Serdica
Mathematical Journal
Сердика
Математическо списание

Serdica Math. J. **24** (1998), 307-318

Serdica
Mathematical Journal

Institute of Mathematics
and Informatics, Bulgarian
Academy of Sciences

LA CLASSE BORÉLIENNE NE DÉTERMINE PAS LE TYPE TOPOLOGIQUE DE $C_P(X)$

Robert Cauty

Communicated by S. P. Gul'ko

Abstract. We prove that, for every countable ordinal $\alpha \geq 3$, there exists countable completely regular spaces X_α and Y_α such that the spaces $C_p(X_\alpha)$ and $C_p(Y_\alpha)$ are borelian of class exactly $\mathcal{M}_\alpha$, but are not homeomorphic.

1. Introduction. Pour un espace régulier dénombrable X, soit $C_p(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X, avec la topologie de la convergence simple. Il est prouvé dans [5] et [8] que, si X est métrisable, alors $C_p(X)$ est homéomorphe au produit Σ^ω, où Σ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^\omega$ formé des suites bornées. Ce résultat a été généralisé dans [9] où il est prouvé que, si $C_p(X)$ est un $F_{\sigma\delta}$ absolu, alors $C_p(X)$ est homéomorphe à Σ^ω, et cela a conduit les auteurs de [9] à conjecturer que la classe borélienne de $C_p(X)$ déterminait son type topologique. Nous nous proposons ici de réfuter cette conjecture.

Pour tout espace topologique Y, nous notons $\mathcal{F}_0(Y)$ la classe des espaces homéomorphes à des fermés de Y. Pour tout ordinal dénombrable α, nous notons $\mathcal{M}_\alpha$, (resp. $\mathcal{A}_\alpha$) la collection des espaces métriques séparables qui sont des boréliens absolus de classe multiplicative (resp. additive) α. Il est prouvé

1991 *Mathematics Subject Classification:* 54C35, 54H05
Key words: espaces de fonctions $C_p(X)$, classe borélienne

dans [7] que, pour tout ordinal dénombrable $\alpha \geq 2$, il existe un espace régulier dénombrable X_α tel que $C_p(X_\alpha)$ soit homéomorphe à Ω_α, l'ensemble absorbant au sens de Bestvina-Mogilski [2] pour la classe $\mathcal{M}_\alpha$. En outre, comme il est remarqué à la section 6 de [7], $C_p(X)$ est homéomorphe à Ω_α si, et seulement si, $\mathcal{F}_0(C_p(X)) = \mathcal{M}_\alpha$. Nous montrerons ici que, pour tout $\alpha \geq 3$, il existe un espace régulier dénombrable Y_α tel que $C_p(Y_\alpha) \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{A}_\alpha$, mais que $C_p(Y_\alpha)$ ne soit pas $\mathcal{A}_2$-universel (i.e. $\mathcal{F}_0(C_p(Y_\alpha))$ ne contient pas $\mathcal{A}_2$). Puisque $\mathcal{A}_2$ est contenue dans $\mathcal{M}_\alpha$, pour $\alpha \geq 3$, les espaces $C_p(X_\alpha)$ et $C_p(Y_\alpha)$ ne peuvent être homéomorphes, bien qu'ayant la même classe borélienne.

Soient T un ensemble dénombrable, ∞ un point n'appartenant pas à T et F un filtre sur T contenant les complémentaires des ensembles finis. Définissons une topologie sur $T \cup \{\infty\}$ en convenant que chaque point de T est isolé et que les voisinages de ∞ sont les ensembles de la forme $\{\infty\} \cup A$, où $A \in F$. L'espace topologique ainsi obtenu sera noté $\mathbb{N}_F$. Il est connu (voir par exemple [11, lemme 2.1]) que $C_p(\mathbb{N}_F)$ est homéomorphe à c_F, où

$$c_F = \{f \in \mathbb{R}^T \ / \ (\forall \varepsilon > 0) \ (\exists A \in F) \ [|f(t)| \leq \varepsilon \ \forall t \in A]\}.$$

Les espaces Y_α seront de la forme $\mathbb{N}_F$, où F est un filtre du type construit dans [10]. Pour $n \geq 1$, soit T_n l'ensemble des fonctions de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ dans $\{0, 1\}$. Soit $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Pour toute fonction $x : \omega \to \{0, 1\}$, notons $x|n$ sa restriction à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, et soit $B_x = \{x|n / n = 1, 2, \ldots\}$. Pour tout sous-ensemble A de l'ensemble de Cantor 2^ω, soit F_A le filtre sur T ayant pour base la famille des ensembles de la forme $\{T \backslash (B_{x_1} \cup \ldots \cup B_{x_n} \cup S) / n \geq 1$, $x_i \in A$ et S un sous-ensemble fini de $T\}$. Nous prouverons le résultat suivant.

Théorème. *Pour tout sous-ensemble A de 2^ω, c_{F_A} n'est pas $\mathcal{A}_2$-universel.*

Si $A \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \geq 3$, alors $c_{F_A} \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{A}_\alpha$ (voir [3], [4] et [9], section [4]). Nous pouvons donc prendre pour Y_α un espace $\mathbb{N}_{F_{A_\alpha}}$ où $A_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{A}_\alpha$.

Pour tout filtre F sur T, soit $s_F = \{f \in \mathbb{R}^T / (\exists A \in F) \ [f(x) = 0, \forall x \in A]\}$. D'après la proposition 7.6 de [7], c_F est homéomorphe à un fermé du produit s_F^ω, donc si c_F est $\mathcal{A}_2$-universel, s_F^ω l'est aussi. Mais alors, le couple $\big((\mathbb{R}^T)^\omega, s_F^\omega\big)$ est $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_2)$-universel, i.e., pour tout compact K et tout sous-ensemble C de K appartenant à $\mathcal{A}_2$, il existe un plongement φ de K dans $(\mathbb{R}^T)^\omega$ tel que $\varphi^{-1}(s_F^\omega) = C$ (c'est un cas particulier d'un résultat de [1], dont la démonstration a été reproduite au lemme 1 de [6]).

