

Provided for non-commercial research and educational use. Not for reproduction, distribution or commercial use.
--

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

SOLUTIONS HOLDERIENNES D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES A CONTRAINTES DISCONTINUES, I

IORDAN V. IORDANOV

On considère des inéquations variationnelles elliptiques avec obstacles appartenantes par morceaux à l'espace de Sobolev $H^{1,p}$, $p > n$. On montre que les solutions sont des fonctions höldériennes.

Introduction. Soit $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$ un domaine borné; $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ où $\partial\Omega$ est la frontière de Ω . Notons par $H^{k,p}(\Omega)$, $(H_0^{k,p}(\Omega))$, $k=1, 2, \dots$, $1 < p < +\infty$, les espaces de Sobolev (on omettra l'indice p lorsque $p=2$) et par $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$, $k=0, 1, 2, \dots$, $0 < \lambda \leq 1$, les espaces des fonctions k fois différentiables dans Ω , les dérivées d'ordre k desquelles sont höldériennes d'exposant λ . Notons par $O(x_0, \rho)$ la sphère $\{x \in R^n \mid |x - x_0| < \rho\}$.

Soit

$$(0.1) \quad Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}$$

un opérateur elliptique à coefficients a_{ij} réels, mesurables et bornés dans Ω et tels que

$$(0.2) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq v |\xi|^2, \quad v = \text{const} > 0, \quad \forall \xi \in R^n, \text{ p. p. } \Omega.$$

La forme bilinéaire

$$(0.3) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx, \quad u, v \in H^1(\Omega),$$

associée à l'opérateur (0.1) est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ parce que

$$(0.4) \quad a(u, u) \geq v \| |\text{grad } u| \|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

en vue de la condition d'ellipticité (0.2).

Soient E et F deux sous-ensembles fermés de $\bar{\Omega}$. (Il est possible que les ensembles E et F ne soient pas connexes.) Fixons les fonctions $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$ et définissons les sous-ensembles fermés et convexes de l'espace $H_0^1(\Omega)$:

$$(0.5) \quad K(E, \varphi) = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \varphi \text{ sur } E\},$$

$$(0.6) \quad K(E, \varphi; F, \psi) = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \varphi \text{ sur } E, v \leq \psi \text{ sur } F\}.$$

A condition que les fonctions φ et ψ (on les appelle contraintes) satisfassent l'inégalité

$$(0.7) \quad \varphi \leq \psi \text{ sur } E \cap F,$$

es ensembles définis ci-dessus ne sont pas vides. On comprend toutes les inégalités entre deux éléments arbitraires des espaces de Sobolev au sens suivant (cf. [4]):

Définition 0.1. Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$ et soit $G \subset \bar{\Omega}$ un ensemble mesurable. On dit que $u \geq v$ sur G au sens de $H_0^1(\Omega)$ s'il existe des suites $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ de fonctions lisses dans $\bar{\Omega}$ convergentes dans $H_0^1(\Omega)$ vers u et v respectivement, lesquelles satisfont $u_n \geq v_n$ sur G . On dit que $u = v$ sur G au sens de $H_0^1(\Omega)$ si simultanément $u \geq v$ et $v \geq u$ sur G au sens de $H_0^1(\Omega)$. On dit que $u > v$ en $x_0 \in G$ au sens de $H_0^1(\Omega)$ s'il existe un nombre $\rho > 0$ et une fonction $\alpha \in C_0^1(O(x_0, 2\rho))$ tels que la sphère $O(x_0, 2\rho) \subset \Omega$, $\alpha > 0$ dans $O(x_0, \rho)$ et $u - \alpha \geq v$ sur $O(x_0, 2\rho)$ au sens de $H_0^1(\Omega)$.

Notons que les ensembles (0.5), (0.6) ne dépendent que des valeurs des fonctions φ et ψ resp. sur E et F , i. e. si on prend $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in H_0^1(\Omega)$ telles que $\varphi = \bar{\varphi}$ sur E et $\psi = \bar{\psi}$ sur F , alors on a $K(E, \varphi) = K(E, \bar{\varphi})$ et $K(E, \varphi; F, \psi) = K(E, \bar{\varphi}; F, \bar{\psi})$.

On considère le problème suivant:

Soit $K \subset H_0^1(\Omega)$ un sous-ensemble fermé, convexe et non vide. Il faut trouver un élément $u \in K$ tel que

$$(0.8) \quad a(u, v - u) \geq g(v - u), \quad \forall v \in K,$$

où g est une fonctionnelle linéaire et continue, définie sur $H_0^1(\Omega)$.

Remarque 0.2. Pour simplicité on ne considère à partir d'ici que des inéquations homogènes, c.-à-d. on supposera que $g \equiv 0$ parce que on peut réduire le cas général au cas susdit d'une manière qui n'exerce aucune influence sur les résultats obtenus (cf. remarque 1.7). Si l'élément $u_g \in H_0^1(\Omega)$ est tel que $a(u_g, v) = g(v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, alors l'inéquation homogène

$$(0.9) \quad \begin{cases} U \in K - u_g, \\ a(U, V - U) \geq 0, \quad \forall V \in K - u_g, \end{cases}$$

est équivalente à (0.8).

