МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

# ИЗМЕРВАНЕ НА АРХИМЕДОВИ ВЕЛИЧИНИ

**Иван Димовски**

Докладът е предназначен за учители по математика. Направен е обзор на историческото развитие на темата за измерването от математическо гледище. Това развитие достига върхната си точка в аксиоматичната характеризация на понятието величина, предложена от О. Хьолдер през 1901 г. По-обща аксиоматика е предложена в „Обща топология“ на Н. Бурбаки. Тук предлагаме просто доказателство за измерване. То не използва сведения от общата топология, а се основава на елементарни резултати от диференциалното и интегрално смятане.

**1. Измерването на величини в исторически аспект.** Темата за измерване на величини е неотделимо свързана с цялата 2500-годишна история на математиката. Питагор през V век пр.н.е. е първият математик, който предлага цялостна теория за измерване на еднородни величини. Създадената от него теория на отношенията и пропорциите фактически е първата теория на дробите, т.е. на положителните рационални числа. За съжаление, наивната увереност на Питагор, че всеки две еднородни величини са съизмерими, е опровергана от негов ученик, който открива несъизмеримостта на диагонала и страната на квадрата. На първо време питагорейците се опитвали да скрият този факт, който разрушавал красивата им теория. Този първи в историята на математиката контрапример скоро става всеобщо достояние на всички образовани хора в Древна Гърция. Век и половина по-късно Аристотел, който не е бил математик, пише, че онзи, който не знае, че страната и диагоналът на квадрата са несъизмерими, може да бъде оприличен на диво животно. Аристотел очевидно е познавал широко известното и днес доказателство на тази несъизмеримост с помощта на Питагоровата теорема, защото казва, че ако се допусне, че страната и диагоналът на квадрата са съизмерими, ще излезе, че четно число е равно на нечетно число.

Фактически, откриването на несъизмеримостта на диагонала и страната на квадрата маркира началото на първата криза в историята на математиката. Тази криза слага незаличим отпечатък върху цялата древногръцка математика. Математиците търсят изход от тази криза в отказ от използването на числа в геометрията и в разработване на геометрична алгебра, несвързана с проблема за измерването на величини. За преодоляването на възникналата криза е бил нужен повече от един век. Заслугата за това е изцяло на гениалният математик Евдокс от Книда (406–355), който създава първата теория за отношенията на еднородни величини. В интелектуално отношение това е най-високото постижение на древногръцката математика. В цялостен вид до нас теорията на Евдокс е стигнала като пета книга на „Елементи“ на Евклид [1]. Преди Евдокс отношения са въвеждани за различни величини поотделно: за отсечки, лица, обеми. Евдокс подхожда към всички величини по един и същ начин. За това можем да съдим и по списъка на аксиомите, които се съдържат в „Елементи“:

1. Равните на едно и също са равни и помежду си.
2. И ако към равни се прибавят равни, то и целите ще бъдат равни.
3. И ако от равни се отнемат равни, то и остатъците ще бъдат равни.
4. И ако към неравни се прибавят равни, то и целите ще бъдат неравни.

...

8. И цялото е по-голямо от частта.

В този списък липсва т.нар. „аксиома на Архимед“. Но това е само на пръв поглед. Не случайно се казва, че аксиомите са „преоблечени дефиниции“. И наистина, дефиниция 4 от книга V на „Елементи“ гласи:

„Казва се, че величини *имат отношение* помежду си, когато те, взети кратно, могат да се надминат една друга“.

Затова исторически по-оправдано е вместо „аксиома на Архимед“ да се казва „аксиома на Евдокс“ .

Следващата дефиниция 5 на книга V на „Елементи“ гласи:

„Казва се, че величини *се намират в едно и също отношение:* първата към втората и третата към четвъртата, когато равнократни на първата и третата са едновременно по-големи или едновременно равни, или едновременно по-малки от равнократни на втората и четвъртата, всяка на всяка, при каквито и да е кратности, ако се вземат в съответен ред.“

С други думи, според Евдокс величините $a$ и $b$ имат същото отношение, както $c$ и $d$, когато за всеки цели числа $m$ и $n$ е изпълнено: 1) или $ma > nb$ и $mc > nd$, 2) или $ma = nb$ и $mc = nd$, 3) или $ma < nb$ и $mc < nd$.

