МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

ФИЗИКАЛИЗМЪТ В МАТЕМАТИКАТА?

Станчо Димиев

Давността на повдигнатия в заглавието въпрос е общоизвестна. Традиционната му актуалност е поддържана предимно от специалисти по философия на математиката, но напоследък и някои авторитетни съвременни математици изразиха отношението си към въпроса. Например големият руски математик Владимир Арнолд заявява, че „Математиката е част от физиката“. Като аргументация добавя, че „Теоремата за пресечната точка на височините в триъгълника е следствие от тъждеството на Якоби“.

Защо се появяват подобни декларации, ако съдържанието им е наистина безспорно? Работата е в това, че по въпроса има разгорещен спор, които трае от много стари времена. Това личи от следното мнение на английския философ Франсис Бейкън изказано още през 1623 г. „Не знам как стана така, логиката и математиката, които не заслужават повече от ролята на слуги за физиката, да искат заради своята строгост непременно да диктуват своите правила“.

1. Философия на математиката. Ако в началото на 20-ти век интересът към философията на математиката е бил стимулиран главно от математици и логици – да припомним само най-първокласните: Поанкаре, Хилберт, Брауер, Ръсел, Фреге – то по-късно едно по-съществено възраждане се забелязва главно в философските среди след 1973 г., когато излиза известната статия на Пол Бенасераф [1] под заглавие „Математическата истина“. Всъщност в тази статия авторът дискутира трудностите от философско естество за развиването на приемлива семантика за математиката Тези трудности възникват когато си поставим за цел да осигурим такава семантика за математиката която да се интегрира с една разбираема теория за истината и научната епистемология. Следният цитат е от цитираната по-горе статия:

“Two quite distinct kinds of concerns have separately motivated accounts of the nature of mathematical truth: (1) the concern for having a homogeneous semantical theory in which semantics for the propositions of mathematics parallel the semantic for the rest of the language, and (2) the concern that the account of mathematical truth meshs with a resonable epistemology”:

За Бенасераф не е ясно как научаваме нещо за нефизичните математически обекти (ако ги има въобще). Разбира се можем да постулираме съществуването им, но постулатите не имплицират съществуване, така както то е прието в референциалните причинни теории за знанието изобщо. Привеждаме още и следния цитат от същата статия:

“If, for example, numbers are the kind of entities they are normally taken to be, then the connection between the truth conditions for the statements of number theory and any relevant events connected with people who are supposed to have mathematical knowledge cannot be made out. It will be impossible to account for how anyone knows any properly number-theoretical propositions”

Философът Марк Щайнер [2] успява да придаде следната изключително ясна интерпретация на тезата на Бенасераф:

“The objection is that, if mathematical entities exist, they are unknowable - hence mathematical truths are unknowable. There cannot be a science treating of objects that make no causal impresion on daily affairs. : Since numbers, et al. are outside all causal chains, ouside space and time, they are inscrutable. Thus the mathematics faces a dilemma: either his axioms are not true (supposing mathematical entities not to exist), or they are unknowable”.

Изложената по-горе теза на Бенасераф добре приляга на желанието да интерпретираме математиката като част от физически приемливия свят. Това е пункт (1) в формулираната теза. Всъщност трудностите, които срещаме когато се опитваме да схванем математиката от гледище на емпиричните науки, са отдавана известни. Нито логиката, нито математиката се подават на обичайното емпирично третиране.

Въпросът дали числата $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots$ имат самостоятелно съществуване, независимо от нашето съзнание, не може да се обсъжда експериментално, но свойствата им допущат експериментална проверка. Например следната конкретна аритметична формула:

$$3 \times 5 = 5 \times 3$$

се извлича експериментално сравнявайки общия брой в три групи по пет обекта с този на пет групи по три обекта. Това се постига чрез елементарно изчерпване. Наблюдавайки множество подобни (експериментално проверяеми) формули, чиито списък можем да размножаваме колкото си искаме, може да преминем към алгебричната формула $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$.

Така открихме една алгебрична формула. Изглежда убедително е да настояваме, че именно „открихме“ посочената формула, а не я измислихме.

