

ЗА ИЗБОРА НА НАЧАЛНА КОНТАКТНА ТОЧКА ПРИ АНАЛИЗ НА КОНТАКТА В ЗЪБНИ ЗАЦЕПВАНИЯ

Веселин Златилов

Формулираната от Ф. Литвин [1] задача за анализ на контакта (обратна задача) е ефективен математически инструмент в теорията на зъбните зацепвания. Тя открива пътя за компютърна симулация и изследване на предаването на движението с помощта на две повърхнини, образуващи висша кинематична двойца. От съществено значение за симулацията и свързаните с нея изследвания е изборът на началната контактна точка. Оказва се, че посочените от Ф. Литвин необходими условия за съществуване на контактна точка не са достатъчни. В [2] и [3] бе посочен контрапример, показващ необходимостта от допълване на началните условия в задачата за анализ на контакта. В настоящата работа се търсят допълнителни условия към традиционната постановка на задачата, позволяващи подходящ избор на началната контактна точка и изключващи възможността за първоначална интерференция на зъбните тела.

1. Необходими условия за гладко допиране на две повърхнини в контактна точка. Разглеждаме пространствено тризвено зъбно зацепване [4]. Зъбната повърхнина Σ_i и координатната система S_i (в която се описва Σ_i) са неподвижно свързани със звеното i ($i = 1, 2$), а координатната система S_0 – със стойката.

Необходимите условия за гладкото допиране на зъбните повърхнини Σ_1 и Σ_2 се описват аналитично с уравненията [1], [5]:

$$(1) \quad \vec{r}^{(1)}(u_1, \theta_1, \varphi_1) = \vec{r}^{(2)}(u_2, \theta_2, \varphi_2),$$

$$(2) \quad \vec{e}^{(1)}(u_1, \theta_1, \varphi_1) = \vec{e}^{(2)}(u_2, \theta_2, \varphi_2),$$

където радиус-векторът $\vec{r}^{(i)}$ описва повърхнината Σ_i в S_0 ; $\vec{e}^{(i)}$ е единичния нормален вектор към Σ_i , записан в S_0 ; u_i, θ_i са криволинейните координати на Σ_i ; φ_i е ъгълът на завъртане на S_i спрямо S_0 .

Уравнение (1) осигурява съществуването на обща (контактна) точка M за повърхнините Σ_1 и Σ_2 , а уравнение (2) – гладкото им допиране (т.е. съществуването на обща за Σ_1 и Σ_2 допирателна равнина в точката M).

С добавянето на уравнение [1]

$$(3) \quad \vec{e}^{(i)} \cdot \vec{V}^{(12)} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

се гарантира, че векторът $\vec{V}^{(12)} = \vec{V}_e^{(1)} - \vec{V}_e^{(2)}$ (т.е. векторът на относителната скорост между точките от повърхнините Σ_1 и Σ_2 , съвместени в контактната точка M) е разположен в общата допирателна равнина.

2. Класическо условие за непресичане на две повърхнини в околност на зададена контактна точка. При решаване на контактната задача на Херц [6], [7], [8] възниква въпросът за определяне на условия, при които зъбните повърхнини в околност на контактната точка да не се пресичат. Класическото решение на този проблем е изложено в [1].

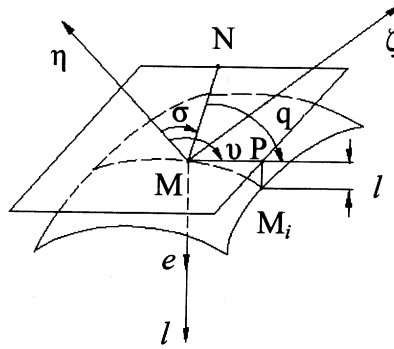
Нека върху гладката повърхнина Σ_i с уравнение

$$(4) \quad \vec{r}^{(i)} = \vec{r}^{(i)}(u_i, \theta_i)$$

е избрана крива MM_i с уравнение

$$(5) \quad \vec{r}_i^{(i)} = \vec{r}_i^{(i)}(u_i(s), \theta_i(s)),$$

където радиус-векторът $\vec{r}_i^{(i)}$ описва Σ_i в S_i , а s е естественият параметър на кривата – дължината на дъга от нея (с начало точката M).