Remarque 0.3. Il est clair qu'on peut remplacer la condition $v|_{\partial\Omega} = 0$, acceptée dans (0.5), (0.6) pour plus de commodité, par une condition plus générale (par exemple de type $v|_{\partial\Omega} = p$ où p est la trace sur $\partial\Omega$ d'un élément de $H^1(\Omega)$ ou de type mixte (cf. [6]).

On dit que les contraintes sont locales (globales) si $E \neq \bar{\Omega}$ ou $F \neq \bar{\Omega}$ (resp. $E = F = \bar{\Omega}$). Pour le problème à une contrainte globale on établit que si la contrainte $\varphi \in H^{1,p}$, $p > n$, alors la solution est une fonction höldérienne [6]. En effet la régularité naturelle en ce cas est d'un degré plus haut au sens que si la contrainte appartient à $H^{2,p}(\Omega) \subset C^{1,\alpha}(\Omega)$, $p > n$, alors la solution est de même classe [4]. Ce résultat reste valable aussi pour le problème à deux contraintes globales [10] tandis qu'en cas de deux contraintes locales on ne

montre des théorèmes pareils que sous des hypothèses supplémentaires [3]. Dans l'article [11] on considère le problème à une contrainte locale lipschitzienne et on montre qu'il existe une solution lipschitzienne. (Mais il est facile de construire un exemple [3] où la contrainte est de la classe C^∞ et la solution est au plus lipschitzienne.)

Ici on établit que dans le cas des contraintes globales ou locales de l'espace $H^{1,p}$, $p > n$, (même appartenantes à cette classe par morceaux — cf. 1) les solutions sont höldériennes. On utilise la technique de De Giorgi [2] ou plus précisément sa modification pour des problèmes aux limites due à Stampacchia [7].

1. Problèmes à contraintes discontinues. On considère simultanément les cas des contraintes locales ou globales. On suppose que les ensembles E et F soient des unions de sous-ensembles fermés de $\bar{\Omega}$;

$$(1.1) \quad E = \bigcup_{l=1}^e E_l, \quad F = \bigcup_{m=1}^f F_m,$$

pour les intérieurs desquelles on ait: $\text{Int } E_i \cap \text{Int } E_j = \emptyset$, $\text{Int } F_i \cap \text{Int } F_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$. (Autrement dit chaque composante de E et F consiste d'un nombre fini de sous-ensembles fermés de $\bar{\Omega}$ d'intérieurs disjoints.) On fixe les fonctions $\varphi_l \in H_0^1(\Omega)$, $l = 1, \dots, e$, et $\psi_m \in H_0^1(\Omega)$, $m = 1, \dots, f$. L'ensemble

$$(1.2) \quad K(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e; F, \psi_1, \dots, \psi_f) \subset H_0^1(\Omega)$$

de tous les éléments $v \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$(1.3) \quad \begin{aligned} v &\geq \varphi_l \quad \text{sur } E_l, \quad l = 1, \dots, e, \\ v &\leq \psi_m \quad \text{sur } F_m, \quad m = 1, \dots, f, \end{aligned}$$

est fermé, convexe et n'est pas vide si

$$(1.4) \quad \varphi_l \leq \psi_m \quad \text{sur } E_l \cap F_m,$$

où $l = 1, \dots, e$, $m = 1, \dots, f$.

On définit aussi l'ensemble fermé et convexe

$$(1.5) \quad K(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e) \subset H_0^1(\Omega)$$

de tous $v \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$(1.6) \quad v \geq \varphi_l \quad \text{sur } E_l, \quad l = 1, \dots, e.$$

En vertu du théorème d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques [8] il existe une solution unique du problème

$$(1.7) \quad u \in K; \quad a(u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K,$$

où l'ensemble K est défini par (1.5) ou (1.2). Notons ces solutions resp. par $u(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e)$ et $u(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e; F, \psi_1, \dots, \psi_f)$.

Lemme 1.1. Soit $u = u(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e)$. Alors $Lu \geq 0$ sur Ω , i. e. $a(u, v) \geq 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$.

Lemme 1.2. Soit $u = u(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e; F, \psi_1, \dots, \psi_f)$. Si pour l'ensemble ouvert $O \subset \Omega$ on a

$u < \psi_m$ sur $O \cap F_m$ pour tout m tel que $F_m \cap O \neq \emptyset$
 (resp.: $u > \varphi_l$ sur $O \cap E_l$ pour tout l tel que $E_l \cap O \neq \emptyset$)
 alors $Lu \geq 0$ sur O au sens que

$$a(u, v) \geq 0, \quad \forall v \in H_0^1(O), \quad v \geq 0,$$

(resp.: $Lu \leq 0$ sur O au sens que $a(u, v) \leq 0, \forall v \in H_0^1(O), v \geq 0$).

