МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

ИЗКУСТВОТО ДА СЕ ФОРМУЛИРАТ ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ

Димитър Димитров, Митко Кунчев

В този доклад е споделен опитът на авторите в преподаването по геометрия, като е обърнато специално внимание на формулировката на задачите и са обобщени резултатите от работата на групата по геометрия от международния семинар по проблеми, свързани с обучението по математика „Красива математика за слънчеви деца“ , проведен от 19.08 – 28.08 2000г. в Дома на учените „Жолио Кюри“ край Варна.

Предложените задачи и коментари към тях „подсказват“ на учителите идеи за разнообразяване на работата им, а на учениците – възможност да преосмислят отношението си към геометрията.

Ученикът се среща с предизвикателствата на геометрията чрез формулировката на задачите. Тя може да го заинтригува или да го отблъсне. Опитът показва, че строгото и пълно доказателство на дадено твърдение не е подходящо за всички ученици. Добре би било доказателството да се предхожда от „по-лека“ формулировка и да се акцентира на по-привлекателната част от решението. Не бива една голяма част от учениците (а и техните родители) да остават с впечатлението, че математиката е само за „богоизбрани“.

В това отношение много полезен опит беше участието на български учители в международния семинар *Красива математика за слънчеви деца*, проведен от 19.08 – 28.08 2000г. в Дома на учените „Жолио Кюри“ край Варна.

Редица констатации, които направихме по време на дискусиите с колегите от САЩ и Румъния, са сериозен повод за размисъл.

Според математици от САЩ честата употреба на думите „докажете“, „намерете“, „определете“ и други подобни демотивират голяма част от учениците. С оглед на крайния образователен ефект, който преследваме чрез дадена задача, не винаги строгото доказателство е най-подходящо (полезно). Изобщо, строгото доказателство не бива да е самоцел в нашата работа в клас.

Ученикът може да бъде подтикнат към активна дейност, ако думата „докажете“ заменим например с изрази като „възможно ли е?“, „При какви условия е възможно?“, „Вярно ли е, че?“, „Потвърдете или опровергайте“, „Изследвайте изменението на …“, „Съставете хипотеза“ и други. Интересно е, че „Докажете“ в китайските учебници се превежда приблизително като „Бихте ли доказали“ или „Ще благоволите ли да докажете“.

Подходящата формулировка създава условия за равен старт на всички ученици, което е основен принцип в образованието на САЩ: “Chances equal for all”.

Разнообразни идеи предложиха американските колеги в търсенето на интересни формулировки на задачи за приложенията на геометрични знания в конкретни житейски ситуации. Освен „атрактивност“ подобни формулировки спомагат за по-трайно усвояване на съответния учебен материал. По този начин геометричните знания се възприемат не само като „скучна“ теория, а като факти с реално приложение. Ето няколко стандартни задачи, представени в „по-привлекателен вид“:

1. Археолози намерили парче от кръгъл съд (чиния), показан на Фиг. 1. Помогнете им да възстановят формата на целия съд.

Упътване: Припомнете си, че окръжност се определя от три точки, които не лежат на една права.

2. Дизайнер се опитва да създаде лого. Той взема равностранен триъгълник и отрязва от ъглите му еднакви равностранни триъгълници, както е показано на Фиг. 2.

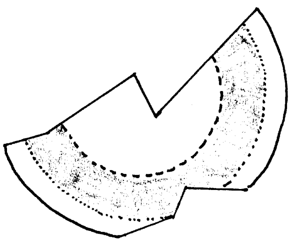
а) Може ли около останалия шестоъгълник да се опише окръжност?

б) Разгледайте същия въпрос, ако триъгълниците не са еднакви.

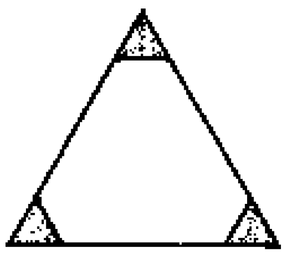
3. Национален парк има форма на четириъгълник. Трябва да се инсталират четири стационарни радиостанции (трансмитери или клетки) по границите за осъществяване на радиовръзка с рейнджърите, които охраняват парка (строителството вътре в парка е забранено). Всеки трансмитер покрива кръг с диаметър съответната страна (виж Фиг. 3).

а) Начертайте показаната Фиг. 3 в тетрадките си. Нанесете обхвата на всички трансмитери. Покрива ли се по този начин целия парк?

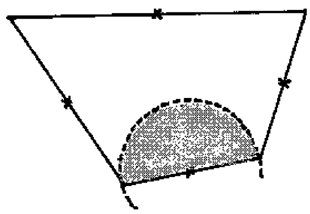
б) Докажете или опровергайте, че всеки четириъгълник може да бъде покрит по този начин.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Когато ученикът трябва да извърши изследване, да проследи изменението на геометрични обекти, той може да бъде подтикнат отново с подходяща формулировка. Предлагаме една такава задача:

4. В ъгъл с връх A е вписана окръжност K. През произволна точка $M \in K$ е построена допирателна към K, която пресича раменете в точки B и C.

а) Изследвайте (съставете хипотезата за) множеството от всички точки – центрове на вписаните в $\triangle ABC$ окръжности, когато точка M описва K.

б) Изследвайте и направете изводи за изменението на периметъра и лицето на ΔABC.