Фиг. 1

Нека дължината на дъгата MM_i е Δs (Фиг. 1). Разлагаме в ред на Тейлор [9]

$$(6) \quad \overrightarrow{MM_i} = \frac{d\vec{r}_i^{(i)}}{ds} \Delta s + \frac{d^2\vec{r}_i^{(i)}}{ds^2} \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \frac{d^3\vec{r}_i^{(i)}}{ds^3} \frac{(\Delta s)^3}{3!} + \dots,$$

$$\text{където } \frac{d\vec{r}_i^{(i)}}{ds} = \frac{\partial \vec{r}_i^{(i)}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{ds} + \frac{\partial \vec{r}_i^{(i)}}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \theta_i}{ds},$$

$$\frac{d^2\vec{r}_i^{(i)}}{ds^2} = \frac{\partial^2\vec{r}_i^{(i)}}{\partial u_i^2} \left(\frac{du_i}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2\vec{r}_i^{(i)}}{\partial u_i \partial \theta_i} \frac{du_i}{ds} \frac{d\theta_i}{ds} + \frac{\partial^2\vec{r}_i^{(i)}}{\partial \theta_i^2} \left(\frac{d\theta_i}{ds} \right)^2 \quad \text{и т.н.}$$

Построяваме в точка M допирателната равнина Π към Σ_i и спускаме от точка M_i перпендикуляр M_iP към Π ($P \in \Pi$). Векторът $\overrightarrow{PM_i}$ е колинеарен с единичния нормален вектор $\vec{e}_i^{(i)}$ към Σ_i в точката M и описва отклонението на точката M_i от допирателната равнина Π . Нека $\overrightarrow{PM_i} = l_i \vec{e}_i^{(i)}$. Тъй като $\overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM_i}$ то

$$(7) \quad \overrightarrow{MP} + l_i \vec{e}_i^{(i)} = \frac{d\vec{r}_i^{(i)}}{ds} \Delta s + \frac{d^2\vec{r}_i^{(i)}}{ds^2} \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \frac{d^3\vec{r}_i^{(i)}}{ds^3} \frac{(\Delta s)^3}{3!} + \dots$$

Умножавайки скалярно (7) с $\vec{e}_i^{(i)}$ и отчитайки, че $\vec{e}_i^{(i)} \perp \overrightarrow{MP}$ и $\vec{e}_i^{(i)} \perp \frac{d\vec{r}_i^{(i)}}{ds}$, получаваме

$$(8) \quad l_i = \frac{d^2\vec{r}_i^{(i)}}{ds^2} \vec{e}_i^{(i)} \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \frac{d^3\vec{r}_i^{(i)}}{ds^3} \vec{e}_i^{(i)} \frac{(\Delta s)^3}{3!} + \dots$$

Нека свържем с точка M дясна правоъгълна координатна система с оси η и ζ , разположени в Π и ос l , насочена по нормалата към Σ_i . В околност на M всяка точка от Σ_i може да се определи чрез η , ζ и l или чрез цилиндричните координати ν , $\rho = MP$, l .

Известно е [9], че за нормалната кривина κ на повърхнината Σ_i в сечението ѝ с равнината, определена от $\vec{e}_i^{(i)}$ и $\overrightarrow{MM_i}$ е в сила формулата на Френе

$$(9) \quad \frac{d^2 \vec{r}_i^{(i)}}{ds^2} \vec{e}_i^{(i)} = \kappa_i.$$

Тогава с точност до втори ред от (8) получаваме

$$(10) \quad l_i = \frac{1}{2} \kappa_i (\Delta s)^2 = \frac{1}{2} \kappa_i (\eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{2} \kappa_i \rho^2,$$

където $\rho = MP$, а η и ζ са координатите на точката P .

Според формулата на Ойлер [1], свързваща главните кривини и нормалната кривина в дадено нормално сечение (през $\overrightarrow{MM_1}$) на Σ_i

$$(11) \quad \kappa_i = \kappa_I^{(i)} \cos^2 q + \kappa_{II}^{(i)} \sin^2 q,$$

където $\kappa_I^{(i)}$ и $\kappa_{II}^{(i)}$ са главните кривини, κ_i – нормалната кривина, $q = \nu - \sigma$ – ъгълът между главното направление с кривина $\kappa_I^{(i)}$ и равнината на нормалното сечение с кривина κ_i .

Нека Σ_1 и Σ_2 се допират в точка M . За да проверим дали в околност на M повърхнините Σ_1 и Σ_2 се пресичат трябва да сравним l_1 и l_2 .