En outre, sur le sous-ensemble de $E \cup F$ où la fonction u ne coïncide pas avec les contraintes et aussi dans $\Omega \setminus (E \cup F)$ on a $Lu = 0$.

La démonstration est triviale (cf. [4] pour le cas d'une contrainte locale).

On établit facilement aussi le résultat auxiliaire suivant:

L e m m e 1.3.

$$0 \leq u(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e) \leq \max(0; \max_{1 \leq l \leq e} (\text{vrai max}_{E_l} \varphi_l));$$

$$\min(0; \min_{1 \leq m \leq f} (\text{vrai min}_{F_m} \psi_m)) \leq u(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e; F, \psi_1, \dots, \psi_f)$$

$$\leq \max(0; \max_{1 \leq l \leq e} (\text{vrai max}_{E_l} \varphi_l)).$$

Pour énoncer les résultats principaux (théorèmes 1.5 et 1.6) on a besoin de la notion suivante:

Définition 1.4. On dit que la frontière ∂A du domaine $A \subset R^n$ est strictement lipschitzienne s'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et des ensembles ouverts $U_i \subset R^n, i = 1, \dots, N$, tels que:

- 1) si $x \in \partial A$ alors $O(x, \varepsilon) \subset U_i$ pour quelque indice i ;
- 2) pour tout $i = 1, \dots, N$ le domaine $U_i \cap A$ coïncide avec $U_i \cap D_i$ où D_i est le domaine

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid x_j > \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\}$$

pour un $j = j(i)$ convenable et la fonction $\varphi_j: R^{n-1} \rightarrow R^1$ est lipschitzienne.

Théorème 1.5. Supposons que $\varphi_l \in H_0^{1,p}(\Omega), p > n, l = 1, \dots, e$, les frontières $\partial(\Omega \setminus E_l)$ soient strictement lipschitziennes et les coefficients $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), i, j = 1, \dots, n$. Alors la solution $u = u(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e)$ appartient à l'espace $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \alpha \in (0, 1 - n/p]$.

Théorème 1.6. Soient $\varphi_l, l = 1, \dots, e, \psi_m, m = 1, \dots, f$, des fonctions de l'espace $H^{1,p}(\Omega), p > n$ telles que

$$(1.8) \quad \varphi_l < \psi_m \text{ sur } \partial(E_l \cap F_m), \varphi_l|_{E_l \cap \partial\Omega} < 0, \psi_m|_{F_m \cap \partial\Omega} > 0$$

pour tous $l = 1, \dots, e$ et $m = 1, \dots, f$. Supposons encore que les frontières $\partial(\Omega \setminus E_l), l = 1, \dots, e$, et $\partial(\Omega \setminus F_m), m = 1, \dots, f$, soient strictement lipschitziennes et que les coefficients $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), i, j = 1, \dots, n$. Alors la solution $u = u(E; \varphi_1, \dots, \varphi_e; F, \psi_1, \dots, \psi_f)$ appartient à l'espace $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ où $\alpha \in (0, 1 - n/p]$.

Remarque 1.7. Si la fonctionnelle g dans l'inéquation non-homogène (0.8) appartient à $H^{-1,q}(\Omega) = (H_0^{1,p}(\Omega))', p > n, 1/q + 1/p = 1$, alors $u_g \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Maintenant il en résulte au moyen des théorèmes 1.5 et 1.6 que la solution U du problème homogène (0.9) est une fonction höldérienne d'où le même pour la solution u de (0.8), puisque $U + u_g = u$.

2. Solutions hôldériennes des inéquations variationnelles à contraintes continues de la classe $H_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$. Notons $\Omega(I, \rho) = O(y, \rho) \cap \Omega$, $\bar{\Omega}(y, \rho) = O(y, \rho) \cap \bar{\Omega}$. En fixant un nombre $\beta > 0$ et un ensemble $A \subset R^n$ ouvert et borné on note par $\mathcal{F}(\beta, A)$ la famille des ensembles $B \subset \bar{A}$ tels que si $u \in C^1(\bar{A})$ et $u|_B = 0$ on ait $\|u\|_{L_{q^*}(A)} \leq \beta \|\text{grad } u\|_{L_q(A)}$, $1/q^* = 1/q = 1/n$, pour tout $q \in (0, n]$.

Hypothèse (A) [7; § 12]. *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $y \in \partial\Omega$ il existe un nombre $\rho(y) > 0$ afin que pour tout $\rho \in (0, \rho(y))$ on ait $\partial\Omega \cap O(y, \rho) \subset \mathcal{F}(\beta, \Omega(y, \rho))$.*

Remarque 2.1. Suivant la terminologie introduite par Stampacchia [7] on dit qu'un tel domaine Ω est admissible par rapport à $H_0^1(\Omega)$. Les domaines avec des frontières lipschitziennes et même de contours plus compliqués [7] sont admissibles.