Soient $Q = [-1, 1]^\omega$ le cube de Hilbert, $s =]-1, 1[^\omega$ son pseudo-intérieur, et $W(Q, s)$ le sous-ensemble de Q^ω formé des points n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées dans $Q\backslash s$. Evidemment, $W(Q,s)$ appartient à $\mathcal{A}_2$, donc le théorème résultera du lemme suivant.

Lemme 1. *Si A est un sous-ensemble de 2^ω, alors il n'existe aucune fonction continue φ de Q^ω dans $(\mathbb{R}^T)^\omega$ telle que $\varphi^{-1}(s^\omega_{F_A}) = W(Q,s)$.*

2. Quelques lemmes d'homologie. Pour tout entier $q \geq 0$, nous notons $H_q(X)$ le $q^{\text{ième}}$ groupe d'homologie singulière d'un espace X (réduite en dimension zéro, de sorte que $H_0(X) = 0$ si, et seulement si, X est connexe par arcs), et nous posons $H_*(X) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} H_q(X)$. Si $B \subset A$ sont des fermés du cube de Hilbert Q, nous notons j^A_B l'homomorphisme de $H_*(Q \setminus A)$ dans $H_*(Q\backslash B)$ induit par l'inclusion. Nous dirons qu'un fermé A de Q est une barrière irréductible pour un élément α de $H_q(Q\backslash A)$ si $\alpha \neq 0$ et si $j^A_B(\alpha) = 0$ pour tout fermé propre B de A.

Lemme 2. *Soient A un fermé de Q et α un élément non nul de $H_q(Q\backslash A)$. Alors A contient un fermé B qui est une barrière irréductible pour $j^A_B(\alpha)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des fermés B de A tels que $j^A_B(\alpha) \neq 0$. Ordonnons $\mathcal{B}$ en convenant que $B \leq B'$ si $B \supset B'$. Soit $\{B_i/i \in I\}$ un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{B}$, et soit $B' = \bigcap_{i\in I} B_i$. Alors $Q\backslash B'$ est réunion de la famille, totalement ordonnée par inclusion, des ouverts $Q \setminus B_i$, donc $H_q(Q \setminus B')$ est la limite inductive des groupes $H_q(Q\backslash B_i)$. Puisque $j^A_{B_i}(\alpha) \neq 0$ pour tout i, nous avons aussi $j^A_{B'}(\alpha) \neq 0$, donc B' appartient à $\mathcal{B}$. Le lemme en résulte. □

Par un sous-cube du cube de Hilbert, nous entendons un ensemble de la forme $\prod_{i=0}^{\infty} I_i$, où I_i est un sous-intervalle fermé non dégénéré de $[-1,1]$ et où $I_i = [-1,1]$ pour presque tout i.

Lemme 3. *Supposons que le fermé A de Q soit une barrière irréductible pour un élément α de $H_q(Q\backslash A)$. Alors*
(i) si B est un fermé de A tel que $A\backslash B$ ne soit pas connexe, alors $H_{q+1}(Q\backslash B) \neq 0$; en particulier, A est connexe,
(ii) $A \cap s$ est dense dans A,
(iii) si P est un sous-cube de Q dont l'intérieur rencontre A, alors $H_q(P \setminus A) \neq 0$.

Démonstration. (i) Soit $A\backslash B = U \cup V$ où U et V sont disjoints, non vides et ouverts dans A. Les ensembles $C = U \cup B$ et $D = V \cup B$ sont fermés, et la suite de Mayer-Vietoris du couple $(Q\backslash C, Q\backslash D)$ contient la portion

$$H_{q+1}(Q\backslash B) \xrightarrow{d} H_q(Q\backslash A) \xrightarrow{f} H_q(Q\backslash C) \oplus H_q(Q\backslash D).$$

Puisque A est une barrière irréductible pour α, nous avons $f(\alpha) = \big(j_C^A(\alpha), -j_D^A(\alpha)\big) = (0,0)$, donc α est dans l'image de d. Puisque $\alpha \neq 0$, (i) en résulte;
(ii) supposons au contraire qu'il existe un ouvert U tel que $A \cap U \neq \emptyset = (A \cap s) \cap U$. Soit $B = A \backslash U$. Alors $s \backslash A = s \backslash B$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_q(Q \setminus A) & \xrightarrow{j_B^A} & H_q(Q \setminus B) \\ \uparrow i_{1*} & & \uparrow i_{2*} \\ H_q(s \setminus A) & = & H_q(s \setminus B) \end{array}$$

où i_1 et i_2 sont des inclusions. Il est connu qu'il existe une homotopie $h : Q \times [0,1] \to Q$ telle que $h_0 = id$ et $h(Q \times]0,1]) \subset s$. Cela entraîne que, pour tout ouvert W de Q, il existe une homotopie $h' : W \times [0,1] \to W$ telle que $h'_0 = id$ et $h'(W \times]0,1]) \subset W \cap s$; il en résulte que l'inclusion de $W \cap s$ dans W est une équivalence homotopique. En particulier, i_1 et i_2 sont des équivalences homotopiques, donc i_{1*} et i_{2*} des isomorphismes. Puisque $\alpha \neq 0$, nous avons donc $j_B^A(\alpha) = i_{2*} i_{1*}^{-1}(\alpha) \neq 0$, ce qui est absurde puisque $B \neq A$;
(iii) si V est l'intérieur de P, alors $H_q(V \backslash A) \cong H_q(P \backslash A)$; cela résulte du fait que, V contenant le pseudo-intérieur de P, il existe une homotopie $k : P \times [0,1] \to P$ telle que $k_0 = id$ et $k(P \times]0,1]) \subset V$. Soit $B = A \backslash V$. La suite de Mayer-Vietoris du couple $(Q \backslash A, V)$ contient la portion

$$H_q(V \setminus A) \xrightarrow{f} H_q(Q \backslash A) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q(Q \backslash B).$$

