МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

ИРАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

Климент Василев Василев, Донка Желева Пашкулева

В настоящата статия се разглеждат някои методи за доказване ирационалността на числата $\sqrt{2}$, $\sqrt{N}$, $\sqrt[n]{N}$ и на някои тригонометрични стойности. Доказателствата са дадени с достъпни за учениците средства.

Има доста различни доказателства, че $\sqrt{2}$ е ирационално. Например [1], [2] и други. Тук ще се спрем на едно доказателство за ирационалността на $\sqrt{2}$, което после ще обобщим и за $\sqrt{N}$ и за $\sqrt[n]{N}$.

Доказателство, че $\sqrt{2}$ е ирационално. Допускаме, че $\sqrt{2}$ е рационално. Тогава $\sqrt{2}$ може да се представи във вида

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \tag{1}$$

където a и b са цели положителни. Да предположим, че b е най-малкото цяло, за което е валидно представянето (1). От факта, че $\sqrt{2}$ е между 1 и 2 и от (1) следва

$$1 < \frac{a}{b} < 2, \quad b < a < 2b, \quad 0 < a - b < b. \tag{2}$$

От (1) получаваме

$$a^2 = 2b^2, \ \ a^2 - ab = 2b^2 - ab, \ \ a(a-b) = b(2b-a), \ \ \sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}. \tag{3}$$

Така изразихме $\sqrt{2}$ по друг начин като частно с положителен знаменател $a - b$, който е по-малък от b , което е противоречие с предположението, че b е най-малкият знаменател в представянето (1). Следователно $\sqrt{2}$ е ирационално.

Ще разширим сега това доказателство и ще докажем, че $\sqrt{N}$ е ирационално, при условие че N не е точен квадрат.

Доказателство, че $\sqrt{N}$ е ирационално, когато N не е точен квадрат и е цяло положително. Понеже $\sqrt{N}$ е между две цели положителни числа, може да запишем

$$t < \sqrt{N} < t + 1.$$

Допускаме, че $\sqrt{N}$ е рационално. Тогава $\sqrt{N} = \dfrac{a}{b}$, където b е цяло положително и най-малкото възможно такова. Тогава

$$t < \frac{a}{b} < t + 1, \quad tb < a < tb + b, \quad 0 < a - tb < b,$$

$$a^2 = Nb^2, \quad a^2 - tab = Nb^2 - tab, \quad a(a - tb) = b(Nb - ta),$$
$$\sqrt{N} = \frac{a}{b} = \frac{Nb - ta}{a - tb}.$$

Следователно $\sqrt{N}$ е изразено по друг начин като частно на две рационални числа с положителен знаменател $a - tb$, по-малък от b, противно на допускането, че b е най- малкото възможно. Следователно $\sqrt{N}$ е ирационално.

За да докажем, че $\sqrt[n]{N}$ е ирационално, ще направим някои предварителни бележки.

Нека α е рационално число и нека $\alpha = \dfrac{a}{b}$ е представянето на α като частно на две цели числа с минимално цяло положително b в знаменател. Тогава b е най-малкото цяло положително, такова че $b\alpha$ е цяло. За да обобщим доказателствата за $\sqrt[n]{N}$, ще използваме теоремата за деление: Нека a и b са цели положителни. Тогава съществуват цели q и r, такива че

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

Лема 1. *Нека α е рационално и нека b е най-малкото цяло положително, такова че $b\alpha$ е цяло, означаваме $b\alpha = a$. За кое да е неотрицателно m, ако s е най-малкото положително цяло, такова че $sa^m\alpha$ е цяло, то $s = b$.*

Доказателство. Ще използваме индукция спрямо m. Отбелязваме, че е вярно за $m = 0$. Допускаме, че b е най-малкото цяло положително, такова че $ba^m\alpha$ е цяло и че s е най-малкото цяло положително, такова че $sa^{m+1}\alpha$ е цяло и ще докажем, че $s = b$.

Отбелязваме, че $s \leq b$, тъй като $ba^{m+1}\alpha$ е цяло.