Навярно пак експериментално са открити така наречените Питагорови тройки. Например, (3, 4, 5), (7, 24, 25), (24, 143, 145), (840, 41, 841) и др. Тук аналогично имаме списък от конкретни аритметични формули

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 7^2 + 24^2 = 25^2, \ldots$$

който може да се унифицира чрез алгебричната формула $\mathbf{a^2} + \mathbf{b^2} = \mathbf{c^2}$. За да предпазим читателя–математик от чувството, че го занимаваме с тривиални неща, дължим да напомним, че приведените по-горе примери са използувани от известния британски математик Майкъл Атия като аргументация на мнението, че математиката се корени в реалния свят.

Сега да се върнем към пункт (2) от тезата на Бенасераф. Без да се интересуваме дали числата съществуват независимо от нашето съзнание, може да настояваме, че схващаме свойствата им и даже, че ги кодираме чрез алгебрични формули, които са осезаемо разбираеми. Дилемата „или аксиомите не са верни, или нямаме знание за обектите“ като че ли не върви в разглежданите случаи. Но може да се възрази, че тук нямаме аксиоми, но имаме знание близко до това в физиката: нещо като индуктивен синтез извлечен от експерименталните данни. Тук заслужава да припомним и окачествяването на математиката дадено от Поанкаре. За него “faire des mathematiques, c'est donner le meme nom a des choses differentes”. В разглеждания случай това трябва да се разбира в смисъл, че възникващата алгебрична формула унифицира безбройно много частни случаи, сингулярни твърдения според логиката. Участващите букви могат да се третират като пропозиционални (съждителни) променливи изменящи се в множеството на естествените числа, но това вече включва сериозна интервенция на логиката.

Разбира се можем да настояваме да не се въвеждат буквени изрази, или абстрактни алгебрични формули. Нека работим само с конкретните аритметични изрази, които съдържат числа и означения за операции върху тях и нищо друго. Така получаваме един каталог от емпирично проверени числови формули, с които можем евентуално да оперираме логически. Скицираното разбиране е точно това, което философите наричат *номинализъм* по-точно *математически номинализъм*, за разлика от традиционния номинализъм, който изобщо изключва използуването на абстрактни обекти.

Алтернативен подход е да приемем, че числата съществуват независимо от нашето съзнание, разбира се извън пространството и времето, като някакви идеални същности, които не се подчиняват на общоприетите в опитните науки причинни връзки. С други думи приемаме някаква семантика за числата, която е съвършено различна от обичайната свързана с физичните предмети. Точно това Бенасераф не иска, когато настоява за „хомогенна семантична теория“, която да включва и математиката. Това разбиране за математическите обекти (като идеални същности) е известно като *математически платонизъм или математически реализъм.* То се споделя от преобладаващата част от работещите математици, съзнателно или несъзнателно.

До тук илюстрирахме върху достъпни примери физикализма, номинализма и реализма като философски доктрини за математиката. Понастоящем в философията са създадени различни нива на въпросните доктрини. Те се изграждат върху по-силни или по-слаби условия от епистемологично естество.

Например, такава е амбициозната номиналистична програма създадена първоначално от философа Hartry Field през 1980 г. Известна е под фрапиращото название „Наука без числа“ [5]. Тя акцентира върху втората част от дилемата на Бенасераф. Според Field научно приемливата епистемология не бива да бъде изоставяна относно математиката. Интерпретирайки инструментално последната, можем да съхраним физикалистичното ѝ разбиране. Напомняме, че „инструменталната интерпретация“ на една опитна наука е философско понятие, което приема обясняването на наблюденията с цената на отклонение от природната им същност. Като философска доктрина е предложено от кардинал Белиармино от Ватикана по време на дебатите за реалността на Коперниковата геоцентрична система през 16 век.

2. Съвременната наука и математическата практика. Наскоро излезлият превод на издадената през 1996 г. книга “Matiere a pence” [6], съдържа дебат между двама големи учени, невробиологът Жан-Пиер Шанжо и математикът Ален Кон.

Тя насочва въпроса за същността на математиката в друга посока. Основният въпрос в този диалогичен дебат е какви са взаимоотношенията между *математиката и мозъка.* Ален Кон, голям математик и убеден платонист, споделя удивлението си от това, че вече познаваме в някаква степен мозъчната дейност. „Бях поразен от съществуването на перцептивни (свързани с възприятията) карти, които са много повече при човека, отколкото при другите животни. Те свързват ретината с области от мозъка имащи различни интерпретивни функции... Мозъчната дейност се подчинява на законите на физиката“.

