по лемме Цорна $\mathfrak{M}$ содержит почти лево нетерово многообразие. Тогда $T(\mathfrak{M}).T(\mathfrak{N})\subseteq\{x_1, [x_2, x_3]\}^T.T(\mathfrak{N})\subseteq\{x_1[x_2, x_3]x_4\}^T$.

Это включение показывает, что многообразие $\mathfrak{M}.\mathfrak{N}$ содержит почти слабо нетерово многообразие, а это противоречит предположению. Аналогично доказывается, что многообразие $\mathfrak{N}$ — право нетерово. Теорема доказана.

Теорема 3. *Многообразие $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ — слабо нетерово тогда и только тогда, когда одно из многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ лево нетерово, а другое — право нетерово.*

Доказательство. Пусть например $\mathfrak{M}$ — лево нетерово, а $\mathfrak{N}$ — право нетерово многообразие. Как в теореме 2, имеем

$$xy^n+\sum_{p=1}^{n}\alpha_p y^p xy^{n-p}\in T(\mathfrak{M}),\ \alpha_p\in K,$$

$$y^m z+\sum_{q=0}^{m-1}\beta_q y^q z\,y^{m-q}\in T(\mathfrak{N}),\quad \beta_q\in K.$$

Следовательно в $[T(\mathfrak{M}), T(\mathfrak{N})]$ лежит многочлен $[xy^n+\sum_{p=1}^{n}\alpha_p y^p xy^{n-p}, y^m z+\sum_{q=0}^{m-1}\beta_q y^q xy^{m-q}]$, который имеет вид $xy^{n+m}z-zy^{n+m}x+yf_1(x, y, z)+f_2(x, y, z)\,y$. Подставим $z=yx$ и мы получим, что многообразие $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ является слабо нетеровым.

Пусть многообразие $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ — слабо нетерово. Предположим, что например $\mathfrak{M}$ не является ни лево, ни право нетеровым. Тогда, по лемме Цорна, оно содержит почти лево и почти право нетерово многообразие, а, следовательно, и их объединение. На языке T-идеалов это означает, что $T(\mathfrak{M})\subset\{x_1[x_2, x_3]\}^T\cap\{[x_1, x_2]x_3\}^T$. Но тогда для произвольных $f\in T(\mathfrak{M})$ и $g\in T(\mathfrak{N})$ мы имеем $[f, g]=fg-gf\in\{x_1[x_2, x_3]x_4\}^T$. Здесь использовали последовательно, что $f\in\{x_1[x_2, x_3]\}^T$ и $f\in\{[x_1, x_2]x_3\}^T$. Таким образом $T([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}])\subset\{x_1[x_2, x_3]x_4\}^T$, то есть $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ содержит почти слабо нетерово подмногообразие. Это является противоречием. Следовательно каждое из многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — лево или право нетерово.

Дальше заметим, что если одно из многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ является лево и право нетеровым, то утверждение теоремы доказано. Пусть, например, $\mathfrak{M}$ — лево нетерово, которое не яляется право нетеровым. Тогда $T(\mathfrak{M})\subseteq\{[x_1, x_2]x_3\}^T$ и если предположим, что $\mathfrak{N}$ не является право нетеровым, то, по лемме Цорна, $T(\mathfrak{N})\subseteq\{[x_1, x_2]x_3\}^T$. Уже легко можно проверить, что $[T(\mathfrak{M}), T(\mathfrak{N})]\subseteq\{x_1[x_2, x_3]x_4\}^T$. Полученное противоречие доказывает теорему.

В ходе доказательства последней теоремы нам приходилось работать с пересечением идеалов тождеств почти лево и почти право нетеровых многообразий. Поэтому интересно описать его базис тождеств.