Нека γ_1 и γ_2 са ъглите, определящи направлението на главните кривини $\kappa_I^{(1)}$ и $\kappa_I^{(2)}$ съответно на Σ_1 и Σ_2 в координатната система $(M; \eta; \zeta)$. Да пресечем Σ_1 и Σ_2 с обща равнина, минаваща през точката M и съдържаща общия единичен нормален вектор $\vec{e} = \vec{e}^{(1)} = \vec{e}^{(2)}$. Нека направлението на тази равнина се определя от ъгъл ν . При въведените означения и ако $M_1 M_2 \perp \Pi$ (т.е. $P \in M_1 M_2$):

$$(12) \quad l_1 = \frac{1}{2} \rho^2 \left[\kappa_I^{(1)} \cos^2 (\nu - \gamma_2) + \kappa_{II}^{(1)} \sin^2 (\nu - \gamma_2) \right];$$

$$(13) \quad l_2 = \frac{1}{2} \rho^2 \left[\kappa_I^{(2)} \cos^2 (\nu - \gamma_2) + \kappa_{II}^{(2)} \sin^2 (\nu - \gamma_2) \right]$$

От (10) следва, че

$$(14) \quad M_1 M_2 = \begin{cases} M_1 P + P M_2 = |l_1 - l_2|, & \text{ако } \kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0 \\ |M_1 P - P M_2| = |l_1 - l_2|, & \text{ако } \kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0. \end{cases}$$

От (14) се стига до извода, че ако знакът на разликата $l_1 - l_2$ не се променя при $\rho = \text{const}$ и произволна стойност на ν , то в околност на точката M повърхнините Σ_1 и Σ_2 не се пресичат.

От (10) и (14) се извежда следното „достатъчно“ условие за изключване на интерференция на Σ_1 и Σ_2 в околност на контактната точка M_i :

Интерференцията на повърхнините Σ_1 и Σ_2 в околност на контактната им точка M ще бъде изключена, ако приведената нормална кривина $\kappa_{np} = \kappa_1 + \kappa_2$ не се променя по знак за всички нормални сечения през M (за всички стойности на ν).

3. Контрапример на класическото условие за непресичане на две повърхнини в околност на контактна точка. В [2] бе показан пример, в който повърхнините Σ_1 и Σ_2 се допират със свои равнинни точки. В този случай уравненията

(1) и (2) се удовлетворяват, дори и при начална интерференция на Σ_1 и Σ_2 в околност на точката M . Нещо повече, интерференцията не може да бъде открита с използване на класическото „достатъчно“ условие за непресичане на повърхнините в околност на точката M . Действително, за всяка стойност на κ $\kappa_{np} = \kappa_1 + \kappa_2 = 0 - 0 = 0$ и не се променя по знак.

Доказано бе, че в този случай:

1) Относителната скорост $\vec{V}^{(12)}$ е разположена в общата допирателна равнина към Σ_1 и Σ_2 в точка M и е изпълнено уравнение (3).

2) За равнинните точки на контакт са изпълнени условията

$$(15) \quad \left[\vec{V}_r^{(i)}, \vec{\omega}^{(12)}, \vec{e}^{(i)} \right] \Big|_M = 0 \quad (i = 1, 2),$$

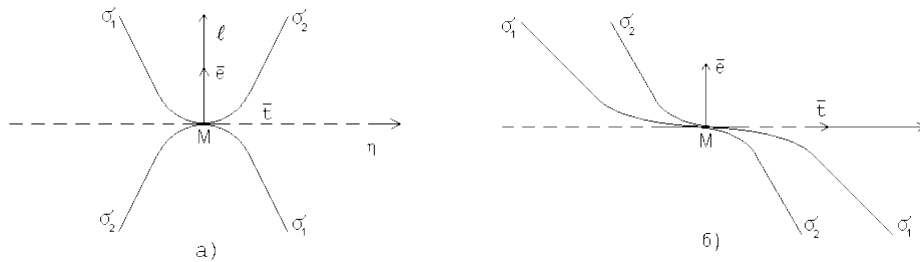
където $\vec{V}_r^{(i)}$ е векторът на скоростта на преместване на контактната точка по повърхнината Σ_i , $\vec{e}^{(i)}$ е единичният нормален вектор към Σ_i в контактната точка, а $\vec{\omega}^{(12)} = \vec{\omega}^{(1)} - \vec{\omega}^{(2)}$ е разликата на ъгловите скорости на Σ_1 и Σ_2 .

3) При неизроден линеен контакт

$$(16) \quad \vec{\omega}^{(12)} \times \vec{e}^{(i)} = \vec{0} \quad (i = 1, 2).$$

От казаното до тук може да се стигне до извода, че класическото достатъчно условие за непресичане на две повърхнини в околност на контактната точка е в сила само в случая, когато поне една от точките, с които повърхнините се допират не е равнинна. В противен случай трябва да се търсят нови достатъчни условия за непресичане.

