МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

ЛИЦА, ЕДНАКВОСТИ И ДОКАЗВАНЕ НА НЯКОИ ТВЪРДЕНИЯ

Тома М. Георгиев

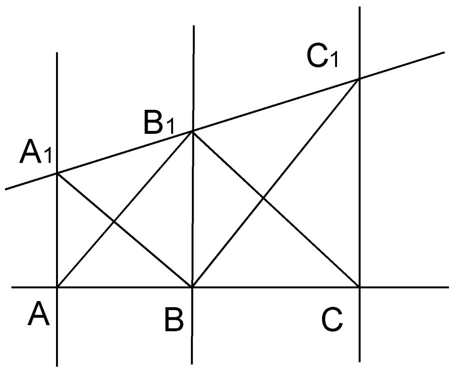
В статията са разгледани възможности за доказателство на някои твърдения в училищния курс по планиметрия с използване на свойствата на лица и еднаквости в равнината.

При изучаване на понятието лице на фигура и формулите за лице на триъгълник и четириъгълник в училищния курс по математика се решават главно задачи за изчисление. Най-вече поради липса на време не могат да се покажат големите възможности за решаване на задачи за доказателство, в това число и доказването на някои основни твърдения. След изучаването на свойствата на еднаквостите също така няма много примери за приложенията им в останалите раздели. Учителят обикновено търси собствено решение на тези проблеми. За задълбочаване на знанията на учениците, особено при работа с ученици с повишен интерес към изучаването на математиката, е добре да се илюстрират в подходящи моменти различни методи и решения. Най-ефектно това се прави, като се дават различни доказателства на разглеждано твърдение. При решаването на следващите задачи предлагам някои възможности за доказателство на част от най-популярните твърдения с използване на знанията за лица на фигури и еднаквости в равнината.

Задача 1 (Теорема на Талес). *Да се докаже, че успоредни прави отсичат от две дадени прави пропорционални отсечки.*

Решение:

Нека трите успоредни прави са AA_1, BB_1 и CC_1 и отсичат от едната права отсечки AB и BC, а от другата права отсечки A_1B_1 и B_1C_1. Съответно равни са лицата на триъгълниците BB_1A и BB_1A_1, както и на BB_1C и BB_1C_1, защото имат обща основа и равни височини към нея.

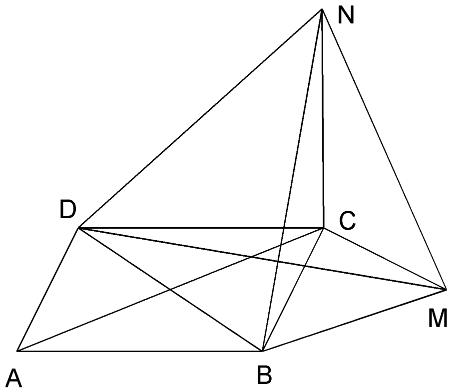


Но $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB \cdot \dfrac{L}{2}}{BC \cdot \dfrac{L}{2}} = \dfrac{S_{BB_1A}}{S_{BB_1C}}$, където L е разстоянието от точката B_1 до правата AC.

Аналогично, $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{S_{BB_1A_1}}{S_{BB_1C_1}}$, откъдето следва, че $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

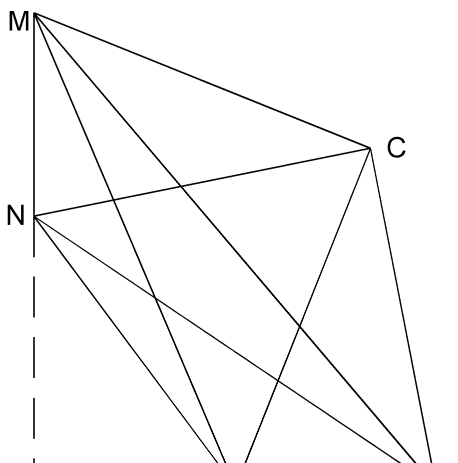
Задача 2. *Да се докаже, че в успоредник сумата от квадратите на диагоналите е равна на сумата от квадратите на страните.*

Доказателство. Разглеждаме успоредника $ABCD$. Нека при ротацията с връх точка C и ъгъл 90° точката B се изобразява в точката M, а при ротацията с връх точката C и ъгъл -90° точката D се изобразява в точката N. Тогава отсечките NB и DM са съответни при първата ротация и следователно са перпендикулярни.