Tout d'abord on rappelle un résultat connu pour le problème (1.7) dans le cas d'une contrainte globale et continue.

Théorème 2.2 [6]. *On suppose que l'ensemble K de (1.7) coïncide avec $K(\bar{\Omega}, \varphi)$ défini par (0.5) où $\varphi \in H_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$. A condition que pour le domaine Ω soit vérifiée l'hypothèse (A) la solution $u = u(\bar{\Omega}, \varphi) \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda \in (0, 1 - n/p]$.*

On va considérer le problème (1.7) dans le cas de deux contraintes continues, i. e. $K = K(\bar{\Omega}, \varphi; \bar{\Omega}, \psi)$ (cf. (0.6)), où $\varphi, \psi \in H_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, et bien sûr sont telles que

$$(2.1) \quad \varphi \leq \psi \text{ sur } \bar{\Omega}.$$

Théorème 2.3. *A condition que l'hypothèse (A) soit vérifiée pour le domaine Ω , on a $u = u(\bar{\Omega}, \varphi; \bar{\Omega}, \psi) \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda \in (0, 1 - n/p]$.*

Comme la démonstration s'appuie sur une technique bien connue on ne donne que les points essentiels.

Pour $y \in \bar{\Omega}$ définissons le nombre $\rho(y)$ de façon que $O(y, \rho(y)) \subset \Omega$. Sans restreindre la généralité on peut supposer que $\rho(y) \leq 1$ pour tout $y \in \bar{\Omega}$.

Soit $y \in \bar{\Omega}$ et en fixant les nombres r, R ($0 < r < R < \rho(y)$) prenons une fonction $\zeta \in C_0^1(O(y, \rho(y)))$ telle que

$$(2.2) \quad \begin{cases} 0 \leq \zeta(x) \leq 1, & |\text{grad } \zeta(x)| \leq \text{const } (R-r)^{-1}, \\ \zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in O(y, r), \\ 0 & \text{pour } x \in R^n \setminus O(y, R). \end{cases} \end{cases}$$

Introduisons les fonctions

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Phi^a = \alpha\varphi + (1-\alpha)\psi, & \alpha \in [0, 1], \\ v = u - \zeta^2 \max(u - \Phi^a - k, 0), & k \geq 0, \\ w = u - \zeta^2 \min(u - \Phi^a - k, 0), & k \leq 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $v, w \in K$. Pour $f \in H^1(\Omega)$, $y \in \bar{\Omega}$ et $k \in R^1$ designons

$$A(k, \rho) = \{x \mid x \in \bar{\Omega}(y, \rho), f(x) > k\}, B(k, \rho) = \{x \mid x \in \bar{\Omega}(y, \rho), f(x) < k\}.$$

(En réalité plus loin $f = u - \Phi^a$.) Posons v de (2.3) dans (1.7). En vertu des propriétés (0.4) et (2.2) on voit que

$$(2.4) \quad \int_{A(k,r)} |\operatorname{grad}(u - \Phi^\alpha - k)|^2 dx \leq S \left\{ \frac{1}{(R-r)^2} \int_{A(k,R)} |u - \Phi^\alpha - k|^2 dx + \int_{A(k,R)} (|\operatorname{grad} \varphi|^2 + |\operatorname{grad} \psi|^2) dx \right\},$$

pour tous $k \geq 0$, $\alpha \in [0, 1]$ et r, R ($0 < r < R < \rho(y)$). Ici la constante S ne dépend pas de r, R, α et k . (Elle ne dépend que de v et $\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$.)

En prenant la fonction w de (2.3) au lieu de v on établit

$$(2.5) \quad \int_{B(k,r)} |\operatorname{grad}(u - \Phi^\alpha - k)|^2 dx \leq S \left\{ \frac{1}{(R-r)^2} \int_{B(k,R)} |u - \Phi^\alpha - k|^2 dx + \int_{B(k,R)} (|\operatorname{grad} \varphi|^2 + |\operatorname{grad} \psi|^2) dx \right\},$$

pour tous $k \leq 0$, $\alpha \in [0, 1]$ et r, R ($0 < r < R < \rho(y)$).

Les inégalités obtenues ci-dessus sont analogues aux résultats du théorème 7.1 de [7]. À l'aide de (2.4), (2.5) et en suivant les démonstrations des théorèmes 8.1 et 8.2 de [7] on montre :