Още по-ясно това може да се изкаже като дефиниция на релация еквивалентност $(a, b) \sim (c, d)$. И наистина, по-нататък се доказва напълно строго от съвременна гледна точка, че въведената с дефиниция 5 релация в множеството от наредените двойки от стойности на разглежданата величина притежава характерните свойства на една релация еквивалентност: рефлексивност, симетричност и транзитивност. Класовете на еквивалентността са отношенията. По-нататък се въвежда действието умножение на отношения. Фактически това е първият в историята пример на група.

Отношенията на Евдокс са заместител на липсващата теория на реалните числа. Дори през XVII век Нютон под „число“ разбира „отношение“ в смисъл на Евдокс.

Теорията на Евдокс е твърде близка до теорията на реалните числа, предложена през 1872 г. от Рихард Дедекинд (1831–1916). Наистина на всяко отношение в смисъл на Евдокс може да се съпостави сечение в множеството на рационалните числа в смисъл на Дедекинд. И все пак от съвременно гледище теорията на положителните реални числа, предложена от Евдокс, е непълноценна поради липсата на принцип за непрекъснатост. Дедекинд формулира този принцип с изискването всяко ограничено множество от реални числа да има супремум и инфимум, т.е. точна горна и точна долна граница. Теорията на Евдокс би била пълноценна, ако принципът за непрекъснатост за разглежданата величина се формулира като аксиома. Лесно се показва, че аксиомата на Евдокс е следствие от аксиомата за непрекъснатост. От основната теорема, която ще докажем във втората част, ще стане ясно какво може да се докаже само с помощта на аксиомата на Евдокс без използване на аксиомата за непрекъснатост. Фактически математиците са се заблуждавали, че с отношенията на Евдокс могат да се измерват всякакви величини в течение на повече от 2300 години! Дали тази сляпа вяра, която е изповядвал и великият Нютон е с нещо по-добра от сляпата вяра на Питагор, че всеки две величини са съизмерими? Справедливостта налага да признаем, че съвсем близо до преодоляването на ограничеността на теорията на Евдокс са били арабските математици и особено знаменитият поет и математик Омар Хаям (1048–1131). В съчинението си „Коментарии към трудностите в уводите на книгата на Евклид“ той нарича дефиницията за пропорция в книга V на „Елементи“ правилна, но не и „истинска“. Хаям използва алгоритъма на Евклид за деление, който при несъизмерими величини продължава безкрайно и представя отношенията $\dfrac{A}{B}$ и $\dfrac{C}{D}$ като безкрайни верижни дроби:

$$\frac{A}{B} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}; \qquad \frac{C}{D} = q_0' + \cfrac{1}{q_1' + \cfrac{1}{q_2' + \ddots}}.$$

Дефиницията за равенство на отношенията на Омар Хаям гласи:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff q_n = q_n', \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

По-нататък той въвежда понятието абстрактна делима единица и като разглежда отношението на $A$ към $B$, пише: „да изберем единица и да направим отношението ѝ към величината $C$, както на $A$ към $B$. Ще гледаме на величината $C$ не като на линия, повърхнина, тяло или време, а като на величина, абстрахирана от разума от всичко това и принадлежаща към числата, но не към абсолютните или истинските числа, тъй като отношението на $A$ към $B$ може и да не е число.“ Под „абсолютни и истински числа“ Хаям разбира естествените числа. Оттук има само една крачка до разширението на понятието число до реалните числа, но тази крачка е направена едва през XIX век.

През 1899 г. излиза епохалната книга на Д. Хилберт „Основи на геометрията“ [2], в която на съвременна основа се изгражда теорията на пропорциите и смятането с пропорции. За пръв път се показва възможността за развиване на неархимедова геометрия.