Четириъгълникът $NDBM$ е с перпендикулярни диагонали и $ND^2 + BM^2 = DB^2 + MN^2$. Последното равенство се получава лесно, като се приложи Питагоровата теорема за четирите правоъгълни триъгълника, на които е разделен четириъгълникът $DBMN$ от диагоналите. От равнобедрените правоъгълни триъгълници NDC и BMC след прилагане на Питагоровата теорема следва, че $ND^2 = 2.CD^2$ и $BM^2 = 2.BC^2$. Триъгълниците ABC и NCM са еднакви по I признак за еднаквост на триъгълници, защото $AB{=}DC{=}NC$, $BC{=}CM$ и $\sphericalangle ABC{=}\sphericalangle NCM$ (допълващи до 180° $\sphericalangle BCD$). Следователно $MN = AC$ и $2.CD^2 + 2.BC^2 = DB^2 + AC^2$.

Задача 3 (Косинусова теорема). *Да се докаже, че квадратът на всяка страна на триъгълника е равен на сумата от квадратите на другите две страни, намалена с удвоеното произведение на тези страни и косинуса на ъгъла, заключен между тях.*



Доказателство. Нека $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Ще разгледам само случая $\gamma < 90^\circ$, а останалите случаи се извеждат аналогично и читателят може сам да ги разгледа. При ротация с център C и ъгъл -90° точките B и A се изобразяват съответно в точките N и M, отсечката AB в отсечката MN. Следователно отсечките AB и MN са перпендикулярни и равни. Нека правите AB и MN се пресичат в точката P. Отсечките MP и NP са височини в триъгълниците ABM и ABN. Имаме

$$S_{ABM} - S_{ABN} = \frac{1}{2}AB.MP - \frac{1}{2}AB.NP =$$
$$= \frac{1}{2}AB\,(MP{-}NP) {=} \frac{1}{2}AB.MN {=} \frac{1}{2}AB^2 {=} \frac{1}{2}c^2,$$
$$S_{ABM} = S_{ABC} + S_{ACM} - S_{BCM} =$$
$$= \frac{1}{2}a.b.\sin\gamma + \frac{1}{2}.b^2 - \frac{1}{2}a.b.\sin(90^\circ + \gamma) =$$
$$= \frac{1}{2}a.b.\sin\gamma + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a.b.\cos\gamma;$$

$S_{ABN} = S_{ABC} + S_{ACN} - S_{BCN} = \frac{1}{2}a.b.\sin\gamma + \frac{1}{2}a.b.\sin(90^\circ - \gamma) - \frac{1}{2}a^2 =$
$= \frac{1}{2}a.b.\sin\gamma + \frac{1}{2}a.b.\cos\gamma - \frac{1}{2}a^2$. Получава се $\frac{1}{2}c^2 = S_{ABM} - S_{ABN} =$
$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - a.b.\cos\gamma$ и $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma$.

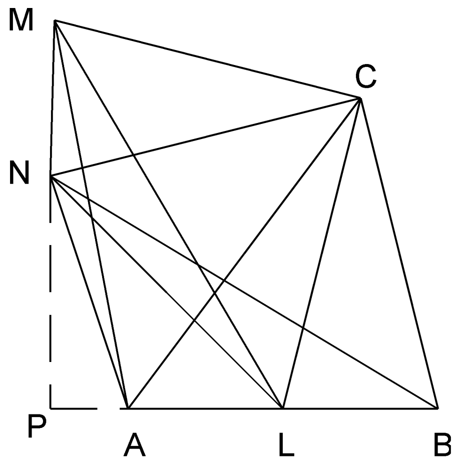
Задача 4. *Да се докаже, че за всеки триъгълник $l_c^2 = a.b - m.n$, където l_c, a и b са дължините на ъглополовящата и двете страни излизащи от един и същи връх, а m и n са дължините на частите, на които ъглополовящата разделя срещуположната страна.*

Лема. *При традиционните означения в триъгълника е в сила равенството*

$$l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Нека $CL = l_c$ е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB = \gamma$ на триъгълник ABC и $AC = b$, $BC = a$. Имаме $S_{ALC} + S_{BLC} = S_{ABC}$, откъдето се получава, че $\frac{1}{2}bl_c\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}al_c\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ и лесно следва исканото равенство.