Lemme 2.4. *Il existe un nombre $\theta > 0$ tel que pour tous $y \in \bar{\Omega}$, $\rho \in (0, \rho(y))$ et $k > 0$ satisfaisants*

$$\operatorname{mes} A(k, \rho) \leq \theta \operatorname{mes} \Omega(y, \rho),$$

on a $\operatorname{mes} A(k + d/2, \rho/2) = 0$, où

$$d^2 \geq \frac{1}{\theta \rho^n} \int_{A(k,\rho)} |u - \Phi^\alpha - k|^2 dx + \rho^{2(1-n/p)} \left\{ \int_{A(k,\rho)} (|\operatorname{grad} \varphi|^p + |\operatorname{grad} \psi|^p) dx \right\}^{2/p};$$

et d'autre part sous les mêmes hypothèses pour tout $k < 0$ tel que

$$\operatorname{mes} B(k, \rho) \leq \theta \operatorname{mes} \Omega(y, \rho)$$

on a $\operatorname{mes} B(k - d/2, \rho/2) = 0$, où

$$d^2 \geq \frac{1}{\theta \rho^n} \int_{B(k,\rho)} |u - \Phi^\alpha - k|^2 dx + \rho^{2(1-n/p)} \left\{ \int_{B(k,\rho)} (|\operatorname{grad} \varphi|^p + |\operatorname{grad} \psi|^p) dx \right\}^{2/p}.$$

Le nombre θ dépend de $\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$, v , p , n et β , mais non de ρ, y et α .

En tenant compte des résultats établis on va montrer le théorème 2.3 ou précisément un lemme duquel en vertu de [7, pp. 20–22] l'assertion suit immédiatement.

Lemme 2.5. *Fixons de façon arbitraire le point $y \in \bar{\Omega}$ et le nombre $r \in (0, \rho(y)/4)$. Il existe des nombres η ($\eta < 1$) et H qui ne dépendent pas de r et y et tels que*

$$(2.6) \quad \operatorname{osc}(u, r) \leq \eta \operatorname{osc}(u, 4r) + Hr^{1-n/p},$$

où

$$\operatorname{osc}(v, \rho) = \max_{\bar{\Omega}(y, \rho)} v - \min_{\bar{\Omega}(y, \rho)} v.$$

Démonstration. Notons $u_a = u - \Phi^a$,

$$M_a(4r) = \text{vrai max}_{\bar{\Omega}(y, 4r)} u_a, \quad m_a(4r) = \text{vrai min}_{\bar{\Omega}(y, 4r)} u_a.$$

(Il est évident que les deux nombres derniers sont finis.) La fonction $\alpha \rightarrow M_a(4r) + m_a(4r)$ est continue et croissante. En exceptant les cas triviaux lorsque la solution u coïncide sur $\bar{\Omega}(y, 4r)$ par ϕ , ψ ou Φ^a et par conséquent satisfait une estimation du type

$$(2.7) \quad \text{osc}(u, r) \leq \text{const} \cdot r^{1-n/p},$$

on peut choisir un nombre $\alpha \in (0, 1)$ tel que $M_a(4r) = -m_a(4r) > 0$. Il en résulte que pour $\eta \in (0, 1/2)$ les nombres $k = M_a - \eta(M_a - m_a) \geq 0$ sont admissibles pour la définition des fonctions v de (2.3). (Respectivement les nombres $k = m_a + \eta(M_a - m_a) \leq 0$ sont admissibles pour la définition des fonctions w de (2.3).) Maintenant en suivant les raisonnements des démonstrations des théorèmes 8.4 et 8.5 de [7], on démontre :

$$(2.8) \quad \text{osc}(u_a, r) \leq \eta \text{osc}(u_a, 4r) + H_1 r^{1-n/p},$$

où les constantes $\eta < 1$ et H_1 ne dépendent pas de r, y et α . D'ici et en tenant compte de (2.7) on achève la démonstration du lemme 2.5.

Remarque 2.6. L'exposant λ dans le théorème 2.3 est égale à $\min(\beta, 1 - n/p)$ où le nombre β est tel que $4^\beta \eta < 1$.

On commence à étudier le problème (1.7) dans les cas de contraintes locales et continues. Tout d'abord soit $E \subset \bar{\Omega}$ un ensemble fermé pour lequel le contour $\partial(\Omega \setminus E)$ est strictement lipschitzien (définition 1.4).

Théorème 2.7. *Sous cette hypothèse et si $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, n$, et $\phi \in H_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, alors la solution $u = u(E, \phi)$ du problème (1.7) avec $K = K(E, \phi)$ (cf. (0.5)) appartient à l'espace $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, $\lambda \in (0, 1 - n/p]$.*

Lemme 2.8. *Sous les hypothèses du théorème 2.7 il existe une fonction $\Phi \in H_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $\Phi \leq u(E, \phi)$ sur $\bar{\Omega}$ et $\phi \leq \Phi$ sur E .*

Démonstration. Soit $w \in H_0^1(\Omega \setminus E)$ la solution du problème aux limites

$$Lw = -L\phi \text{ dans } \Omega \setminus E, \quad w = 0 \text{ sur } \partial(\Omega \setminus E),$$

c.-à-d. w est un élément de l'espace $H_0^1(\Omega \setminus E)$ satisfaisant à la condition

$$(2.9) \quad a(w, \alpha) = -a(\phi, \alpha), \quad \forall \alpha \in H_0^1(\Omega \setminus E).$$