През 1901 г. немският математик Ото Хьолдер [3] очевидно под влияние на съчинението на Хилберт успява да аксиоматизира измерването на архимедови величини. За съжаление не ни е достъпна оригиналната публикация на Хьолдер, но добра представа за нея може да се получи от книгата му „Математическият метод“ [4] и от книгата на Г. Биркгоф „Теория на решетките“ [5]. Бащата на Гарет Биркгоф – Дж. Биркгоф (1884–1944) също има отношение към нашата тема. В началото на XX век той предлага система за преподаване на геометрията в средните училища, в която темата за измерване на отсечки да се замени с аксиома, че на всяка отсечка отговаря определено реално число и обратно. Това е истинско благодеяние за човечеството, тъй като тази система е възприета в почти всички страни на света.

Независимо от това обаче темата за измерване на величини е важна и в научен, и в образователен аспект.

**2. Съвременен подход към измерването на архимедови величини.** Не е преувеличение да се каже, че за студентите по математика темата за измерване на величини е най-скучната. Традиционните изложения са твърде обемисти и многословни (вж. например [6]) и рядко предлагат пълни доказателства на основните твърдения. Изложения с пълни доказателства могат да се намерят в [7], [8] и [9]. В първите две съчинения се използват съществено понятия от общата топология: в [7] – филтри на Коши, а в [8] – теоремата на Тихонов. В [9] изложението не е достатъчно общо. Тук ще предложим изложение на темата за измерване на величини близо до това на Н. Бурбаки [7], използващо само средствата на класическия анализ.

За яснота ще започнем от задачата за измерване на елементарно-геометричните ъгли. При тези ъгли е дефинирана бинарната операция събиране. Да означим с $E$ множеството на всички елементарно-геометрични ъгли. Сборът $\alpha+\beta$ е дефиниран не за всички елементи на $E$. Ако с $I$ означим подмножеството на острите ъгли заедно с нулевия ъгъл $\omega$ и правия ъгъл $\delta$, сборът $\alpha+\beta$ е дефиниран за всеки $\alpha,\beta\in E$, но не винаги $\alpha+\beta\in I$. Сигурно е обаче, че $\alpha+\beta\in E$. В множеството $E$ има линейна наредба $<$, съгласувана с операцията събиране. Това означава, че ако $\alpha<\beta$ и $\gamma$ е ъгъл, за който съществуват сборовете $\alpha+\gamma$ и $\beta+\gamma$, то е изпълнено неравенството $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$. Лесно се доказва, че ъглите изпълняват аксиомата за непрекъснатост на Дедекинд, която може да се формулата така: Всяка растяща редица $\alpha_2<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\cdots$, която е ограничена отгоре, притежава точна горна граница $\alpha=\sup\{\alpha_n\}$. Разбира се, всяка редица от ъгли е ограничена отгоре, но при произволни величини ограничеността трябва да се предположи изрично.

Пита се дали тези свойства на елементарно-геометричните ъгли са достатъчни да се твърди, че за всеки даден ъгъл $\alpha$ съществува монотонно растяща функция $f: I\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, за която $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(\omega)=0$ и $f(\alpha)=1$. А може ли да се твърди, че $f(I)$ е интервал? Положителен отговор на тези въпроси дава следващата теорема.

Нека $E$ е линейно наредено множество с наредба $<$ и минимален елемент $\omega$, а $I$ е негово подмножество, за което $\omega\in I$. Предполагаме, че ако $x\in I$ и $y\leq x$, то $y\in I$. Предполагаме, че в $I$ е дефинирана бинарна операция $(x,y)\to xy$, като $xy$ принадлежи на $E$, но не винаги на $I$. Предпочитаме мултипликативното означение $xy$ пред адитивното $x+y$, тъй като априори не предполагаме комутативност на бинарната операция.