Пристъпваме към решението на задачата:



Нека в триъгълник ABC означим $AL = m$ и $BL = n$. Ще разгледам само случая $\gamma < 90^\circ$ (останалите случаи се разглеждат аналогично). При ротацията с център точката C и ъгъл -90° точките B и L се изобразяват съответно в точките N и M, отсечката BL в отсечката NM. Следователно $NM = BL = n$ и $NM \perp BL$. MP и NP са височините в триъгълниците ALM и ALN. Имаме

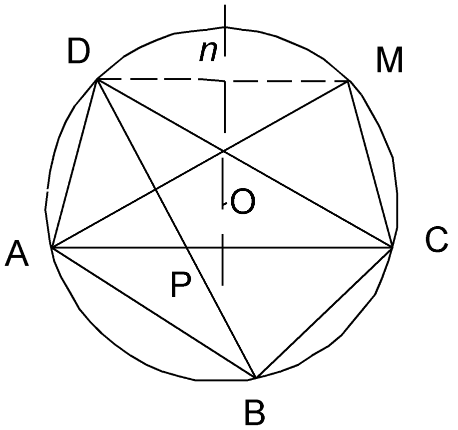
$$S_{ALM} - S_{ALN} = \frac{1}{2}AL.MP - \frac{1}{2}AL.NP =$$
$$\frac{1}{2}AL\,(MP - NP) = \frac{1}{2}AL.MN = \frac{1}{2}m.n;$$

$$S_{ALM} = S_{ALC} + S_{AMC} - S_{LMC} = \frac{1}{2}b.l_c.\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}b.l_c.\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{1}{2}l_c^2 =$$
$$\frac{1}{2}b.l_c.\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}b.l_c.\cos\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}l_c^2;$$

$S_{ALN} = S_{ALC} + S_{ANC} - S_{LNC} = \frac{1}{2}b.l_c.\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}a.b.\sin(90^\circ - \gamma) - \frac{1}{2}a.l_c.\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) =$
$\frac{1}{2}b.l_c.\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}a.b.\cos\gamma - \frac{1}{2}a.l_c.\cos\frac{\gamma}{2}$; $S_{ALM} - S_{ALN} = \frac{1}{2}l_c.(a+b)\cos\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}a.b.\cos\gamma - \frac{1}{2}l_c^2$.

От лемата $l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$, следва $\frac{1}{2}m.n = a.b.\cos^2\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}a.b.\cos\gamma - \frac{1}{2}l_c^2 = a.b.\frac{1+\cos\gamma}{2} - \frac{1}{2}a.b.\cos\gamma - \frac{1}{2}l_c^2$, $\quad \frac{1}{2}m.n = \frac{1}{2}a.b - \frac{1}{2}l_c^2$ и окончателно $l_c^2 = a.b - m.n$.

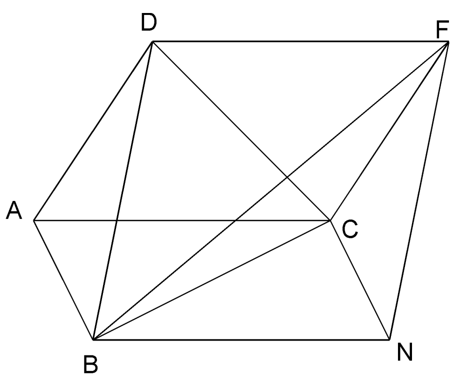
Задача 5 (Теорема на Птоломей). *Докажете, че за всеки вписан в окръжност четириъгълник произведението на диагоналите е равно на сумата от произведенията на двете двойки срещуположните страни.*