Il est facile de voir que $w \in H^{1,p}(\Omega \setminus E)$. Pour l'intérieur du domaine $\Omega \setminus E$ c'est une conséquence de l'estimation

$$(2.10) \quad |a(w, \alpha)| \leq \text{const} \|\alpha\|_{H^{1,q}(O)}, \quad \forall \alpha \in H_0^{1,q}(O),$$

où $O \subset \Omega \setminus E$ est une sphère et $1/q + 1/p = 1$ (cf. [1, corollaire 5.1]). Au moyen d'une transformation lipschitzienne on réduit localement le problème (2.9) à un problème aux limites dans une demi-sphère. Il est évident que les images des fonctions w et α appartiennent aussi à $H^1, H^{1,q}$ [5, théorème 3.1.7] et satisfont une condition pareille à (2.9). Maintenant à l'aide d'une estimation

de type (2.10) on obtient $w \in H^{1,p}(\Omega \setminus E)$ [1, corollaire 5.2 et théorème 6.2] il est facile de vérifier que la fonction

$$\Phi = \begin{cases} w + \varphi & \text{dans } \Omega \setminus E \\ \varphi & \text{dans } E \end{cases}$$

appartient à $H_0^{1,p}(\Omega)$ et satisfait à la condition $L\Phi = 0$ dans $\Omega \setminus E$. On achève la démonstration en tenant compte pour le lemme 1.1 et en utilisant le principe du maximum.

Démonstration du théorème 2.7. D'après le théorème 2.2 la solution $u_1 = u(\bar{\Omega}, \Phi)$ du problème (1.7) avec une contrainte globale est une fonction höldérienne. Mais (lemme 2.8) $u = u(E, \varphi) \in K(\bar{\Omega}, \Phi) \subset K(E, \varphi)$ et par conséquent $a(u, u_1 - u) \geq 0$ et $a(u_1, u - u_1) \geq 0$, d'où à cause de la coercivité de la forme $a(u, v)$ on trouve $u = u_1$.

Remarque 2.9. En général on pourrait supposer que $\varphi \in H^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi \leq 0$ sur $\partial\Omega$. Si $E \subset \text{Int } \Omega$ on construit facilement une fonction $\bar{\varphi} \in H_0^{1,p}(\Omega)$ coïncidante avec φ sur E . Si $E \subset \bar{\Omega}$ alors la fonction

$$\varphi_1 = \begin{cases} \max(\varphi, 0) & \text{sur } E, \\ 0 & \text{dans le complément de } \Omega, \end{cases}$$

appartient à la classe $H^{1,p}$ et on peut la prolonger sur Ω [12, ch. 6] en obtenant une fonction $\bar{\varphi} \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Puisque on a évidemment $u \geq \bar{\varphi} \geq \varphi$ sur E on peut utiliser cette fonction dans le lemme 2.7 au lieu de φ . Il en sera de même pour tous les autres problèmes considérés dans l'article.

Enfin, soient E et F deux sous-ensembles fermés de $\bar{\Omega}$ tels que les frontières $\partial(\Omega \setminus E)$, $\partial(\Omega \setminus F)$ sont lipschitziennes et le même pour $\partial(E \cup F)$ si $E \cup F \subset \Omega$ ou pour $\partial(\Omega \setminus E \setminus F)$ si $(E \cup F) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

Théorème 2.10. *En outre des hypothèses pour E et F , on suppose que $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, n$, et que les contraintes $\varphi, \psi \in H^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, satisfont à la condition supplémentaire :*

$$(2.11) \quad \varphi < \psi \quad \text{sur } \partial(E \cap F), \quad \varphi|_{E \cap \partial\Omega} < 0, \quad \psi|_{F \cap \partial\Omega} > 0.$$

Alors la solution u du problème (1.7) avec $K = K(E, \varphi; F, \psi)$ (cf. (0.6)) appartient à l'espace $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ où $\lambda \in (0, 1 - n/p]$.

La démonstration est analogue à celle du théorème 2.7. Le point essentiel consiste dans l'assertion suivante :

Lemme 2.11. *Sous les hypothèses du théorème 2.10 il existe deux fonctions $\Phi, \Psi \in H^{1,p}(\Omega)$ telles que*

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \Phi &\leq u(E, \varphi; F, \psi) \leq \Psi \quad \text{sur } \bar{\Omega}, \\ \varphi &= \Phi \quad \text{sur } E, \quad \psi \geq \Psi \quad \text{sur } F. \end{aligned}$$

Démonstration. On traite les cas particuliers lorsque $E \cup F \subset \Omega$, $E \cap F \neq \emptyset$ ou bien $E = F \subset \bar{\Omega}$ facilement, grâce au lemme 1.3. Considérons le cas général des contraintes „d'intersection non vide“, i. e. $E \cap F \neq \emptyset$. Ici la difficulté principale consiste dans l'impossibilité de contrôler le signe de Lu en un voisinage de l'ensemble E (resp. F) parce qu'il est possible que sur $F \setminus E$ (resp. $E \setminus F$) la solution u coïncide avec la contrainte.