**Дефиниция.** *Система от архимедови величини се нарича всяко множество $E$ с отделено в него подмножество $I$, с линейна наредба $<$, минимален елементи $\omega$ и бинарна операция $I\times I\to E$, т.е. система $(E, I\subset E, <, +)$, за която са изпълнени следните четири аксиоми:*

*$A_1$: минималният елемент $\omega$ на $E$ е неутрален елемент на операцията $xy$, т.е. $\omega x=x\omega=x$ за всяко $x\in I$. Операцията е асоциативна в следния смисъл: ако $x,y,z\in I$, $xy\in I$ и $yz\in I$, то е изпълнено равенството $(xy)z=x(yz)$.*

*$A_2$: Наредбата между елементите на $I$ е съгласувана с операцията $xy$ в $I$, т.е. от $x<y$ следва $xz<yz$ и $zx<zy$ за всяко $z\in I$.*

*$A_3$: Множеството $I\setminus\{\omega\}$ е непразно и няма минимален елемент. За всеки $x,y\in I$, за които $x<y$ съществува $z>\omega$, за което $xz\leq y$.*

*$A_4$: За всеки $x, y \in I$, за които $x < y$ и $x > \omega$ съществува цяло положително число $n$, за което $x^n$ е дефинирано и $x^n > y$.*

$\mathrm{A}_4$ изразява аксиомата на Архимед (Евдокс) в мултипликативни означения.

Да се „измерят" елементите на дадена архимедова система с дадена мерна единица $a < \omega$ означава да се намери изоморфизъм $f : I \to I' \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ от $I$ към подмножество на неотрицателните реални числа $\mathbb{R}_{\geq 0}$, при които на наредбата в $I$ отговаря естествената наредба в $\mathbb{R}$, а на операцията $xy$ – събирането в $\mathbb{R}$.

**Теорема за измерване на архимедови величини.** *За всяка линейно наредена система $(E, I \subset E, <, \cdot, \omega)$ от архимедови величини с минимален елемент $\omega$ и за всяко $a \in I$, $a > \omega$ съществува строго растящо изображение $f : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, за което*

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

*и*

$$f(a) = 1. \tag{2}$$

*Образът $f(I)$ е навсякъде гъст във всеки затворен интервал от вида $[0, f(b)] \subset \mathbb{R}$ за всяко $b \in I$.*

Преди да пристъпим към доказване на теоремата да уточним какво ще разбираме под степен $x^n$ за $x \in I$ и $n \geq 0$. Това се налага, тъй като не предполагаме априори комутативност на операцията $xy$ в $I$. Използваме индуктивната дефиниция $x^0 = \omega$ и $x^{n+1} = (x^n)x$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Лесно се доказват тъждествата

$$x^{m+n} = x^m.x^n \quad \text{и} \quad (x^m)^n = x^{mn} \tag{3}$$

при условие, че съществува единият от изразите в съответното равенство.

**Дефиниция.** *За произволни $x, y \in I$, където $y > \omega$, с $(x : y)$ се означава най-голямото измежду целите числа $n \geq 0$, за които $y^n \leq x$, т.е.*

$$(x : y) = \max\{n : n \in \mathbb{N}_0,\ y^n \leq x\}. \tag{4}$$

Ако $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$, а операцията $xy$ е обикновеното умножение, то $(x : y)$ не е нищо друго, освен цялата част на частното $\dfrac{x}{y}$, т.е. $(x : y) = \left[\dfrac{x}{y}\right]$. Като имаме предвид тази аналогия с понятието цяла част, лесно се доказват неравенствата:

$$(x : z) + (y : z) \leq (xy : z) \leq (x : z) + (y : z) + 1 \tag{5}$$

за всеки $x, y, z \in I$, за които $xy \in I$ и за всяко $z > \omega$;

$$(x : y)(y : z) \leq (x : z), \tag{6}$$

и

$$((x : y) + 1)((y : z) + 1) \geq (x : z) + 1 \tag{7}$$

за всеки $x, y, z \in I$, за които $y > \omega$ и $z > \omega$.