Шанжо от своя страна подчертава настоятелно ролята на мозъка: „Ние виждаме повече с мозъка, отколкото с очите!“. Възникналото ново интердисциплинарно направление — *когитивната наука* обединява математиката, психологията и невронауките с оглед успешното изучаване на дейността на мозъка. Основната теза, която обединява двамата учени е, че математическата практика, като мислене, оставя материална следа. Извънредно важно е, и за проблемите на обучението, че може да се счита за установено, че непасивното знание – знанието-умение – се локализира в дадена област на мозъка и, ако съответната система от неврони не се активизира (възбужда) поне от време на време, то въпросното знание избледнява и дори може да се загуби. Изключително интересни са коментариите на Шанжо относно възможностите за сравняване на дарвинизма и математическите обекти, един явно нетрадиционен аспект. Човекът е крайния резултат от биологичната еволюция което ни кара да приемем, че неговият мозък притежава структура нагодена да произвежда математически операции, които са свързани с реакциите му спрямо окръжаващата го физична среда. Съвременната дисциплина наречена условно „изкуствен интелект“ се интересува от алгоритмичния аспект на мозъчната дейност. Големият британски математик Rodger Penrose [7], също един убеден платонист, заема противоположна позиция: “...algorithm is everywhere, except in the mind”. Той настоява че някакво подходящо физично въздействие на мозъка предизвиква осъзнаването, но формата на това въздействие е свързана с квантовата физика.

Въпросът за психологията на откритието в математиката е засегнат още от големия френски математик Жак Адамар, който го схваща като определен вид мисловна инкубация с разграничени стадии на развитие. Съвременната философия (Сартър, Фуко и други) намесва психоанализата.

3. Разликата между математиката и физиката. Склонността на учените нематематици да схващат математиката като език е относително оправдана. Но този „език“ не се състои от думи и граматически правила осигуряващи образуването на коректни изречения. Думите означават нещо и са обвързани с нашия опит. По подобен начин математическите твърдения са смислени и математическият смисъл се предава правилно при коректна манипулация с тях. Обичайният език е размит и двусмислен понякога докато математическият език е от специално естество. Формалното боравене с математическия език води до колизии с математическия смисъл. Правилата на обичайната граматика, дори тези на логиката, не гарантират пълен успех относно съхраняването на математическия смисъл при манипулирането му чрез съждения и формули. На операционно ниво можем да извличаме следствия, които не са смислено оправдани. По времената на Кардано и Тарталия боравенето с комплексни числа – наричани имагинерни – е било въпрос на проникновено умение.

Днес всеки добре обучен студент може безупречно да манипулира тези числа, благодарение не само на вече ясните правила за смятане с тях, а защото математическият им смисъл е овладян напълно. Математиката като език има ред формални свойства, но контролирането на математическия смисъл е неформално.

Математическата строгост не е самоцел за теоретичната физика. Напротив, физичната интуиция подсказва как да пренебрегнем един или друг член в дадено диференциално уравнение произлязло от изучаването на физичен процес. В теорията на полето се смята с разходящи редове и разходящи интеграли. Най-странното е че, използувайки немотивирано орязване, т.е. нагласяне в пресмятанията, се е получавало приближаване към опитните данни. Ясно е, че тук усетът на изследователя е играл по-голяма роля от коректната математика. Излиза, че ролята на математиката е само в това да опише резултата на математически език, а не да го извлече логически! Всъщност функциите на математиката се свеждат до дедуциране от някакви аксиоми. Но може ли да твърдим, че опитните физични данни са ясни аксиоматично? Очевидно не - както това се вижда от ред случаи в историята на физиката. Несъмнено може да се говори за „физически смисъл“ и, което е по-важно, той не се извлича от математическата форма на изложението. Иска се творческо прозрение за аксиоматизирането на опитните данни, за което нямаме преки указния. Така стигаме до съвременната математическа физика в която математическите структури се ангажират не само като формален език. При нея стремежът е да се съедини физичната интуиция за физическия смисъл с коректния математически смисъл, обстоятелство което не е ръководещо за някои надарени физици. И до днес, доколкото ми е известно, интегралът на Файнман не може да се схваща като коректен математически обект. Впрочем не можем да твърдим, без неоправдано натоварване, че физиката е математика. Остава въпросът дали математиката е физика, т.е. част от физиката, както следва от изложеното по-горе?