L'homomorphisme j envoie $(\alpha, 0)$ sur $j_B^A(\alpha) = 0$, donc $(\alpha, 0)$ est dans l'image de f. Puisque $\alpha \neq 0$, (iii) en résulte. $\square$

Dans le lemme suivant, (Q_1, s_1) et (Q_2, s_2) sont deux copies de (Q, s), et $Q = Q_1 \times Q_2$. Nous notons π_1 et π_2 les projections de Q sur Q_1 et Q_2 respectivement et, pour un point x de Q_1 et un sous-ensemble A de Q, nous posons $A_x = \pi_2\left((\{x\} \times Q_2) \cap A\right)$.

Lemme 4. *Soit A un fermé de Q tel que $Q_2 \backslash A_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in Q_1$. Si $H_*(Q \backslash A) \neq 0$, alors il existe $x \in Q_1 \backslash s_1$ tel que $H_*(Q_2 \backslash A_x) \neq 0$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit q un entier tel que $H_q(Q \backslash A) \neq 0$. Nous pouvons trouver un complexe simplicial fini X de dimension q, un élément e de $H_q(X)$ et une fonction continue $f = (f_1, f_2) : X \to Q \backslash A$ tels que $f_*(e) \neq 0$ (voir [12, page 293] et utiliser le fait que tout CW-complexe fini de dimension q a le type d'homotopie d'un complexe simplicial fini de dimension q). Soit Y le cône de base

X, et soit $g : Y \to Q_1$ un prolongement continu de f_1. Il est connu que toute fonction continue d'un compact dans Q_1 peut être approximée arbitrairement par des fonctions à valeurs dans $Q_1 \backslash s_1$. Puisque toute fonction continue suffisamment proche de f lui est homotope dans $Q \backslash A$, donc induit le même homomorphisme sur l'homologie, nous pouvons supposer que $g(Y) \subset Q_1 \setminus s_1$, et il nous suffit de montrer qu'il existe un $x \in g(Y)$ et un $k \leq p$ tels que $H_k(Q_2 \backslash A_x) \neq 0$. Supposons donc le contraire.

Tout compact du cube de Hilbert a des voisinages arbitrairement petits qui sont des réunions finies de sous-cubes; les groupes d'homologie d'une telle réunion sont de type fini. Comme $H_p(Q_2 \backslash A_x)$ est la limite inductive des groupes $H_p(C)$, où C parcourt les compacts de $Q_2 \backslash A_x$, il en résulte que si $H_p(Q_2 \backslash A_x) = 0$ pour $p \leq q$, alors, pour tout compact C de $Q_2 \backslash A_x$, il existe un compact C' de $Q_2 \backslash A_x$ contenant C et tel que l'homomorphisme de $H_p(C)$ dans $H_p(C')$ induit par l'inclusion soit trivial pour tout $p \leq q$.

Pour $0 \leq k \leq q+1$, nous allons définir par récurrence un compact B_k de $Q \backslash A$ et une famille finie $\mathcal{C}_k = \{C_k^i / i \in I_k\}$ de compacts de Q_1, dont les intérieurs recouvrent $g(Y)$, de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:

(1) $\quad f(X) \subset B_0 \subset \cdots \subset B_{q+1},$

(2) $\quad g(Y) \subset \pi_1(B_0),$

(3) $\quad$ pour $k > 0$, $\mathcal{C}_k$ est plus fine que $\mathcal{C}_{k-1}$,

(4) $\quad$ pour $k > 0$ et tout $i \in I_k$, il existe un compact N_i de Q_2 tel que $\pi_2((C_k^i \times Q_2) \cap B_{k-1}) = M_1 \subset N_i$, $C_k^i \times N_i \subset B_k$, et que l'homomorphisme de $H_p(M_i)$ dans $H_p(N_i)$ induit par l'inclusion soit trivial pour tout $p < k$.

Puisque $Q_2 \setminus A_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in Q_1$, il est facile de trouver une famille finie $\mathcal{C}_0 = \{C_0^i / i \in I_0\}$ de compacts de Q_1 dont les intérieurs recouvrent Q_1 et des points y_i de Q_2, $i \in I_0$, tels que $C_0^i \times \{y_i\} \subset Q \backslash A$ pour tout i. Alors, le compact $B_0 = f(X) \cup \cup\{C_0^i \times \{y_i\} / i \in I_0\}$ est contenu dans $Q \backslash A$ et vérifie (2).

Soit $0 < k \leq q+1$, et supposons $\mathcal{C}_{k-1}$ et B_{k-1} construits. Puisque B_{k-1} est compact et contenu dans l'ouvert $Q \backslash A$, nous pouvons, pour tout $x \in g(Y)$, trouver un voisinage compact C'_x de x, qui est contenu dans un élément de $\mathcal{C}_{k-1}$, et tel que $M_x = \pi_2((C'_x \times Q_2) \cap B_{k-1}) \subset Q_2 \setminus A_x$. D'après une remarque précédente, nous pouvons trouver un compact N_x de $Q_2 \backslash A_x$ contenant M_x et tel que l'homomorphisme de $H_p(M_x)$ dans $H_p(N_x)$ induit par l'inclusion soit trivial pour tout $p < k$. Soit C_x un voisinage compact de x contenu dans C'_x et tel que

$C_x \times N_x \subset Q \setminus A$. Soient $x_1, \ldots, x_{i_k}$ des points de $g(Y)$ tels que les intérieurs des ensembles $C_{x_1}, \ldots, C_{x_{i_k}}$ recouvrent $g(Y)$. Posons $I_k = \{1, \ldots, i_k)$, $C_k^i = C_{x_i}$, $N_i = N_{x_i}$ et $B_k = B_{k-1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{i_k} C_k^i \times N_i \right)$; alors $M_i \subset M_{x_i}$, et il est facile de voir que les conditions (1) – (4) sont vérifiées.