4. Достатъчно условие за непресичане на зъбните профили в околност на контактната точка при равнинно (плоско) зацепване с инфлексни точки. Разглеждаме равнинно (плоско) зацепване на повърхнините Σ_1 и Σ_2 (т.е. на повърхнини, свързани с две успоредни оси на въртене). Нека M е контактна точка и μ е равнина, минаваща през M и перпендикулярна на осите на въртене. Ако $\sigma_1 = \mu \cap \Sigma_1$ и $\sigma_2 = \mu \cap \Sigma_2$, можем да разглеждаме контакта на кривите σ_1 и σ_2 в контактната точка M . Ако M е инфлексна точка и за двете криви, е възможна интерференция на кривите (фиг. 2)



Фиг. 2

Нека свържем с M правоъгълна координатна система с оси η и l , ориентирани съответно по общата тангента и общата нормала към σ_i ($i = 1, 2$) в контактната точка M .

Нека в околност на точката M кривата σ_i има уравнение

$$(17) \quad l_i = \sigma_i(\eta) \quad (i = 1, 2),$$

където σ_i е диференцируема необходимия брой пъти.

M е инфлексна точка и начало на координатната система. Следователно [10] съществува нечетно число n_i , такова че

$$(18) \quad \sigma_i'(0) = \sigma_i''(0) = \dots = \sigma_i^{(n_i-1)}(0) = 0 \text{ и } \sigma_i^{(n_i)}(0) \neq 0 \quad (i = 1, 2)$$

Нека $n = \min\{n_1, n_2\}$. Очевидно n е нечетно число и

$$\sigma_i'(0) = \sigma_i''(0) = \dots = \sigma_i^{(n-1)}(0) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Прилагайки теоремата на Тейлор [10] получаваме

$$(19) \quad l_i = \sigma_i(\eta) = \sigma_i(0) + \sigma_i'(0) \cdot \eta + \dots + \sigma_i^{(n-1)}(0) \frac{\eta^{n-1}}{(n-1)!} + \sigma_i^{(n)}(\theta_i \eta) \frac{\eta^n}{n!} = \sigma_i^{(n)}(\theta_i \eta) \frac{\eta^n}{n!}$$

$$(0 < \theta_i < 1 \text{ и } i = 1, 2).$$

Очевидно е, че при интерференция на σ_1 и σ_2 изразът $l_1 - l_2$ сменя знака си в околност на „контактната“ точка M . От (19) следва, че

$$(20) \quad l_1 - l_2 = \left(\sigma_1^{(n)}(\theta_1 \eta) - \sigma_2^{(n)}(\theta_2 \eta) \right) \frac{\eta^n}{n!}$$

и тъй като η^n сменя знака си (n – нечетно число), то $\Delta\sigma(\eta) = \sigma_1^{(n)}(\theta_1 \eta) - \sigma_2^{(n)}(\theta_2 \eta)$ не си сменя знака в околност на M .

Обратно, ако в околност на контактната точка M $\Delta\sigma(\eta) = \sigma_1^{(n)}(\theta_1 \eta) - \sigma_2^{(n)}(\theta_2 \eta)$ сменя знака си при промяна знака на η , то $l_1 - l_2$ запазва знака си и следователно σ_1 и σ_2 не се пресичат.

В общия случай $\theta_i = \theta_i(\eta)$ ($i = 1, 2$). Ако $\theta_i(\eta)$ е диференцируема функция, функцията $\Delta\sigma(\eta) = \sigma_1^{(n)}(\theta_1 \eta) - \sigma_2^{(n)}(\theta_2 \eta)$ също е диференцируема и следователно е непрекъсната. Тогава, ако $\Delta\sigma(0) \neq 0$, съществува околност на M , в която $\Delta\sigma(\eta)$ не променя знака си (т.е. σ_1 и σ_2 се пресичат в точка M). Същият резултат получаваме и ако $\Delta\sigma(0) = 0$ е екстремална стойност на $\Delta\sigma(\eta)$. Ако $\Delta\sigma(0) = 0$ и функцията $\Delta\sigma(\eta)$ е монотонна в околност на M , σ_1 и σ_2 не се пресичат в тази околност.

5. Достатъчни условия за непресичане на зъбните профили в околност на контактната точка при пространствено зацепване с равнинни точки. Разглеждаме пространствено зацепване на повърхнините Σ_1 и Σ_2 в контактна точка M , която е равнинна и за двете повърхнини.