4. Ролята на числата и компютъра?. Тук най-напред ще припомним още една мисъл на Пенроуз:“In some Platonic sense, the natural numbers seem to be things that have an absolute conceptual existence independent ourselves. Moreover, the specific infinite character of the totality of natural numbers is something that somehow we are able to percieive directly”. Целта ни не е да адмирираме философски платонисткската позиция на Пенроуз, а конструктивно да изследваме възможностите за един вид аритметична геометрия богатството на фигурите в която обеднява благодарение на отказа да използваме реални числа. Това начинание се осъществява под ръководство на автора на тази статия в Смоленския филиал на Пловдивския университет (ПУ) от група асистенти, при голяма помощ от страна на доц. Неделчо Милев от ПУ. Изложението тук ще се сведе до обсъждането на три класически факта от математиката: 1.) Известната теорема на Ердьош за равнинните графи с целочислени разстояния между върховете им, 2.) Питагоровите триъгълници, и 3.) Някои геометрични вероятности.

Съгласно цитираната теорема на Ердьош върховете на всеки безкраен граф от посочения вид лежат върху една обща права. Ердьош разглежда графи в Декартовата равнина $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, но теоремата му остава в сила и за графи, чиито върхове лежат върху решетката с целочислени координати $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, която приехме да наричаме Диофантова равнина. (Тук $\mathbf{R}$ означава полето на реалните числа, а $\mathbf{Z}$ – пръстена на целите числа.) Това означава, че ще разглеждаме графи от посочения вид не в Декартовата, а в Диофантовата равнина. Пряко от теоремата на Ердьош следва, че съществуват крайни диофантови фигури, т.е. фигури чиито върхове имат целочислени координати и разстоянието между всели два от тях е цяло положително число. Някои резултати за диофантовите фигури са изложени в статията на М. Брънчева, публикувана в Юбилейния сборник на ФМИ – ПУ, 2000 г. Изненадващо в случая е, че има тясна връзка между диофантовите фигури и питагоровите триъгълници. По-точно, ако означим с Π множеството на всички питагорови триъгълници в Диофантовата равнина, то Диофантовите триъгълници (= 3–графи с целочислени страни) се характеризират като елементи на математичните структури (съгласно терминологията на Бурбаки) $\Pi \times \Pi$ или $\Pi \times \Pi \times \Pi$. Идея за доказателство на геометричен език е изложена с помощта на понятието Питагоров четириъгълник в цитираната статия на Брънчева. В общия случай, диофантовите фигури допущат триангулация съставена от диофантови триъгълници, т.е. характеризират се като елементи на n-кратната структура $\Pi \times \Pi \times \ldots \times \Pi$. Ако $\Delta \times \Delta \times \ldots \times \Delta$ е структурата на диофантовите фигури с n на брой върха, влагането $\Delta \times \Delta \times \ldots \times \Delta \subset \Pi \times \Pi \times \ldots \times \Pi$ е само инективно, без да е сюрективно. Последното обстоятелство даде повод за въвеждането на понятието *диофантов килим.* При работата върху диофантовата планиметрия широко се използваха компютърни алгоритми като средство за получаване на примери.

Сега можем да си зададем въпроса как би изглеждала планиметрията, ако искаме да я строим само с помощта на целите числа. Отговорът не е привлекателен: ред познати фигури от Декартовата планиметрия, като равнострания триъгълник например, ще изгубят легитимността си в Диофантовата такава. Не всяка Диофантова отсечка (= 2–граф с целочислена дължина) има средна точка, теоремите за забележителните пресечни точки в триъгълника отпадат. За решаването дори на такава проста задача като тази за построяване на триъгълник по три дадени страни е нужно да решаваме линейни диофантови уравнения с две неизвестни.

Ако се върнем към математическия платонизъм виждаме, че една чисто аритметична версия на гръцката планиметрия е останала неразвита. Стана ясно какви са нейните възможности и какви са нейните граници, именно: *питагоровата теорема, уравнението на питагоровите тройки и линейните диофантови уравнения* като теория и *диофантовите фигури* като обекти.