**Доказателство на теоремата.** Интуитивно е ясно, че цялото число $(x : a)$ е груба „мярка" на величината $x$ с мерната единица $a$. Ако изберем една по-малка мерна единица $z$, и „измерим“ $x$ и $a$ с $z$, отношението

$$\frac{(x:z)}{(a:z)}$$

би трябвало да е още по-близо до „истинската мярка“ на $x$ с мерната единица $a$. Можем да очакваме, че ако изберем редица от стойности $z_n$, която „клони“ към минималния елемент $\omega$, редицата от рационални числа $(x:z_n)/(a:z_n)$ би трябвало да е сходяща. Остава да означим границата ѝ с $f(x)$ и да докажем равенството (1). Равенството (2) ще бъде очевидно вярно (защо?). Остава да изпълним тази интуитивно ясна програма.

**Лема.** *За всяко $x \in I$, $x > \omega$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува $z \in I$, $z > \omega$, за което $z^{2^n} \leq x$.*

**Доказателство.** Тъй като според аксиома $A_3$ множеството $I \setminus \{\omega\}$ няма минимален елемент, съществува $y$, за което $y < x$. Пак от същата аксиома следва, че съществува $u > \omega$, за което $uy \leq x$. Ако с $v$ означим по-малкото от $u$ и $y$, т.е. $v = \min(u, y)$, то от неравенствата $v \leq u$ и $v \leq y$ и от аксиома $A_2$ следва, че $v^2 \leq uy \leq x$, т.е. $v^2 \leq x$. По същия начин, за $v$ може да се намери $w > \omega$, за което $w^2 \leq v$. Като извършим това $n$ пъти, ще получим $z > \omega$, за което $z^{2^n} \leq x$.

Неравенството $z^{2^n} \leq x$ е равносилно на неравенството

$$(x:z) \geq 2^n. \tag{7}$$

**Следствие.** *За всяко $\varepsilon > 0$ и за всяко $x \in I$, $x > \omega$ може да се намери $z > \omega$, за което $(x:z) > \dfrac{1}{\varepsilon}$.*

Наистина, ако изберем $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, от (7) получаваме $(x:z) \geq 2^n > n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

**Доказателство на теоремата.** Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано положително число, а $x \in I$, $x > \omega$ е произволен елемент на $I \setminus \{\omega\}$. Според горната лема, може да се намери такова $t \in I$, $t > \omega$, че да са изпълнени едновременно и двете неравенства $(x:t) \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$ и $(a:t) \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$. Както и да изберем $z \in I$, $z > \omega$, от неравенствата (6) и (7) следва веригата неравенства

$$\frac{(x:t)}{[(a:t)+1]} \cdot \frac{(t:z)}{[(t:z)+1]} \leq \frac{(x:z)}{a:z)} \leq \frac{(x:t)+1}{a:t)} \cdot \frac{(t:z)+1}{(t:z)}$$

Ако изберем $z$ така, че $(t:z) \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, от последните неравенства по очевиден начин следват неравенствата

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \cdot \frac{(x:t)}{(a:t)} \leq \frac{(x:z)}{(a:z)} \leq (1+\varepsilon)^2 \frac{(x:t)}{(a:t)}.$$

По-нататък избираме редица $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ по следния начин. Нека $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^{2^n}}$, $n = 1, 2, \ldots$. При $\varepsilon = \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ приемаме, че $z_0 = t$, а съответното $z$ – за $z_1$, т.е. $z = z_1$. Ако $\varepsilon = \varepsilon_n$, означаваме $t = z_n$ и $z = z_{n+1}$. Тогава за редицата

$$f_n(x) = \frac{(x:z_n)}{(a:z_n)}$$

е изпълнена веригата неравенства

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_n)^2} f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le (1+\varepsilon_n)^2 f_n(x). \tag{8}$$

За да докажем съществуването на границата $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, е достатъчно да докажем сходимостта на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty}[f_{n+1}(x) - f_n(x)],$$

тъй като неговата $n$-та частична сума е равна на $f_n(x) - f_0(x)$.