Pour une famille $\mathcal{V}$ de sous-ensembles de Q_1 et un sous-ensemble D de Q_1, posons $\mathrm{St}(D, \mathcal{V}) = \cup\{V \in \mathcal{V} / V \cap D \neq \emptyset\}$ et $\mathrm{St}(\mathcal{V}) = \{\mathrm{St}(V, \mathcal{V}) / V \in \mathcal{V}\}$. Puisque les intérieurs des éléments de $\mathcal{C}_{q+1}$ recouvrent $g(Y)$ et que Q_1 a une base formée d'ouverts contractiles, nous pouvons trouver des familles $\mathcal{V}_{q+1}, \ldots, \mathcal{V}_0$ d'ouverts de Q_1, recouvrant $g(Y)$ et vérifiant

$$\text{tout élément de } \mathcal{V}_k,\ 0 \leq k \leq q+1, \text{est contractile,} \tag{5}$$

$$\mathcal{V}_{q+1} \text{ est plus fine que } \mathcal{C}_{q+1}, \tag{6}$$

$$\text{pour } 0 \leq k \leq q,\ \mathrm{St}\,\mathcal{V}_k \text{ est plus fine que } \mathcal{V}_{k+1}. \tag{7}$$

Soit K une triangulation de Y telle que, pour tout simplexe (fermé) σ de K, $g(\sigma)$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{V}_0$. Nous munissons l'ensemble des sommets de K d'un ordre total, utilisons cet ordre pour orienter les simplexes de K, et identifions chaque simplexe géométrique (fermé) de K au simplexe orienté correspondant. L'opérateur bord du complexe des chaînes simpliciales de K est alors défini par des relations du type $\partial\sigma = \sum_\tau [\sigma, \tau]\tau$, où, pour un k-simplexe σ, $[\sigma, \tau] = \pm 1$ si τ est une $(k-1)$-face de σ, et $[\sigma, \tau] = 0$ sinon. Si σ est un sommet de K, posons $V_\sigma = \{g(\sigma)\}$, et si σ est un simplexe de dimension $k > 0$, soit V_σ un élément de $\mathcal{V}_k$ contenant $\mathrm{St}(g(\sigma), \mathcal{V}_{k-1})$ (dont l'existence résulte de (7) et du fait que $g(\sigma)$ est contenu dans un élément de $\mathcal{V}_0$). Pour un simplexe σ de dimension $k \geq 0$, posons $L_\sigma = (V_\sigma \times Q_2) \cap B_k$. Nous allons définir par récurrence, pour chaque tel simplexe, une k-chaîne c_σ de L_σ de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$\text{si } k > 0 \text{ et si } \partial\sigma = \sum_\tau [\sigma, \tau]\tau, \text{ alors } \partial c_\sigma = \sum_\tau [\sigma, \tau] c_\tau, \tag{8}$$

$$\text{si } \sigma \text{ est contenu dans } X, \text{ alors } c_\sigma = f|\sigma. \tag{9}$$

Précisons (9): à l'ordre total des sommets de σ est associé un isomorphisme simplicial canonique φ_σ du k-simplexe standard sur σ, ce qui nous permet d'identifier $f|\sigma$ au simplexe singulier $f \circ \varphi_\sigma$.

Si σ est de dimension zéro, posons $c_\sigma = f(\sigma)$ si σ appartient à X; si σ n'appartient pas à X, (2) nous permet de trouver un point

$$c_\sigma \in L_\sigma = (\{g(\sigma)\} \times Q_2) \cap B_0.$$

Soit σ un k-simplexe, $k > 0$, et supposons c_τ définie quand la dimension de τ est $< k$. Si σ est contenu dans X, la condition (9) définit c_σ, et (8) est alors automatiquement vérifiée. Si σ n'est pas contenu dans X, considérons la $(k-1)$-chaîne $u_\sigma = \sum\limits_\tau [\sigma, \tau] c_\tau$, où la somme est étendue à toutes les $(k-1)$-faces de σ. Cette chaîne est un cycle (c'est évident si $k = 1$, et cela résulte de (8) si $k > 1$). Pour chaque face τ de σ, V_τ est contenu dans $\mathrm{St}(g(\sigma), \mathcal{V}_{k-1}) \subset V_\sigma$. Par suite, le support de u_σ est contenu dans $V_\sigma \times M_\sigma$, où $M_\sigma = \pi_2((V_\sigma \times Q_2) \cap B_{k-1})$. Il résulte de (7), (6) et (3) qu'il existe $i \in I_k$ tel que C_k^i contienne V_σ, donc $M_\sigma \subset M_i$. Puisque V_σ est contractile, le théorème de Künneth et (4) entraînent que l'homomorphisme de $H_{k-1}(V_\sigma \times M_\sigma)$ dans $H_{k-1}(V_\sigma \times N_i)$ induit par l'inclusion est trivial. Nous pouvons donc trouver une k-chaîne c_σ, de support contenu dans $V_\sigma \times N_i$ et telle que $\partial c_\sigma = u_\sigma$. Puisque $V_\sigma \times N_i \subset C_k^i \times N_i \subset B_k$, c_σ est bien une chaîne de L_σ.