Предложение 3. *Имеет место равенство*

$$\{x_1[x_2, x_3]\}^T \cap \{[x_1, x_2]x_3\}^T = \{S_3, x_1[x_2, x_3]x_4, [x_1, x_2][x_3, x_4]\}^T,$$

где $S_3 = x_1[x_2, x_3] + x_2[x_3, x_1] + x_3[x_1, x_2] = [x_1, x_2]x_3 + [x_2, x_3]x_1 + [x_3, x_1]x_2$ — *стандартное тождество третьей степени.*

Доказательство. Мы положим $Q = \{S_3, x_1[x_2, x_3]x_4, [x_1, x_2][x_3, x_4]\}^T$. Очевидно $Q \subseteq \{x_1[x_2, x_3]\}^T \cap \{[x_1, x_2]x_3\}^T$. Пусть полилинейный многочлен $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{x_1[x_2, x_3]\}^T \cap \{[x_1, x_2]x_3\}^T$. Тогда по модулю Q имеем

$$\varphi(x) \equiv \sum_{i<j} \lambda_{ij}[x_i, x_j]x_1 \ldots \widehat{x_i} \ldots \widehat{x_j} \ldots x_n + \sum_{i<j} \beta_{ij} x_1 \ldots \widehat{x_i} \ldots \widehat{x_j} \ldots x_n[x_i, x_j] (\mathrm{mod} Q).$$

При этом мы использовали для переработки по модулю Q только многочлены $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ и $x_1[x_2, x_3]x_4$. Если, например, некоторое $i_0 \neq 1$, тогда по модулю S_3 переработаем

$$[x_{i_0}, x_j]x_1 \equiv [x_1, x_j]x_{i_0} - [x_1, x_{i_0}]x_j \ (\mathrm{mod}\, \{S_3\}^T),$$

то есть сравнение получает вид

$$\varphi(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i[x_1, x_i]x_2 \ldots \widehat{x_i} \ldots x_n + \sum_{j=1}^{n=1} \beta_j x_1 \ldots \widehat{x_j} \ldots x_{n-1}[x_j, x_n] \ \mathrm{mod}\, Q).$$

Так как $\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j x_1 \ldots \widehat{x_j} \ldots x_{n-1}[x_j, x_n] \in \{x_1[x_2, x_3]\}^T$, то $\sum_{i=2}^{n} \alpha_i [x_1, x_i] x_2 \ldots \widehat{x_i} \ldots x_n \in \{x_1[x_2, x_3]\}^T$. Мы покажем, что все коэффициенты α_i равны нулю. Пусть, например, $\alpha_{i_0} \neq 0$. Тогда полагая $x_{i_0} = x$, $x_1 = \ldots = \widehat{x}_{i_0} = \ldots = x_n = y$, мы получим, что $-\alpha_{i_0}xy^{n-1} + \alpha_{i_0}yxy^{n-2} \in \{x_1[x_2, x_3]\}^T$, то есть многообразие, определенное тождеством $x_1[x_2, x_3] = 0$, является лево нетеровым, которое противоречит соответствующему результату Ю. Н. Мальцева [4]. Следовательно все $\alpha_i = 0$, и уже можно утверждать, что $\varphi(x) \in Q$. Предложение доказано.

Теорема 4. *Произведение* $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ (*в смысле Неймана — Шмелькина*) *многообразий* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *ассоциативных алгебр с единицей является слабо нетеровым тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ — *многообразие коммутативных алгебр с единицей, а* $\mathfrak{N}$ *является подмногообразием некоторого энгелева многообразия* $\mathcal{E}_k$.

Доказательство. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{E}_k$, то, как в теореме 3, получается, что $xy^{2k-1}x + yf_1(x, y) + f_2(x, y)y \in T(\mathfrak{M}\mathfrak{N})$ и, следовательно, многообразие $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ — слабо нетерово.

Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ — слабо нетерово. Мы утверждаем, что $N(\mathfrak{M}) = 2$. Действительно, если $N(\mathfrak{M}) \geq 3$, получим, что $T(\mathfrak{M}\mathfrak{N}) \subseteq [K\langle x\rangle, K\langle x\rangle]^3$, которое противоречит результату работы [7]. Следовательно $N(\mathfrak{M}) = 2$, то есть $\mathfrak{M}$ совпадает с многообразием коммутативных алгебр.