От (8) получаваме

$$-\left[1 - \frac{1}{(1+\varepsilon_n)^2}\right] f_n(x) \le f_{n+1}(x) - f_n(x) \le \left[(1+\varepsilon_n)^2 - 1\right] f_n(x). \tag{9}$$

Следователно

$$|f_{n+1} - f_n(x)| \le \max\left[(1+\varepsilon_n)^2 - 1, 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon_n)^2}\right] f_n(x).$$

Елементарна задача е да намерим кое от двете числа $(1+\varepsilon_n)^2 - 1$ и $1 - \dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)^2}$ е по-голямото. За целта предлагаме на читателя сам да докаже неравенството

$$1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \le (1+\varepsilon)^2 - 1 \text{ при } \varepsilon > 0.$$

Следователно

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le (2\varepsilon_n + \varepsilon_n^2) f_n(x).$$

Остава да покажем, че редицата $\{f_n(x)\}$ е ограничена. Наистина от неравенствата (7) следва $(x : z_n) < [(x : a) + 1][(a : z_n) + 1]$, откъдето $f_n(x) < [(x : a) + 1]\left(1 + \dfrac{1}{(a : z_n)}\right) \le 2[(x : a) + 1]$ и следователно редицата $(f_n(x))$ е ограничена от числото $A(x) \overset{\text{def}}{=} 2[(x : a) + 1]$.

Редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[f_{n+1} - f_n(x)]$ е сигурно сходящ, тъй като общият му член не надминава общия член на сходящия ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2\varepsilon_n + \varepsilon_n^2)A(x)$.

Да означим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Неравенството (5) с $z = z_n$ дава

$$(x : z_n) + (y : z_n) \le (xy : z_n) \le (x : z_n) + (y : z_n) + 1.$$

Като го разделим с $(a : z_n)$, получаваме

$$f_n(x) + f_n(y) \le f_n(xy) \le f_n(x) + f_n(y) + \frac{1}{(a : z_n)}.$$

Оттук при $n \to \infty$ получаваме $f(x) + f(y) \le f(xy) \le f(x) + f(y)$, тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(a : z_n)} = 0$ (защо?). Следователно

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

т.е. изпълнено е равенството (1).

Фактически, ние доказахме съществуването на границата $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(x : z_n)}{(a : z_n)}$ при произволни $x$ и $a$ от $I$, които са $> \omega$. Следователно, съществува и границата $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(a : z_n)}{(x : z_n)}$. Това е възможно само когато $f(x) > 0$ за всяко $x > \omega$.

Оттук следва, че изображението $f : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ е строго монотонно. Наистина, нека $x < y$. Тогава, от аксиома $A_3$ следва съществуването на елемент $u$, $u > \omega$, за който $xu \leq y$. Тъй като очевидно $f$ е нестрого монотонно, то $f(xu) \leq f(y)$, откъдето $f(x) + f(u) \leq f(y)$. Но $f(u) > 0$ и следователно $f(x) < f(y)$.

**Следствие.** *Операцията $xy$ в $I$ е комутативна.*

Наистина, от $f(x) = f(x) + f(y)$ и $f(yx) = f(y) + f(x)$ следва $f(xy) = f(yx)$. Но изображението $f$ е строго растящо и следователно $xy = yx$. Този факт отбелязва още авторът на първата аксиоматика на архимедовите величини О. Хьолдер [4], стр. 78.

Гъстотата на образа $f(I)$ във всеки интервал $[0, f(b)]$ се доказва елементарно вж. [7], стр. 249.

Лесно е да се покаже с пример, че аксиомите $A_1$–$A_4$ не могат да осигурят образът $f(I)$ да е интервал от $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Това може да стане с лека модификация на аксиома $A_3$ и замяна на $A_4$ с принципа за непрекъснатост на Дедекинд. В $A_3$ е достатъчно само да изискаме за $x < y$ да съществува $z > \omega$, за което $xz = y$.