Нека Π е общата тангенциална равнина към Σ_1 и Σ_2 в точка M . Свързваме с M дясна правоъгълна координатна система S_M с оси η и ζ в Π и ос l , насочена по нормалата към Π .

Нека в S_M повърхнината Σ_i има уравнение

$$\vec{r}_M^{(i)} = \vec{r}_M^{(i)}(\eta, \zeta), \quad (i = 1, 2).$$

Нека $N_i(\eta^*, \zeta^*)$ е точка от околност на M в повърхнината Σ_i . Очевидно $\vec{e}_M \vec{r}_M^{(i)}|_{N_i}$ (където $\vec{e}_M$ е единичният нормален вектор на Π , а $\vec{r}_M^{(i)}$ е радиус-векторът на N_i в S_M) описва отклонението на точката $N_i \in \Sigma_i$ от тангенциалната равнина Π ($i = 1, 2$).

Да разгледаме неравенствата

$$(21) \quad \vec{e}_M \vec{r}_M^{(1)} - \vec{e}_M \vec{r}_M^{(2)} = \vec{e}_M(\vec{r}_M^{(1)}(\eta, \zeta) - \vec{r}_M^{(2)}(\eta, \zeta)) > 0$$

и

$$(22) \quad \vec{e}_M \vec{r}_M^{(1)} - \vec{e}_M \vec{r}_M^{(2)} = \vec{e}_M(\vec{r}_M^{(1)}(\eta, \zeta) - \vec{r}_M^{(2)}(\eta, \zeta)) < 0.$$

Всяко от тях описва участък на отклонение на Σ_1 от Σ_2 в околност на точката M . При това отклоненията в тези участъци са противоположни едно на друго.

Следователно, ако (21) и (22) имат решения в околност на точка M , то Σ_1 и Σ_2 се пресичат в тази околност. Ако поне едно от неравенствата (21) и (22) няма решение, то Σ_1 и Σ_2 не се пресичат.

Следователно проверката за съществуване на решения на неравенствата (21) и (22) може да ни служи като критерий за потвърждаване или отхвърляне пресичането на повърхнините Σ_1 и Σ_2 в околността на контактната точка M .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ф. Л. Литвин. Теория зубчатых зацеплений. М., Наука, 1968.
- [2] P. PARUSHEV, V. ZLATILOV. On the contact analysis of tooth surfaces meshing. *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, **44**, No 9, 1991.
- [3] P. PARUSHEV, V. STAMOV, V. ZLATILOV, I. WYNCZEK. Computer simulation of a gearing with local contact. Докл. на VI нац. конгрес по ТПМ, Варна-1989, кн. 1, 181–184
- [4] К. Минков, П. Парушев и др. Синтез и анализ трехзвенных механизмов с высшими кинематическими парами. V Нац. конгрес по ТПМ Варна, 23–29.09.1985 г., том 1, 363–372.
- [5] Е. И. Гутман. Новый способ решения обратной задачи. Изв. ВУЗ-ов. Машиностроение, 1978, № 41, 61–65.
- [6] HERTZ. Über die berührung fester elastischer Körper. Gesammelte Werke, Band I, Leipzig, 1895.
- [7] И. Я. Штаерман. Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, 1949.
- [8] А. И. Лурье. Пространственные задачи теории упругости, Гостехиздат, 1955.
- [9] П. К. Рашевский. Дифференциальная геометрия, ГОНТИ, 1939.
- [10] Я. А. Тагамлики. Дифференциално смятане, Наука и изкуство, София, 1978.

Веселин Златилов
Софийска математическа гимназия
ул. Искър 61
1202 София

ON THE CHOICE OF AN INITIAL CONTACT POINT IN THE CONTACT ANALYSIS OF GEARINGS

V. Zlatilov

The contact analysis problem [1], formulated by F. Litvin, is an efficient mathematical instrument used in the theory of gearings. It opens up the way to computer simulation and study of motion transmission by means of two surfaces forming a supreme kinematic couple. The choice of the initial contact point is essential for the simulation and the related studies. The necessary conditions for the existence of a contact point, defined by F. Litvin, proved insufficient. In [2] and [3] a counter-example was shown that proves the necessity of complementing the initial conditions in the contact analysis problem. In this paper additional conditions to the conventional analysis problem setting are sought that will provide for the right choice of the initial contact point and will exclude the possibility of a primary interference of teeth bodies.