Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Д. А. ЛЕЙТЕС

В работе описаны неприводимые представления супералгебры Ли бездивергентных векторных полей в тензорных полях. В конечномерном случае вычислены характеры неприводимых представлений. Доказано, что в „минимальной реализации“ инвариантные операции исчерпываются внешним дифференциалом и делением на сохраняющуюся форму объема, а в конечномерном случае еще интегралом Березина.

1. Предварительные сведения. Необходимые сведения и обозначения см. в [2] и [3].

1.1. Пусть Δ — образующая в суперпространстве форм объема $\mathrm{Vol}=\Sigma_{n-m}$ на (n, m)-мерном суперпространстве. Положим

$$CS(n, m)=\{D\in W(n, m)\mid L_D\Delta=\lambda(D)\Delta, \text{ где } \lambda\in k\},$$

$$S(n, m)=\{D\in W(n, m)\mid L_D\Delta=0\}.$$

Векторные поля $D\in S(n, m)$ называются бездивергентными. Название объясняется тем, что $L_D\Delta=\operatorname{div} D\,.\,\Delta$, где дивергенция $\operatorname{div} D$ поля $D=\Sigma D_i\partial/\partial u_i+\Sigma D_{n+j}\,\partial/\partial\xi_j$ определена формулой $\operatorname{div} D=\Sigma\partial D_i/\partial u_i-(-1)^{p(D)}\Sigma\partial D_{n+j}/\partial\xi_j$.

Конечномерные супералгебры Ли серии S и CS допускают деформацию как с четным, так и нечетным параметром. Именно положим $\tilde{\Delta}=(1+s\,\xi_1\ldots\xi_n)\Delta$, где s — число, если n четно, и образующий алгебры Грассмана, если n нечетно. Пусть $\tilde{W}(0, 2n)=W(0, 2n)$, а $\tilde{W}(0, 2n+1)=k[s]W(0, 2n+1)$, Положим

$$C\tilde{S}(0, n)=\{D\in\tilde{W}(0, n)\mid L_D\tilde{\Delta}=\lambda(D)\,\tilde{\Delta}, \text{ где } \lambda(D)\in k \text{ или } k[s]\}$$

$$\tilde{S}(0, n)=\{D\in\tilde{W}(0, n)\mid L_D\tilde{\Delta}=0\}.$$

Фильтрация в $W(n, m)$, описанная в [2], индуцирует фильтрацию в супералгебрах Ли серий CS, S, $C\tilde{S}$ и $\tilde{S}$. Обозначим суперпространство фильтрации i через $\mathscr{L}_i$, как и для серии W и пусть $L_i=\mathscr{L}_i/\mathscr{L}_{i+1}$. Очевидно, что градуированные супералгебры Ли, присоединенные $C\tilde{S}(0, n)$ и $\tilde{S}(0, n)$ изоморфны $CS(0, n)$ и $S(0, n)$ соответственно, если n четно, и $k[s]CS(0, n)$ и $k[s]S(0, n)$, если n нечетно.

2. Заметим, что $L_0\cong\mathfrak{gl}(n, m)$ (соотв. $sl(n, m)$, $\mathfrak{gl}(n\,;\,k[s])$, $sl(n\,;\,k[s])$) для серии CS (соотв. S, $C\tilde{S}$, $\tilde{S}$). В стандартной матричной реализации супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ базис в картановской подалгебре выберем состоящий из

диагональных элементов $\{E_{jj}\}$. Выберем в картановской подалгебре супералгебры Ли $sl(n, m)$ базис, состоящий из элементов $E_{11}-E_{22}, \ldots, E_{n-1, n-1}-E_{n, n}, E_{n, n}+E_{n+1, n+1}, E_{n+1, n+1}-E_{n+2, n+2}, \ldots$

Определение старшего вектора и старшего веса для серии $\mathfrak{gl}$ см. в [2]. Для серии sl оно аналогично. Отметки старшего веса даны относительно этих базисов в $\mathfrak{gl}$ и sl.

3. Теорема (о старшем весе). *Конечномерный неприводимый $sl(n, m)$-модуль содержит один, с точностью до пропорциональности, вектор старшего веса. Неприводимый конечномерный $sl(n, m)$-модуль определяется с точностью до изоморфизма старшим весом и четностью старшего вектора.*

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 8 в [3].