**3. Приложения на теоремата за измерване на архимедови величини.**

**А. Измерване на ъгли.** Като се използва теоремата във варианта ѝ с принципа за непрекъснатост вместо аксиомата на Архимед $A_4$, не е нужно да се доказва съществуването на мярка на всеки елементарно-геометричен ъгъл при дадена мерна единица.

**Б. Съществуване и свойства на логаритмичната функция.** Разглеждаме множеството $\mathbb{R}_{\geq 1}$ на реалните числа, които са $\geq 1$. Ако вземем $E = I = \mathbb{R}_{\geq 1}$, $\omega = 1$, естествената наредба в $\mathbb{R}_{\geq 1}$ и операцията умножение, вижда се, че всичките аксиоми за архимедови величини в уточнения вариант с принципа за непрекъснатост са изпълнени. Следователно съществува единствено изображение $f : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, което при дадено $a > 1$ има свойствата $f(a) = 1$ и $f(xy) = f(x) + f(y)$. Това именно $f(x) = \log_a x$. По-нататък функцията $\log_a x$ се дефинира и за $0 < x < 1$ с равенството $\log_a x = -\log_a \left(\dfrac{1}{x}\right)$. Няма проблем да се дефинира $\log_a x$ при $0 < a < 1$, като $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$.

**В. Топологична характеризация на адитивната група на реалните числа и на едномерния тор.** С помощта на теоремата за измерване на архимедови величини, се доказва, че свързаните топологични групи, в които съществува околност на неутралния елемент са хомеоморфни на отворени интервали на реалната права.

В заключение заслужава да подчертаем, че скучната на пръв поглед тема за измерването на величини има достатъчно богато математическо съдържание. Като в капка вода, в нея се отразява цялото 2500-годишно развитие на математиката. Убедени сме, че тя заслужава по-достойно място в обучението по математика. Не е без значение и фактът, че тя е ключ към много от приложенията на математиката. Наистина, различията между измерванията на величини във физиката и в математиката са принципни. Принос към изясняването на тези различия е кристално ясното разбиране за математическия смисъл на измерването на архимедови величини, което предлага разгледаната теорема. Дали тя ще намери или няма да намери приложения във физиката зависи от математическия модел на съответното явление, който се използва във физиката. Докато физическият смисъл на математическото „измерване“ на величини е дискусионен, образователният смисъл е безспорен. Осъзнаването на математическия смисъл на измерването на геометрични и други величини несъмнено трябва да е част от общата математическа култура на учителя. Не бива да се забравят думите на Аристотел за онези, които не знаят, че диагоналът на квадрата е несъизмерим със страната му.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Евклид. Елементи, т. 1 (книги 1–6). Наука и изкуство, С., 1972.

[2] Д. Хилберт. Основи на геометрията. Наука и изкуство, С., 1978.

[3] O. Hölder. Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Berichte der Sächs. Ges. Wiss.*, Leipzig, Meth. Phys. Kl., **53** (1901), 1–64.

[4] O. Hölder. Die Mathematische Methode. Springer, Berlin, 1924.

[5] Г. Биркгоф. Теория решеток. Наука, Москва, 1984.

[6] Я. С. Дубнов. Измерение отрезков. Гос. изд. физ. мат. лит., Москва, 1962.

[7] Н. Бурбаки. Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними гуппы и пространства. Наука, Москва, 1969.

[8] В. А. Любецкий. Основные понятия школьной математики. Просвещение, Москва, 1989.

[9] Ж. Лелон-Ферран. Основания геометрии. Мир, Москва, 1989.



Иван Димовски
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
акад. Г. Бончев, бл. 8
1113 София


## MEASURMENT OF ARCHIMEDIAN QUANTITIES


**I. H. Dimovski**



Tha talk is intended for teachers in mathematics. A survey of the historical development of the item of measurement from amthematical point of view is made. It culminates in the axiomatic characterization of the notion of quantity by O. Hölder in 1901. More general axiomatics is proposed in N. Bourbaki's "General Topology". Heree a simple proof of the basik theorem for the measurement of Archimedian quantities is proposed. It did not use any general topological considerations, but only elementary facts from the calculs.