Tout d'abord on change la fonction ψ par $\bar{\psi} \in H^{1,p}(\Omega)$ qui est un prolongement sur $\bar{\Omega}$ de la fonction

$$\psi_1 = \begin{cases} \psi & \text{sur } F \\ \max(\varphi, \psi) & \text{sur } E \setminus F. \end{cases}$$

Puis on change aussi la contrainte φ par la fonction $\bar{\varphi} \in H^{1,p}(\Omega)$ pour laquelle $\bar{\varphi} = \varphi$ sur E et $\bar{\varphi} \leq \bar{\psi}$ sur $\bar{\Omega}$.

Soit $w \in H_0^{1,p}(\Omega \setminus E)$ une fonction telle que $w < 0$ dans $\Omega \setminus E$ et $w = 0$ sur $\partial(\Omega \setminus E)$. Notons $s = \bar{\varphi} + w$. Sur l'ensemble $I \subset F \cap (\bar{\Omega} \setminus \bar{E})$ de coïncidence de la contrainte $\bar{\psi}$ et la solution u on a $u > s$ et par conséquent la même inégalité est valable sur un voisinage O de I . Fixons le domaine G tel que $I \subset G \subset \bar{G} \subset O \cap \bar{\Omega} \setminus \bar{E}$ et la frontière $\partial(\Omega \setminus E \setminus G)$ soit lipschitzienne. Notons par $v_1 \in H^{1,p}(\Omega \setminus E \setminus G)$ la solution du problème aux limites

$$Lv_1 = 0 \text{ dans } \Omega \setminus E \setminus G, \quad v_1 = s \text{ sur } \partial(\Omega \setminus E \setminus G).$$

Puisque sur $\Omega \setminus E \setminus G$ on a $Lu = 0$ (lemme 1.2) à l'aide du principe du maximum on trouve $v_1 \leq u$ sur $\Omega \setminus E \setminus G$. Ainsi, en définissant la fonction

$$\Phi = \begin{cases} \varphi & \text{dans } E \\ s & \text{dans } G \\ v_1 & \text{dans } \Omega \setminus E \setminus G \end{cases}$$

on obtient la première inégalité dans (2.12). D'une manière pareille on trouve aussi un majorant global Ψ de la solution u satisfaisant la deuxième inégalité dans (2.12).

Remarque 2.12. En effet la condition que la frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne dans le cas lorsque $E \cup F \subset \Omega$ est superflue. Il suffit qu'en ce cas pour $\partial\Omega$ soit vérifiée l'hypothèse (A). Lorsque $(E \cup F) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ il suffit de supposer qu'il existe un domaine Ω_1 , $E \cup F \subset \Omega_1$, tel que les frontières $\partial((\Omega_1 \cap \Omega) \setminus E)$, $\partial((\Omega_1 \cap \Omega) \setminus F)$ et $\partial((\Omega_1 \cap \Omega) \setminus (E \cup F))$ soient lipschitziennes et bien sûr que $\partial\Omega$ satisfasse à l'hypothèse (A).

3. Démonstrations des théorèmes 1.5 et 1.6. Comme dans le paragraphe 2 on réduit les problèmes considérés aux cas des contraintes globales et continues.

Démonstration du théorème 1.5. Soient Φ_l , $l = 1, \dots, e$, des fonctions de $H_0^{1,p}(\Omega)$ coïncidantes avec φ_l sur E_l et satisfaisantes $L\Phi_l = 0$ dans $\Omega \setminus E_l$ (cf. lemme 2.8). Puisque $u \geq \Phi_l$ sur E_l et $Lu \geq 0$ dans Ω (lemme 1.1) le principe du maximum nous donne $u \geq \Phi_l$ dans Ω . La fonction

$$\Phi = \max_{1 \leq l \leq e} \Phi_l \in H_0^{1,p}(\Omega)$$

est un minorant de la solution u et appartient à l'ensemble $K(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e)$. On achève la démonstration du théorème 1.5 comme celle du théorème 2.7.

Démonstration du théorème 1.6. Soient Φ_{lm} et Ψ_{lm} , $l = 1, \dots, e$, $m = 1, \dots, f$ des fonctions de $H^{1,p}(\Omega)$ telles que

$$\begin{aligned} \Phi_{lm} &= \varphi_l \text{ sur } E_l, \quad \Psi_{lm} = \psi_m \text{ sur } F_m, \\ \Phi_{lm} &\leq u_{lm} \leq \Psi_{lm} \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

où u_{lm} est la solution du problème (1.7) pour $K=K(E_l, \varphi_l; F_m, \psi_m)$ (cf. (0.6)). L'existence des fonctions Φ_{lm} et Ψ_{lm} suit du lemme 2.11. Soient v_m et w_l les solutions du problème (1.7) avec resp.

$$K=K(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e; F_m, \psi_m) \text{ et } K=K(E_l, \varphi_l; F, \psi_1, \dots, \psi_f).$$

Tout d'abord on montre les inégalités

$$(3.1) \quad w_l \leq u \leq v_m \text{ dans } \Omega,$$

$$(3.2) \quad w_l \leq u_{lm} \leq v_m \text{ dans } \Omega,$$

pour toutes les valeurs admissibles des indices l et m .