4. Обобщим чуть-чуть понятие тензорного поля, введенное в [2]. Пусть V есть L_0-модуль. Рассмотрим V как $\mathscr{L}_0$-модуль, положив $\mathscr{L}_1 V=0$. Элементы суперпространства $T(V)=\mathrm{Hom}_{V(\mathscr{L}_0)}(\mathscr{L}, V)$ назовем тензорными полями типа V. Если V — неприводимый L_0-модуль со старшим весом x и четным старшим вектором, то вместо $T(V)$ будем иногда писать $T(X)$.

Кроме форм Σ, Ω и Φ, введенных в [2], нам потребуется еще так называемые λ-плотности, определенные для серий CS и $C\tilde{S}$. Положим $\mathrm{Vol}^\lambda=T(\lambda str)$, где $\lambda \in k$. Элементы суперпространства Vol^λ называются λ-плотностями.

2. Результаты. Пусть V_1 и V_2 — неприводимые L_0-модули, а $c: T(V_1) \to T(V_2)$ есть $\mathscr{L}$-инвариантный дифференциальный оператор, $\mathrm{ord}\, c$-его порядка.

Теорема 1. *Если $\mathrm{ord}\, c=0$, то $V_1 \cong V_2$, а c — скалярный оператор, продолжающий этот изоморфизм. Если $\mathrm{ord}\, c>0$, то c пропорционален одному из описанных ниже операторов:*

а) дифференциал d в суперпространствах Σ, Ω или Φ, если $\mathscr{L}$ из серии S или $\tilde{S}$, и в суперпространствах $\Sigma \otimes \mathrm{Vol}^\lambda$, $\Omega \otimes \mathrm{Vol}^\lambda$ или $\Phi \otimes \mathrm{Vol}^\lambda$, если $\mathscr{L}$ из серии CS или $C\tilde{S}$;

б) композиция $did: \Sigma_{n-m-1} \xrightarrow{d} \Sigma_{n-m} \xrightarrow{i} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1$, если $\mathscr{L}$ из серии S или $\tilde{S}$, и композиция did: $\Sigma_{n-m-1} \otimes \mathrm{Vol}^\lambda \longrightarrow \Sigma_{n-m} \otimes \mathrm{Vol}^\lambda \longrightarrow \Omega \otimes \mathrm{Vol}^{\lambda+1} \longrightarrow \Omega^1 \otimes \mathrm{Vol}^{\lambda+1}$, если $\mathscr{L}$ из серии CS или $C\tilde{S}$, где изоморфизм $\Sigma_{n-m} \longrightarrow \Omega^0$ задается делением на сохраняющуюся форму объема;

в) кодифференциал δ: $\Omega^1 \longrightarrow \Omega^0$, если $\mathscr{L}=S(2, 0)$, и δ: $\Omega^1 \otimes \mathrm{Vol}^\lambda \longrightarrow \mathrm{Vol}^{\lambda+1}$, если $\mathscr{L}=CS(2, 0)$;

г) $\int: \Sigma_{-m} \longrightarrow \Omega^0$, *если $\mathscr{L}=S(0, m)$, $\tilde{S}(m)$ и $\int: \mathrm{Vol}^\lambda \longrightarrow \mathrm{Vol}^{\lambda-1}$ и если $\mathscr{L}=CS(0, m)$, $C\tilde{S}(m)$.*

Теорема 2. *Пусть V — неприводимый L_0-модуль. Тогда в каждом $\mathscr{L}$-модуле $T(V)$ есть неприводимый фактор-модуль $\mathrm{irr}\, T(V)$, где $\mathrm{irr}\, T(V)=T(V)$ для всех $T(V)$, кроме перечисленных ниже:*

$$\mathrm{irr}\, \Omega^r=\mathrm{Ker}\, d \cap \Omega^r; \ \mathrm{irr}\, \Sigma_{n-m-r}=\mathrm{Im}\, d \cap \Sigma_{n-m-r}, \ r \neq 0;$$