L'élément e de $H_q(X)$ est représenté par un cycle $y = \sum\limits_\sigma n_\sigma \sigma$, où σ parcourt les q-simplexes de K contenus dans X, et où les n_σ sont des entiers. D'après (9), $f_*(e)$ est représenté par le cycle $y' = \sum\limits_\sigma n_\sigma c_\sigma$. Puisque Y est acyclique, $y = \partial z$, où $z = \sum\limits_\tau m_\tau \tau$, τ parcourant les $(q+1)$-simplexes de Y. Alors, (8) entraîne que $y' = \partial z'$, où $z' = \sum\limits_\tau m_\tau c_\tau$, ce qui est absurde, car le support de z' est contenu dans $B_{q+1} \subset Q \backslash A$, alors que y' représente l'élément non nul $f_*(e)$ de $H_q(Q \backslash A)$.

3. Préliminaires. Soit $\hat{T} = T \cup 2^\omega$. Si $x \in T_n$ et si $m \leq n$, nous notons $x|m$ la restriction de x à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ et nous posons $L(x) = \{x|1, x|2, \ldots, x\}$. Si $x \in 2^\omega$, nous posons $L(x) = B_x \cup \{x\}$. Pour $X \subset \hat{T}$, soit $L(X) = \cup\{L(x)/x \in X\}$. Munissons $\hat{T}$ d'une topologie en convenant que les points de T sont isolés et que, pour $x \in 2^\omega$, les ensembles $\{x' \in 2^\omega \cup \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} T_m / x'|n = x|n\}$, $n \geq 1$, forment une base de voisinages de x. Il est facile de voir que $\hat{T}$ devient ainsi un espace métrique compact.

Le support d'un élément $f \in \mathbb{R}^T$, noté $\mathrm{supp}(f)$, est l'ensemble des $x \in T$ tels que $f(x) \neq 0$. Nous notons E l'ensemble des $f \in \mathbb{R}^T$ dont le support est fini, et E_n l'ensemble des f dont le support est contenu dans $\bigcup\limits_{m=1}^{n} T_m$; les E_n sont fermés dans $\mathbb{R}^T$ et $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Posons $M_{-1} = \emptyset$ et $M_0 = \{0\} \subset \mathbb{R}^T$;

pour $k \geq 1$, soit M_k l'ensemble des éléments f de $\mathbb{R}^T$ pour lesquels il existe un sous-ensemble $X \subset \hat{T}$ de cardinal $\leq k$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset L(X)$ (en d'autres termes, M_k est l'ensemble des fonctions f telles que $\mathrm{supp}(f)$ soit contenu dans la réunion de k chaînes pour la relation d'ordre $x|m \leq x$ pour $x \in T_n$ et $m \leq n$). Soit $M = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} M_k$. Si $f \in M_k \setminus M_{k-1}$, $k \geq 1$, il existe un unique sous-ensemble $\mu(f)$ de $\hat{T}$, de cardinal k, tel que $\mathrm{supp}(f) \subset L(\mu(f))$ et que $\mu(f) \subset L(X)$ pour tout sous-ensemble X de $\hat{T}$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset L(X)$ ($\mu(f)$ peut s'obtenir comme suit: soit $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset L(X)$. Si $x_i \in 2^\omega$ et s'il y a une infinité d'entiers m tels que $f(x_i|m) \neq 0$, soit $y_i = x_i$; sinon, soit m_i le plus grand entier tel que $f(x_i|m_i) \neq 0$, et soit $y_i = x_i|m_i$. Alors $\mu(f) = \{y_1, \ldots, y_k\}$). Si $f \in M_1 \backslash M_0$, $\mu(f)$ est un point, et nous regardons $\mu|M_1 \backslash M_0$ comme une fonction de $M_1 \backslash M_0$ dans $\hat{T}$; si $f \in M_1 \backslash E$, alors $\mu(f) \in 2^\omega$.

Lemme 5. *(i)* $\forall k \geq 0$, *M_k est fermé dans $\mathbb{R}^T$,*
(ii) $\mu|M_1 \backslash E : M_1 \backslash E \to 2^\omega$ *est continue.*

Démonstration. (i) résulte du fait que si $f \notin M_k$, alors $\mathrm{supp}(f)$ contient $k+1$ points incomparables pour la relation de restriction.

Soit $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de $M_1 \backslash E$ convergeant vers $f \in M_1 \setminus E$. Posons $\mu(f_i) = \{x_i\}$ et $\mu(f) = \{x_0\}$. Puisque $f \notin E$, x_0 est l'unique point de $\hat{T}$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset L(x_0)$. Pour prouver (ii), il suffit donc de montrer que si $\{x_{i_p}\}_{p=1}^{\infty}$ est une sous-suite de la suite $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ qui converge vers un point x de 2^ω, alors $\mathrm{supp}(f) \subset L(x)$. Soient $n \geq 1$ et $y \in T_n \setminus L(x)$. Puisque $\{x_{i_p}\}$ tend vers x, nous avons, pour tout p assez grand, $x_{i_p}|n = x|n \neq y$, donc $y \notin L(x_{i_p})$, d'où $f(y) = \lim\limits_p f_{i_p}(y) = 0$.

Etant donnée une fonction continue $\psi : Z \to M_k \backslash M_{k-1}$ ($k \geq 1$), nous dirons qu'un sous-ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de T de cardinal k décompose ψ si $x_i \notin L(x_j)$ pour $i \neq j$ et si $\psi(z)(x_i) \neq 0$ quels que soient $z \in Z$ et $i \in \{1, \ldots, k\}$. La définition de $\mu(\psi(z))$ entraîne alors que, quels que soient $z \in Z$ et $i \in \{1, \ldots, k\}$, il y a exactement un élément y_i de $\mu(\psi(z))$ tel que $x_i \in L(y_i)$. Les morceaux de la décomposition de ψ par X sont les fonctions (continues) $\psi^i : Z \to \mathbb{R}^T$ définies par $\psi^i(z)(x) = \psi(z)(x)$ si $x_i \in L(x)$ et $\psi^i(z)(x) = 0$ sinon. Il est facile de voir que ces fonctions sont à valeurs dans $M_1 \backslash M_0$.