La fonction $v = \min(u, w_l) \in K(E_l, \varphi_l; F, \psi_1, \dots, \psi_f)$ et par conséquent, tenant compte pour (1.7), on trouve

$$(3.3) \quad a(w_l, v - w_l) \geq 0.$$

D'autre part

$$(3.4) \quad a(v, v - w_l) = \int_{\Omega_1} \dots + \int_{\Omega_2} a_{ij} u_{x_i} (u - w_l)_{x_j} dx \leq 0,$$

où $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid u \geq w_l\}$ et $\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid w_l > u\}$. La première intégrale (où $v = w_l$) s'annule ([4, appendice]), tandis que la deuxième est non-positive parce que $u - w_l \in H_0^1(\Omega_2)$, $u - w_l \leq 0$ sur $\bar{\Omega}_2$ et en outre $Lu \geq 0$ sur Ω_2 (lemme 1.2). Après l'addition de (3.3) et (3.4) on obtient $a(w_l - v, v - w_l) \geq 0$, d'où en vue de la coercivité (0.4) suit $v = w_l$. Ainsi la démonstration de la première inégalité de (3.1) est complète. D'une manière analogue on montre les autres.

Il suit de la première inégalité dans (3.2) que la fonction w_l a un majorant global appartenant à $K(E_l, \varphi_l; F, \psi_1, \dots, \psi_m)$, à savoir la fonction $\Psi_l^{(1)} = \min_{1 \leq m \leq f} \Psi_{lm}$. Par conséquent w_l coïncide avec la solution du problème (1.7) pour $K=K(E_l, \varphi_l; \bar{\Omega}, \Psi_l^{(1)})$, i.e. on est amené au cas de deux contraintes locales continues. En vertu du lemme 2.11 il existe un minorant global $\Phi_l^{(1)} \in H^{1,p}(\Omega) \cap K(E_l, \varphi_l; F, \psi_1, \dots, \psi_f)$:

$$(3.5) \quad \Phi_l^{(1)} \leq w_l \text{ sur } \bar{\Omega}.$$

D'un raisonnement analogue on établit aussi l'existence d'un majorant global $\Psi_m^{(2)} \in H^{1,p}(\Omega) \cap K(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e; F_m, \psi_m)$ de la solution v_m :

$$(3.6) \quad v_m \leq \Psi_m^{(2)} \text{ sur } \bar{\Omega}.$$

Il suit de (3.5), (3.6) et (3.1) qu'il existe un minorant global Φ et un majorant global Ψ de la solution u lesquels appartiennent à la classe $H^{1,p}(\Omega) \cap K(E, \varphi_1, \dots, \varphi_e; F, \psi_1, \dots, \psi_f)$:

$$\Phi = \max_{1 \leq l \leq e} \Phi_l^{(1)} \leq u \leq \Psi = \min_{1 \leq m \leq f} \Psi_m^{(2)}.$$

Maintenant on achève la démonstration à l'aide du théorème 2.3.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Agmon. The L_p -approach to the Dirichlet problem. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. III*, **13**, 1959, 405—448.
2. E. De Giorgi. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino*, **3**, 1957, 1—19.
3. I. V. Iordanov. Régularité de la solution d'une inéquation variationnelle elliptique à deux contraintes. *C. R. Acad. bulg. sci.*, **26**, 1973, 1587—1589 (exposé en détail: *Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Méc.*, **67**, 1972/73, 169—188).
4. H. Lewy, G. Stampacchia. On the regularity of the solution of a variational inequality. *Comm. Pure. Appl. Math.*, **22**, 1969, 153—188.
5. Ch. B. Morrey, Jr. Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin, 1966.
6. M. K. V. Murthy, G. Stampacchia. A variational inequality with mixed boundary conditions. *Israel J. Math.*, **13**, 1972, 188—224.
7. G. Stampacchia. Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane. *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, **51**, 1960, 1—38.
8. G. Stampacchia. Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **258**, 1964, 4413—4416.
9. G. Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinues. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **15**, 1965, 189—258.
10. G. Stampacchia. Regularity of solutions of some variational inequalities. *Proc. Symp. Pure Math.*, XVIII, part. 1, 1963, 271—281.
11. G. Stampacchia, A. Vignoli. A remark on variational inequalities for a second order non linear differential operator with non lipschitz obstacles. *Bolletino U. M. I.*, (4) **5**, 1972, 123—131.
12. E. M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton New Jersey, 1970.

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia P. O. Box 373

Received 8. 8. 1980