Прилагайки теоремата за деление към sa^{m+1} и b, то съществуват цели q r, такива че

$$sa^{m+1} = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

Тогава

$$r\alpha = \left(sa^{m+1} - bq\right)\alpha = sa^{m+1}\alpha - aq. \tag{4}$$

Така $r\alpha$ е цяло и $r = 0$ от минималното свойство на b. Следователно (4) се свежда до

$$0 = sa^{m+1}\alpha - aq, \qquad sa^m\alpha = q,$$

т.е. $s \geq b$ от индукционното допускане и следователно $s = b$.

Теорема 1. *Нека n и N са цели положителни и по-големи от 1, такива че $\sqrt[n]{N}$ не е цяло. Тогава $\sqrt[n]{N}$ е ирационално.*

Доказателство. Нека

$$t < \sqrt[n]{N} < t + 1. \tag{5}$$

Допускаме, че $\sqrt[n]{N}$ е рационално и нека b е най-малкото цяло положително, такова че $b\sqrt[n]{N}$ е цяло, означаваме $b\sqrt[n]{N} = a$.

Тогава от (5) получаваме

$$t < \frac{a}{b} < t + 1, \qquad tb < a < tb + b, \quad 0 < a - tb < b. \tag{6}$$

Означаваме $\alpha = \sqrt[n]{N}$ и забелязваме, че

$$(a - tb)a^{n-2}\alpha = a^{n-1}\alpha - ta^{n-2}b\alpha = b^{n-1}N - ta^{n-1}$$

е цяло. Но в предвид на последната част на (6), това противоречи на Лема 1, където $m = n - 2$.

Следователно $\sqrt[n]{N}$ е ирационално.

Сега ще се спрем на ирационалността на някои тригонометрични стойности.

Теорема 2. *Ако θ е рационално в градуси, тогава:*

а) $\cos\theta = 0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm 1$ *или е ирационално;*

б) $\sin\theta = 0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm 1$ *или е ирационално;*

в) $\operatorname{tg}\theta = 0,\ \pm 1$, *е неопределено или е ирационално.*

Това е теорема на Niven [3]. Тук ще посочим едно елементарно доказателство.

Най-напред ще докажем следната лема.

Лема 2. *Ако съществува цяло положително n, такова че $\cos n\theta$ е цяло, тогава $\cos\theta = 0,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm 1$ или е ирационално*

Доказателство. От тъждеството

$$2\cos(n+1)\theta = (2\cos\theta)\cdot 2\cos n\theta - 2\cos(n-1)\theta$$

следва по индукция спрямо n, че съществува полином с коефициент 1 пред най-високата степен с цели коефициенти, такъв че $2\cos n\theta = f(2\cos\theta)$. Така, ако $\cos n\theta$ е цяло, $2\cos\theta$ е корен на полином с коефициент 1 пред най-високата степен $f(x) - 2\cos n\theta$. Следователно $2\cos\theta$ е цяло или ирационално. Тъй като $|2\cos\theta| \leq 2$, лемата е доказана.

Доказателство на Теорема 2. Ако θ е рационално в градуси, тогава за подходящи цели числа a и $b > 0$ имаме $\theta = \pi\dfrac{a}{b}$ в радиани. Тогава $\cos n\theta$, $\cos n\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ и $\cos n(2\theta)$ са цели за $n = b$. Сега а) следва директно от Лема 2.2, а б) и в) следват от Лема 2.2 и тъждествата $\sin\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ и $\operatorname{tg}^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$. Последното тъждество означава, че ако $\operatorname{tg}\theta$ е рационално, то и $\cos 2\theta$ е рационално.

REFERENCES

[1] E. Halfar. The Irrationality of $\sqrt{2}$. *Amer. Math. Monthly*, **62** (1955), 435–437.

[2] R. Gauntt, G. Rabson. The Irrationality of $\sqrt{2}$. *Amer. Math. Monthly*, **63** (1956), 245–247.

[3] I. Niven. Irrational Numbers. *Carus Math. Mon.*, **11** (1956), 40–41.

Донка Желева Пашкулева, Климент Василев Василев
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул.„Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София

IRRATIONAL NUMBERS

Kliment Vasilev Vasilev, Donka Zheleva Pashkouleva

Some methods about proving the irrationality of the numbers $\sqrt{2}$, $\sqrt{N}$, $\sqrt[n]{N}$ and some trigonometric numbers are considered in the following article.