Etant donnée une fonction continue $\psi : Z \to M_k \backslash M_{k-1}$, nous pouvons toujours trouver un ouvert V de Z et un sous-ensemble X de cardinal k de T qui décompose $\psi|V$ (Soit $z_0 \in Z$. Puisque $\psi(z_0) \notin M_{k-1}$, nous pouvons trouver k points $x_1, \ldots, x_k$ dans T tels que $x_i \notin L(x_j)$ si $i \neq j$ et que $\psi(z_0)(x_i) \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, k$, et il suffit de prendre pour V un voisinage de z_0 tel que $\psi(z)(x_i) \neq 0$ pour $z \in V$ et $i = 1, \ldots, k$).

4. Démonstration du lemme 1. L'idée de cette démonstration est essentiellement celle qui a déjà été utilisée dans [6], mais des difficultés techniques s'introduisent en raison des discontinuités des fonctions $\mu|M_k \backslash M_{k-1}$ et obligent à compliquer l'argument. Nous aurons besoin des deux remarques suivantes, dont la vérification est immédiate:

(1) $E \subset s_{F_A} \subset M$

(2) Supposons qu'un sous-ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ décompose une fonction $\psi : Z \to M_k \backslash M_{k-1}$, et soient $\psi^1, \ldots, \psi^k$ les morceaux de la décomposition de ψ par X. Pour $z \in Z$, $\psi(z) \in s_{F_A}$ si, et seulement si, $\psi^i(z) \in s_{F_A}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Pour $r \geq 0$, soit (Q_r, s_r) une copie de (Q, s), et soit $Q^\omega = \prod_{r=0}^{\infty} Q_r$. Si, pour $0 \leq r \leq t$, y_r est un point de Q_r, nous poserons $Q(y_0, \ldots, y_t) = \{y_0\} \times \cdots \times \{y_t\} \times \prod_{u=t+1}^{\infty} Q_u$ et $s(y_0, \ldots, y_t) = \{y_0\} \times \cdots \times \{y_t\} \times \prod_{u=t+1}^{\infty} s_u$.

Supposons qu'il existe une fonction continue $\varphi : Q^\omega \to (\mathbb{R}^T)^\omega$ telle que $\varphi^{-1}(s_{F_A}^\omega) = W(Q, s)$. Soit $\varphi_p : Q^\omega \to \mathbb{R}^T$ la coordonnée d'indice $p \geq 0$ de φ. Nous allons construire par récurrence deux suites d'entiers $\{k_p\}_{p=0}^\infty$ et $\{r_p\}_{p=0}^\infty$ et des points $y_r \in Q_r$. Nous poserons $Q^p = Q(y_0 \ldots, y_{r_p})$ et $s^p = s(y_0, \ldots, y_{r_p})$; nous convenons que $(Q^{-1}, s^{-1}) = (Q^\omega, s^\omega)$. Nous voulons que les propriétés suivantes soient vérifiées:

(3) pour tout $p \geq 0$, $y_{r_p} \in Q_{r_p} \setminus s_{r_p}$,

(4) $\varphi_p(Q^p) \subset M_{k_p} \backslash M_{k_p - 1}$,

(5) si $k_p \geq 1$, il y a un sous-ensemble X_p de cardinal k_p de T qui décompose $\varphi_p|Q^p$.

Si $k_p \geq 1$, nous notons φ_p^i, $1 \leq i \leq k_p$, les morceaux de la décomposition de $\varphi_p|Q^p$ par X_p.

Nous construirons aussi un fermé A_p de Q^p vérifiant les conditions suivantes:

(6) $A_p \subset A_{p-1}$ $(A_{-1} = Q^\omega)$,

(7) $\varphi_p(A_p) \subset s_{F_A}$,

(8) ou bien $A_q = Q^q$ pour tout $q \leq p$, ou bien $H_*(Q^p \backslash A_p) \neq 0$.

Supposons que $p = 0$ ou que $p \geq 1$ et que k_{p-1}, r_{p-1}, Q^{p-1} et A_{p-1} sont déjà définis. Distinguons deux cas:

Cas 1: $A_{p-1} = Q^{p-1}$. Puisque s^{p-1} est contenu dans $W(Q, s)$, nous avons $\varphi_p(s^{p-1}) \subset s_{F_A} \subset M = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$. Puisque les M_k sont fermés et que s^{p-1} est un espace de Baire, nous pouvons trouver un entier k et un ouvert U de Q^{p-1} tels que $\varphi_p(U \cap s^{p-1}) \subset M_k$; puisque s^{p-1} est dense dans Q^{p-1}, nous avons alors $\varphi_p(U) \subset M_k$. Prenant pour k_p le plus petit de ces entiers k, et utilisant une remarque faite à la section 3, nous pouvons trouver un ouvert $U_0 \subset U$ tel que $\varphi_p(U_0) \subset M_{k_p} \backslash M_{k_p - 1}$ et que, si $k_p \geq 1$, il existe un sous-ensemble X_p de cardinal k_p de T décomposant $\varphi_p | U_0$. Prenons des points $y_{r_{p-1}+1}, \ldots, y_{t_0}$, de $Q \backslash s$ de façon que $Q(y_0, \ldots, y_{t_0}) \subset U_0$. Si $k_p = 0$, les conditions (3) – (8) sont vérifiées si l'on prend $r_p = t_0$ et $A_p = Q^p = Q(y_0, \ldots, y_{r_0})$. Si $k_p \geq 1$ et s'il existe des points $y_{t_0+1}, \ldots, y_{t_1}$ tels que $\varphi_p^1(Q(y_0, \ldots, y_{t_1})) \subset s_{F_A}$, fixons un tel ensemble fini et, si $k_p \geq 2$, considérons φ_p^2. Au bout d'un nombre fini d'étapes, deux cas peuvent se présenter:

(a) Il existe $t > t_0$ et des points $y_{t_0+1}, \ldots, y_t$, tels que $\varphi_p^i(Q(y_0, \ldots, y_t)) \subset s_{F_A}$ pour $1 \leq i \leq k_p$. Prenons $r_p = t + 1$ et pour y_{r_p} un point de $Q \backslash s$. D'après (2), les conditions (6) – (8) sont alors vérifiées par $A_p = Q^p$;

(b) Il existe $t \geq t_0$, des points $y_{t_0+1}, \ldots, y_t$ et un entier $i \in \{1, \ldots, k_p\}$ tels que

   (i) $\varphi_p^j(Q(y_0, \ldots, y_t)) \subset s_{F_A}$ si $j < i$,

   (ii) quels que soient les points $y_{t+1}, \ldots, y_u$, $\varphi_p^i(Q(y_0, \ldots, y_u))$ n'est pas contenu dans s_{F_A}.

Posons alors $Q' = Q(y_0, \ldots, y_t)$, $s' = s(y_0, \ldots, y_t)$ et $\varphi'_i = \varphi_p^i | Q'$. L'ensemble $(\varphi'_i)^{-1}(E)$ est un F_σ dont l'intérieur dans Q' est vide d'après (1) et (ii), donc $C = Q' \setminus (\varphi'_i)^{-1}(E)$ et s', étant deux G_δ, denses dans Q', se rencontrent. C n'est pas connexe. En effet, d'après le lemme 5 (ii), $\mu \circ (\varphi'_i | C)$ est une fonction continue à valeurs dans l'espace totalement discontinu 2^ω; si C était connexe, $\mu \circ (\varphi'_i | C)$ serait constante; soit $\mu \circ \varphi'_i(C) = \{x_0\}$. Si z est un point de $C \cap s'$, alors $\mathrm{supp}(\varphi'_i(z))$ est un sous-ensemble infini de $L(x_0)$ (puisque $\varphi'_i(z) \notin E$). Puisque $\varphi_p(s') \subset s_{F_A}$, $\mathrm{supp}(\varphi'_i(z))$ est, d'après la définition du filtre F_A, contenu dans un sous-ensemble de la forme $B_{x_1} \cup \ldots \cup B_{x_n} \cup S$ où $x_i \in A$ pour $1 \leq i \leq n$ et S est un sous-ensemble fini de T. Comme $L(x) \cap (B_{x_1} \cup \ldots \cup B_{x_n} \cup S)$ est un ensemble fini si $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, x_0 devrait être l'un des x_i, et nous aurions donc $\varphi'_i(C) \subset s_{F_A}$, d'où $\varphi'_i(Q') \subset s_{F_A}$, contrairement à (ii). Soit donc $C = U_1 \cup U_2$, où U_1 et U_2 sont non vides, disjoints et ouverts dans C. Soit V_1 (resp. V_2) l'intérieur de $\overline{U}_1$ (resp. $\overline{U}_2$) relativement à Q'. Puisque C est dense dans Q', V_1 et V_2 sont des ouverts disjoints tels que $C \subset V_1 \cup V_2$. Alors le fermé $B = Q' \backslash (V_1 \cup V_2)$ vérifie $\varphi_i'(B) \subset E \subset s_{F_A}$ et $H_0(Q' \backslash B) \neq 0$.

A partir de là, la démonstration se poursuit comme dans le cas 2, pour obtenir d'abord un sous-cube P' de Q' et un fermé $B' \subset B \subset A_{p-1} = Q^{p-1}$ tels que $\varphi_p(B') \subset s_{F_A}$ et $H_*(P' \backslash B') \neq 0$, puis des points $y_{t+1}, \ldots, y_{r_p}$ tels que $A_p = B' \cap Q^p$ vérifie $H_*(Q^p \backslash A_p) \neq 0$.