$$\mathrm{irr}\, \Phi^\lambda=\mathrm{Ker}\, d \cap \Phi^\lambda; \ \mathrm{irr}\, \mathrm{Vol}^\lambda=\langle \Delta^\lambda \rangle; \ \mathrm{irr}\, \Omega^0=\langle 1 \rangle;$$

$$\mathrm{irr} \Omega^r \otimes \mathrm{Vol}^\lambda=(\mathrm{Im} d \cap \Omega^r) \otimes \mathrm{Vol}^\lambda; \mathrm{irr} \Sigma_{n-m-r} \otimes \mathrm{Vol}^\lambda$$
$$=(\mathrm{Im}\, d \cap \Sigma_{n-m-r}) \otimes \mathrm{Vol}^\lambda, \ r \neq 0; \ \mathrm{irr}\, \Phi^\lambda \otimes \mathrm{Vol}^\mu$$
$$=(\mathrm{Im}\, d \cap \Phi^\lambda) \otimes \mathrm{Vol}^\mu.$$

Модули $\operatorname{irr} T(V)$ *и* $\Pi(\operatorname{irr} T(V))$ *попарно неэквивалентны и исчерпывают все неприводимые* $\mathscr{L}$*-модули в тензорных полях.*

Пусть $\{\varphi_i\}$ — веса L_0-модуля L_{-1}, $N=\Pi(1+\varepsilon e^{\varphi_i})$, $D=\sum\limits_{w\in W}\operatorname{sgn}\ w\,e^{w-\varrho}$, а $\mu=\pm\varepsilon$.

Теорема 3. *Если* $\mathscr{L}$ *— конечномерная супералгебра Ли серии* S, CS, $\tilde{S}$ или $C\tilde{S}$, *то характеры ее неприводимых представлений следующие* (напомним, что $\Sigma_{-r}=(\Omega^r)^*$):

$$\operatorname{ch} T(x, 0)=(N/D)\sum_{w\in W}\operatorname{sgn} w e^{w(x+\varrho)},$$

$$\operatorname{ch} d\Omega^{r-1}=(\mu/D)\sum_{w\in W}\operatorname{sgn} w\,.\,w[e^{1+\varrho}\prod_{\varphi_i\neq(1,\,0,\,\dots,\,0)}(1+\varepsilon e^{\varphi_i})],$$

$$\operatorname{ch}\ \operatorname{irr} T(1, 0, \dots, 0)=N-1-\varepsilon^n.$$

3. Доказательства. Идейная часть доказательства теорем 1, 2 такая же, как для супералгебр Ли серии W, см. [2]. Теорема 3 следует из точности последовательности 4 из теоремы 1 [2], которая нарушается относительно рассматриваемых нами супералгебр Ли только при $n=0$ в членах Σ_{-1}, Σ_0, Ω^0, Ω^1 из-за лишнего оператора did. Однако $\operatorname{ch}(\operatorname{irr} T(1, 0, \dots, 0)$ легко вычисляется, ибо $\operatorname{irr} T(1, 0, \dots, 0)=\Omega^0/\langle 1, \xi_1\dots\xi_n\rangle$.

Перейдем к технической части — описанию $T(V)^{\mathscr{L}_1}$.

Векторы, особые относительно $S(n, 0)$, описаны А. Н. Рудаковым [4]. Его описание дает, очевидно, и описание особых векторов относительно $CS(n, 0)$ — разница на произвольное значение веса на центре из L_0 не влияет на особость.

Как и в [2], индукция позволяет провести описание особых векторов только в ключевых случаях: $S(2, 0)$ (А. Н. Рудаков [4]), $S(1, 1)$ и $S(0, 3)$. Ниже проводится описание особых векторов f_i в этих оставшихся случаях.

Особые векторы для $S(1, 1)$. Пусть $l_x=\partial/\partial x$, $l_\xi=\partial/\partial\xi$, $E=x\frac{\partial}{\partial x}+\xi\frac{\partial}{\partial\xi}$, $X_+=x\frac{\partial}{\partial\xi}$, $X_-=\xi\frac{\partial}{\partial x}$, $S_1=x^2\frac{\partial}{\partial x}+2x\xi\frac{\partial}{\partial\xi}$, а $S_2=x^2\frac{\partial}{\partial\xi}$.