Пусть многообразие $\mathfrak{N}$ не содержится в никаком энгелевом многообразии. Тогда оно содержит почти энгелево многообразие. Мы имеем тогда по [4], что

$$T(\mathfrak{M}\mathfrak{N}) = [T(\mathfrak{N}), T(\mathfrak{N})] \subseteq [[K\langle x\rangle, [K\langle x\rangle]^2, [K\langle x\rangle, K\langle x\rangle]^2],$$

и снова получим противоречие, которое и завершает доказательство.

Аналогично доказываются следующие утверждения.

Теорема 5. *Произведение $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{N}$ (в смысле Бергмана — Левина) многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ ассоциативных алгебр с единицей является слабо нетеровым тогда и только тогда, когда каждое из многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ является подмногообразием некоторого энгелева многообразия $\mathcal{E}_k$.*

Теорема 6. *Коммутант $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ ассоциативных алгебр с единицей — слабо нетерово многообразие тогда и только тогда, когда многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ являются подмногообразиями некоторого энгелева многообразия $\mathcal{E}_k$.*

В конце работы приводим описание хопфовых многообразий алгебр с единицей. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется хопфовым, если каждая конечно-порожденная алгебра $A\in\mathfrak{M}$ является хопфовой, то есть каждый эпиморфизм алгебры A является автоморфизмом. Этот результат — аналог соответствующего результата Ю. Н. Мальцева [4] для многообразий алгебр без единицы.

В [4] приведен пример Е. И. Зельманова конечно-порожденной нехопфовой полугруппы B без единицы с тождеством $x_1x_2x_3x_4=x_1x_2x_3x_4$. Построим алгебру $R=KB\oplus K$, где KB — полугрупповая алгебра. Лекго заметить, что алгебра R удовлетворяет тождества почти слабо нетеревого многообразия и что она нехопфова.

Теорема 7. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей является хопфовым тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ — слабо нетерово.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M}$ — хопфово многообразие, не являющееся слабо нетеровым, то, по лемме Цорна, $\mathfrak{M}$ содержит почти слабо нетерово многообразие. Предыдущий пример показывает, что это невозможно. Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ — нехопфово многообразие. Тогда $\mathfrak{M}$ содержит конечно порожденную алгебру A, изоморфную своей фактор-алгебре, то есть $A\cong A/I_1$, где I_1 — ненулевой идеал алгебры A. Но A/I_1 тоже нехопфова, и снова имеем $A/I_1\cong(A/I_1)/(I_2/I_1)$, где I_1 строго содержится в I_2 и так далее. Получим строго возрастающую цепочку идеалов, то есть многообразие $\mathfrak{M}$ — не слабо нетерово.

Вопрос об описании нетеровости некоторых произведений многообразий поставил автору Ю. Н. Мальцев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Нейман. Многообразия групп, Москва, 1969.
2. Ю. Н. Мальцев. Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц. *Алгебра и логика*, **10**, 1971, 393—401.
3. Ю. Н. Мальцев. Некоторые свойства произведений ассоциативных алгебр. *Алгебра и логика*, **11**, 1972, 673—689.
4. Ю. Н. Мальцев. О многообразиях ассоциативных алгебр. *Алгебра и логика*, **15**, 1976 579—584.
5. И. В. Львов. Условия максимальности в алгебрах с тождественными соотношениями. *Алгебра и логика*, **8**, 1969, 489—460.
6. М. Б. Гаврилов. О многообразиях ассоциативных алгебр. *Доклады БАН*, **21**, 1968, 989—993.
7. И. К. Тонов. Почти слабо нетеровы многообразия ассоциативных алгебр с единицей. *Плиска* **2**, 1981 (в печати).
8. G. Bergman, J. Levin. The semigroup of ideals of a fir is (usually) free. *J. London Math. Soc.*, **11**, 1975, 21—32.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 4. 12. 1978