Cas 2: $H_*(Q^{p-1} \setminus A_{p-1}) \neq 0$. Quitte à diminuer A_{p-1}, le lemme 2 nous permet de supposer que A_{p-1} est une barrière irréductible pour un élément de $H_*(Q^{p-1} \backslash A_{p-1})$. D'après le lemme 3, $s^{p-1} \cap A_{p-1}$ est dense dans A_{p-1}, donc, en répétant l'argument du cas 1, nous pouvons trouver un ouvert U_0 de Q^{p-1} et un entier k_p tels que $\varphi_p(U_0 \cap A_{p-1}) \subset M_{k_p} \setminus M_{k_p-1}$ et qu'il existe un sous-ensemble X_p de cardinal k_p de T décomposant $\varphi_p|U_0 \cap A_{p-1}$. Soit P_0 un sous-cube de Q^{p-1} contenu dans U_0 et dont l'intérieur rencontre A_{p-1}, et soit $B_0 = P_0 \cap A_{p-1}$. D'après le lemme 3 (iii), $H_*(P_0 \setminus B_0) \neq 0$. Si $k_p > 0$, nous construisons par récurrence des suites décroissantes de sous-cubes P_i et de fermés B_i $(0 \leq i \leq k_p)$ de façon que $\varphi_p^i(B_i) \subset s_{F_A}$ et $H_*(P_i \backslash B_i) \neq 0$. Soit $1 \leq i \leq k_p$ et supposons P_{i-1} et B_{i-1} construits. Quitte à diminuer B_{i-1}, nous pouvons supposer que c'est une barrière irréductible pour un élément α de $H_q(P_{i-1} \backslash B_{i-1})$; alors $s^{p-1} \cap B_{i-1}$ est dense dans B_{i-1} (lemme 3 (ii)). Posons $\varphi_i' = \varphi_p^i|B_{i-1}$. Si l'intérieur de $(\varphi_i')^{-1}(s_{F_A})$ relativement à B_{i-1} n'est pas vide, prenons un ouvert U_i de P_{i-1} tel que $\varphi_i'(U_i \cap B_{i-1}) \subset s_{F_A}$, puis un sous-cube P_i de P_{i-1} contenu dans U_i dont l'intérieur rencontre B_{i-1}. D'après le lemme 3 (iii), nous pouvons alors prendre $B_i = P_i \cap B_{i-1}$. Si l'intérieur de $(\varphi_i')^{-1}(s_{F_A})$ relativement à B_{i-1} est vide, posons $P_i = P_{i-1}$. Répétant l'argument du cas 1 (b) (en remplaçant Q' et s' par B_{i-1} et $B_{i-1} \cap s^{p-1}$ respectivement), nous pouvons alors trouver un fermé $B_i \subset B_{i-1}$ tel que $\varphi_i'(B_i) \subset s_{F_A}$ et que $B_{i-1} \backslash B_i$ ne soit pas connexe. D'après le lemme 3 (i), $H_*(P_i \backslash B_i) \neq 0$. Finalement, nous obtenons un fermé B_{k_p} de P_{k_p} contenu dans $B_0 \subset A_{p-1}$ et tel que $\varphi_p^i(B_{k_p}) \subset s_{F_A}$ pour $1 \leq i \leq k_p$ si $k_p > 0$, d'où $\varphi_p(B_{k_p}) \subset s_{F_A}$ d'après (2). Le sous-cube P_{k_p} de Q^{p-1} est de la forme $\{y_0\} \times \cdots \times \{y_{r_{p-1}}\} \times \prod_{r=r_{p-1}+1}^{\infty} R_r$, où R_r est un sous-cube de Q_r, et où il existe $r_p > r_{p-1}$ tel que $R_r = Q_r$ pour $r \geq r_p$. Remarquons qu'il est impossible de trouver des points $y'_{r_{p-1}+1}, \ldots, y'_n$ tels que $Q(y_0, \ldots, y_{r_{p-1}}, \ldots, y'_n) \subset A_{p-1}$ (car si l'on est dans le cas 2 pour p, il existe $p' < p$ pour lequel on a été dans le cas 1 (b)). Nous pouvons donc appliquer le lemme 4 pour trouver des points $y_{r_{p-1}+1}, \ldots, y_{r_p}$, avec $y_{r_p} \in Q_{r_p} \setminus s_{r_p}$ tels que $A_p = B_{k_p} \cap Q^p$ vérifie $H_*(Q^p \backslash A_p) \neq 0$. Ceci achève la construction.

D'après (3), le point $y = (y_0, y_1, \ldots)$ appartient à $Q^\omega \backslash W(Q, s)$. Evidemment, $\{y\}$ est l'intersection de la suite de compacts Q^q, $q \geq 0$, d'où $\{\varphi(y)\} = \bigcap_{q=0}^{\infty} \varphi(Q^q)$. Il résulte de (6) que $Q^q \cap A_p \neq \emptyset$ quels que soient p et q. Puisque A_p est compact, cela entraîne que $\varphi_p(y) \in \varphi_p(A_p) \subset s_{F_A}$ pour tout p, donc $\varphi(y) \in s^\omega_{F_A}$, contrairement à l'hypothèse que $\varphi^{-1}(s^\omega_{F_A}) = W(Q, s)$.

RÉFÉRENCES

[1] T. Banakh, R. Cauty. Interplay between strongly universal spaces and pairs. Prépublication.

[2] M. Bestvina, J. Mogilski. Characterizing certain incomplete infinite dimensional absolute retracts. *Michigan Math. J.* **33** (1986), 291-313.

[3] J. Calbrix. Filtres boréliens sur l'ensemble des entiers et espace des applications continues. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **33** (1988), 655-661.

[4] J. Calbrix. Classes de Baire et espaces d'applications continues. *C. R. Acad. Sci. Paris , Sér. I Math.* **301** (1985), 759-762.

[5] R. Cauty. L'espace des fonctions continues d'un espace métrique dénombrable. *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** (1991), 493-501.

[6] R. Cauty. Sur l'universalité des produits de rétractes absolus. *Bull. Polish Acad. Sci.* **44** (1996), 453-456.

[7] R. Cauty, T. Dobrowolski, W. Marciszewski. A contribution to the topological classification of the spaces $C_p(X)$. *Fund. Math.* **142** (1993), 269-301.

[8] T. Dobrowolski, S. P. Gulko, J. Mogilski. Function spaces homeomorphic to the countable product of ℓ_2^f. *Topology and its Appl.* **34** (1990), 153-160.

[9] T. Dobrowolski, W. Marciszewski, J. Mogilski. On topological classification of function spaces $C_p(X)$ of low Borel complexity. *Trans. Amer. Math. Soc.* **328** (1991), 307-354.

[10] D. Lutzer, J. van Mill, R. Pol. Descriptive complexity of function spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **291** (1985), 121-128.

[11] W. Marciszewski. On analytic and coanalytic function spaces $C_p(X)$. *Topology and its Appl.* **50** (1993), 241-248.

[12] W. S. Massey. Homology and Cohomology Theory. Marcel Dekker, New-York, 1978.

22 rue Jouvenet
75016 Paris
France

Received June 11, 1997
Revised November 25, 1997