Доказателство. Нека $ABCD$ е четириъгълник, вписан в окръжност с център точка O, диагоналите му AC и BD се пресичат в точка P и $\sphericalangle APD = \varphi$. Тогава $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin\varphi$. При осева симетрия с ос симетралата n на диагонала AC точката D се изобразява в точката M, която ще лежи на окръжността, защото n минава през центъра O и е ос на симетрия за окръжността. Отсечките AD и CM, CD и AM и дъгите $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{CM}$ също са съответни при симетрията и са съответно равни. Съответни и еднакви, а следователно равнолицеви са триъгълниците ADC и CMA. Следователно равнолицеви са и четириъгълниците $ABCD$ и $ABCM$. Имаме $\varphi = \sphericalangle APD = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CM} + \overset{\frown}{BC}\right) = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BCM} = \sphericalangle BAM$, $\sphericalangle BCM = 180^\circ - \sphericalangle BAM = 180^\circ - \varphi$ (четириъгълникът $ABCM$ е вписан), $S_{ABCM} = S_{ABM} + S_{BCM} = \dfrac{1}{2}AB.AM.\sin\varphi + \dfrac{1}{2}BC.CM.\sin(180^\circ - \varphi) =$
$= \dfrac{1}{2}AB.CD.\sin\varphi + \dfrac{1}{2}BC.AD.\sin\varphi$.

Получава се, че $\dfrac{1}{2}AC.BD.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}AB.CD.\sin\varphi + \dfrac{1}{2}BC.AD.\sin\varphi$ и следователно $AC.BD = AB.CD + BC.AD$.

Забележка: Идеята на предложеното доказателство може да бъде реализирана и без учениците да познават формулите за лице с използване на тригонометрични функции. Ако разгледаме транслацията с вектора $\overrightarrow{AC}$, определен от диагонала на четириъгълника $ABCD$, триъгълникът ABD се изобразява в триъгълника CNF.



Лицето на четириъгълника $ABCD$ от една страна е равно на сумата от лицата на триъгълниците ABD и BDC и следователно на сумата от лицата на триъгълниците BDC и CNF, от друга страна – на сумата на лицата на триъгълниците ABC и ACD и следователно на сумата на лицата на триъгълниците BNC и DFC, защото $ABNC$ и $ADFC$ са успоредници. Следователно лицето на $ABCD$ е равно на половината от лицето на успоредника $BNFD$. Следва изводът, че лицето на четириъгълника $ABCD$ е равно на лицето на триъгълника BDF, т.е. на триъгълник, двете страни на който са равни на диагоналите и ъгълът, заключен между тях, е равен на ъгъла между диагоналите. Лесно се установява, че лицата на триъгълници, които имат равни ъгли (или допълващи се до 180°) при два съответни върха, се отнасят както произведенията на страните излизащи от съответните върхове.

Тогава при решението на задачата (виж черт. 1) можем да използваме следното: $1 = \dfrac{S_{ABM} + S_{BCM}}{S_{ABCM}} = \dfrac{S_{ABM} + S_{BCM}}{S_{ABCD}} = \dfrac{S_{ABM}}{S_{ABCD}} + \dfrac{S_{BCM}}{S_{ABCD}} = \dfrac{AB.AM}{AC.BD} + \dfrac{BC.CM}{AC.BD}$, т.е. $1 = \dfrac{AB.CD}{AC.BD} + \dfrac{BC.AD}{AC.BD}$ и $AC.BD = AB.CD + BC.AD$.

Посочените задачи могат да бъдат използвани удачно при преговора в последния клас на училищния курс, но също така и при изучаването на съответните твърдения. Те и подобни на тях могат да бъдат използвани и като предизвикателство към учениците за откриване на свои собствени решения, различни от предложените в учебника или от учителя.

ул. „Цар Александър “ № 80
вх. В, ет. 1, ап. 44
3700 Видин, България

AREAS, ISOMETRIES AND PROVING OF SOME PROPOSITIONS

Toma Marinov Georgiev

This paper deals with the possibilities of proving some of propositions in the school course in plane geometry by using some properties of areas and isometries in the plane.