Всъщност античните гърци са разполагали с конструктивни възможности за изобразяване на отсечки, чиято дължина е квадратична ирационалност, благодарение на линията и пергела. Това означава, че всяка отсечка в $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ би могла да бъде снабдена с дължина, което означава, че една по-богата планиметрия може да бъде развита в $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Очевидно възможностите за разбиране зависят от това какви числа ще консумираме. Но как осъзнаваме платонично фигурите е трудно да се изясни рационално. Може би ни подпомага някакво озарение, или някаква вродена интуиция? Това което е любопитно за нас е, че „мистериозната“ теорема на Ердьош ни подсказа какви са били границите за една строго гръцка планиметрия основаваща се само на понятието цяло число. Ако ни бъде позволено да спекулираме с цитираната в началото на този параграф мисъл на Пенроуз, можем да се питаме дали разглежданата теорема на Ердьош не е била осъзната директно от автора ѝ като резултат на някакво геометрично усещане за специфичността на “totality of natural numbers : that somehow we are able to percive directly".

До тук се старахме да изпитваме смисъла на платонизма върху сравнително простия материал които ни доставя диофантовата равнина. Обаче не е изключено последната да се свърже с по-реалистични идеи. Възможностите за някаква (квази) физична интерпретация могат да се свързват с факта, че физическото измерване на координатите има ограничения от долу, което прави привлекателно привличането на подобна дискретна решетка и някаква естествена стохастична геометрия върху нея. Изглежда някои геометрични вероятности естествено пасват за целта. За сега това е само проект.

5. Заключение. Несъмнено математическият платонизъм изключва физикализма – идеалният свят на Платон не е нашия физичен свят. Но от това не следва, че математиката няма пресечни точки с физиката. В ролята на език тя ѝ служи по-добре от всяка друга дисциплина. Номинализмът е съвместим с емпиризма – една крайна форма на физикализма, но с това не се изчерпва въпроса. Разискваните три философски доктрини за математиката се изключват взаимно, сякаш за да подчертаят, че още сме далеч от едно естествено философско разбиране за логически най-ясната от науките.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Paul Benacerraf. Mathematical Truth, *Journal of Philosophy* **70** (1973), 661-679.

[2] Mark Steiner. Platonist and the Causal Theory of Knowledge, *Journal of Philosophy* **70** (1973), 57-66.

[3] A. D. Irvine. Nominalism, Realism & Physicalism in Mathematics, Kluwer, 1990.

[4] Jean-Pierre Bourguignon. A major challenge for mathematiciancs, *European Mathematical Society* **36** (2000), 20-23.

[5] Hartry Field. Science Without Numbers, Oxford, Basil Blackwell, 1980.

[6] Jean-Pierre Changeux, Alain Connes. Mathiere a pencee', Paris, 1996.
Български превод: Мислещата материя, Херон прес, София, 2000.

[7] Roger Penrose. Shadows of the Mind, Oxford Univ. Press, 1995.

[8] Maria Brancheva, Stancho Dimiev, Nedelcho Milev. On Diophantian figures, *C. R. Bulg. Acad. Sci.* (Submitted for publication).

[9] Любен Сивилов. Теории за истината–съставител Л.С., Унив. Изд. „Св. Климент Охридски", София, 1992.

[10] Станчо Димиев. Сходство и различие между философията и науката, *Философски алтернативи*, **5-6** (1999), 75-79.

[11] Станчо Димиев, Иван Тонов. Диофантови фигури, Математика и математическо образование, Изд. БАН, С., 1986, 383-390 ($MR1988d:51015$).

Stancho Dimiev
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: sdimiev@math.bas.bg

University of Plovdiv, Filial Smolyan

PHYSICALISM IN MATHEMATICS?

Stancho Dimiev

The desire to integrate mathematics into a physicalistically acceotable world is not new. Recently, the leading mathematician Vladimir Arnold express it in a strongly definitive form: "Mathematics is a part of physics". In this talk the question about the nature of mathematical knowledge is discussed. From the philosophical point of view, Paul Benacerraf (1973) examines the difficulties of developing an acceptable semantics for mathematics. His dilemma regarding epistemological basis is stated (see the first paragraph of this paper). The acceptance of other philosophical doctrines for mathematics, the nominalism and the realism (Platonism), and the understanding of the role of the brain activity is discussed too, especially the debate Changeux-Connes. The traditional comparison of Physics and Mathematics is recalled with a comment on the use of mathematics as language in physics. Finally, a new arithmetical planimerty, developed by the author and some collaborators is exposed in short. The purpose is to defend the claim that our mathematical understanding of planimetric figures depends of the use of numbers as a base. So, in the considered arithmetical planimetry, called diophantian planimetry, based on integers only, there is not some kind of triangles which are very sensible.