1. $\dim V\neq 1$, $f_1=l_xv_x+l_\xi v_\xi$ — особый старший вектор.

$$S_1(f_1)=-2Ev_x-2X_+v_\xi,$$

$$S_2(f_1)=-2X_+v_x,\ X_+(f_1)=l_\xi v_x+l_xX_+v_x-l_\xi X_+v_\xi:$$

а) $v_x\neq 0$, следовательно, $\chi(v_x)=1$, $\chi(f_1)=0$;
б) $v_\xi\neq 0$, следовательно, $\chi(v_\xi)=\lambda$, $\chi(f_1)=\lambda-1$;

2. $\dim V=1$, $f_1=al_xv+bl_\xi v$, где $|a|^2+|b|^2\neq 0$, — особый старший вектор

$$X_+f_1=-al_\xi v,\ S_1f_1=-2aEv,\ S_2f_1=0.$$

Следовательно, $a=0$, $\chi(v)=\lambda$, $\chi(f_1)=\lambda-1$.

Чтобы разобраться в этих отметках, нам потребуется описание неприводимых $sl(1, 1)$-модулей, а для случая $CS(1, 1)$ — описание $\mathfrak{gl}(1, 1)$-модулей. Пусть $X_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $X_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Пусть V есть $\mathfrak{G}$-модуль, где $\mathfrak{G}=\mathfrak{gl}(1, 1)$ или $sl(1, 1)$, а $v\in V$ — ненулевой собственный относительно E и H вектор. Назовем v старшим, если $X_+v=0$, вес вектора v назовем старшим весом, весовые отметки будут даны относительно E и H. Рассматривая $sl(1, 1)$, нужно H выкинуть.

Пусть $L(\chi)$ — неприводимый $\mathfrak{G}$-модуль со старшим весом χ и четным старшим вектором.

Теорема. *В каждом $\mathfrak{gl}(1, 1)$-модуле V есть старший вектор. Если V неприводим, то старший вектор один с точностью до пропорциональности.*

$$\dim L(\chi) = \dim \Pi(L(\chi)) = (1, 1), \text{ если } \chi \neq (0, \lambda).$$

Модули $L(\chi)$ и $\Pi(L(\chi))$ попарно неэквивалентны и исчерпывают все (E, H) — диагонализуемые неприводимые $\mathfrak{gl}(1, 1)$-модули.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующих утверждений для алгебры Ли $sl(2)$, см. [6].

Из I-мерности пространства V следует, что $\lambda = 0$.

3) $f_2 = l_x^2 v_x + l_x l_\xi v_\xi$ — старший особый вектор.

Условия $X_+ f_2 = S_1 f_2 = S_2 f_2 = 0$ эквивалентны системе, отсюда

$$\chi(v) = (a, a, a), \ \chi(f_2) = (a-2, a-2, a-2).$$

Супералгебры Ли серии $\tilde{S}$ и $C\tilde{S}$ фильтровальные, поэтому существование особых векторов для S и CS еще не гарантирует наличие инвариантных операторов. Однако мы предъявили инвариантных операторов ровно столько, сколько насчитали особых векторов, а их не может быть больше.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Рудаков. Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли катрановского типа. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **38**, 1974, 835-866.
2. И. Н. Бернштейн, Д. А. Лейтес. Инвариантные дифференциальные операторы и неприводимые представления супералгебры Ли векторных полей. *Сердика*, **7**, 1981 320-324.
3. V. G. Kac. Lie superalgebras. *Adv. Math.*, **26**, 1977, 8-96.
4. А. Н. Рудаков. Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли серий S и H. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **39**, 1975, 496-511.
5. Д. А. Лейтес. Формулы для характеров неприводимых конечномерных представлений супералгебр Ли. *Функц. анализ*, **14**, 1980, № 2, 35-38.
6. Ж. Диксмье. Универсальные обертывающие алгебры. Москва, 1978.
7. Д. В. Алексеевский, Д. А. Лейтес, И. М. Щепочкина. Примеры простых бесконечномерных супералгебр Ли векторных полей. *Доклады БАН*, **33**, 1980, 1187-1190.

Карельский филиал АН СССР
Петрозаводск СССР

Поступила 11. 2. 1980