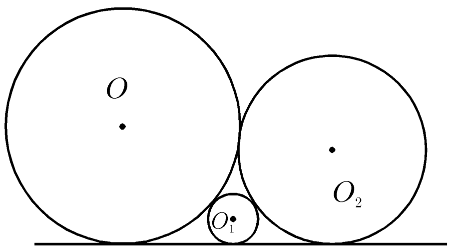
При така поставения проблем ученикът не се чувства длъжен да „докаже“ нещо на всяка цена, а свободно експериментира с допирателните в различни точки.

Когато точка M описва различни дъги от K, резултатите са коренно различни, което дава възможност за активно и ползотворно участие на целия клас в извеждането на крайния резултат – хипотезата. Тази задача може да се интерпретира от учителя така, че да бъде интересна за всички ученици, включително и за най-добрите. Достатъчно е да се поиска строга обосновка на всички предположения.

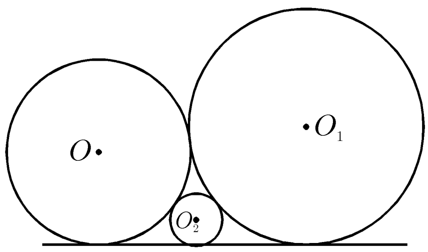
При други задачи формулировката може да „подскаже“ или да „скрие“ част от решенията на задачата. Това е средство, което учителят прилага успешно, като се съобразява с нивото на съответния клас. Ще илюстрираме това със следната задача:

5. Две окръжности $K(O;R)$ и $K_1(O_1;R_1)$ се допират външно помежду си, а правата t е обща външна допирателна. Да се изрази чрез R и R_1 радиусът на окръжността, която се допира до правата t и до двете окръжности.

Повечето ученици разглеждат само случая, показан на Фиг. 4. и намират, че $R_2 = \dfrac{RR_1}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{R_1}\right)^2}$. Много малко са тези, които съобразяват, че има друг вариант (фиг. 5), който също отговаря на условието и в този случай $R_2 = \dfrac{RR_1}{\left(\sqrt{R}-\sqrt{R_1}\right)^2}$.



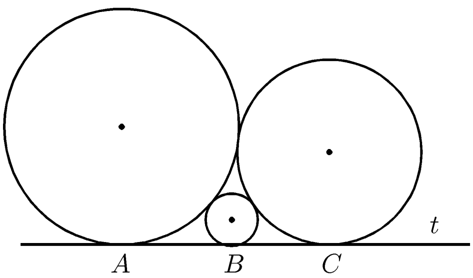
Фиг. 4



Фиг. 5

Същата задача, формулирана по друг начин, дава възможност на много повече ученици да открият двата случая, преди още да са се досетили за Фиг. 5. Ето как може да изглежда условието на същата задача:

Три окръжности се допират до права и се допират външно две по две.



Фиг. 6.

Открийте връзката между радиусите на трите окръжности.

От равенството $AB + BC = AC$ (фиг. 6), където A, B и са допирните точки, следва непосредствено $\sqrt{RR_2} + \sqrt{R_1R_2} = \sqrt{RR_1}$. (*)

Ако са дадени R и R_1, от (*) намираме решението от Фиг. 4.

Ако са дадени R и R_2, от (*) намираме решението от Фиг. 5.

На чуждестранните участници в семинара направи силно впечатление опитът на българските учители в търсенето и формулирането на задачи с повече решения. А за нас бе истинско удоволствие да разкажем за случаи, когато ученик предложи решение, което не сме очаквали. Ето няколко примера на такива задачи:

6. Даден е трапец $ABCD$, като M и N са среди на бедрата AD и BC. Възможно е по четири различни начина да се докаже, че $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$ и $MN = \| AB$, без да се използват вектори. Опитайте се да намерите някои от тези начини.

7. Даден е Δ като CL е ъглополовяща на ъгъл ACB ($L \in AB$). Точка D лежи на продължението на CL след точка L така, че ъглите BDL и ADL имат мерки съответно 20° и 50°. Ако мярката на ъгъл ACB е 40°, опитайте се по различни начини да обосновете, че мярката на ъгъл BAC също е 40°.

Друг важен елемент от работата на учителя е да подбере и предложи на учениците на задачи, при които се налага разглеждане на различни възможности. Често пъти откриването на всички случаи е по-интересната част от решаването на задачата. Така се развиват наблюдателност, съобразителност и комбинативност у учениците. Целият клас може да участва в анализа на задачата. Ето няколко примера:

8. Ъгъл $ABC = 60^\circ$, като $AB = CB = a$. Окръжност $K_1(O_1; R_1)$ се допира до AB в точка A, а окръжност $K_2(O_2; R_2)$ се допира до BC, в точка C. Освен това двете окръжности се допират външно. Намерете радиусите им, ако е известно, че единият е два пъти по-голям от другия.

9. Ъглополовящата на тъпия ъгъл α на равнобедрен трапец дели най-голямата му страна, с дължина a, в отношение 1:2. Начертайте всички трапеци, които отговарят на това условие. Изразете лицето на трапеца чрез a и α.

10. Дължините на страните на триъгълник и дължината на височината към една от тях са последователни естествени числа. Намерете дължините на страните на такъв триъгълник.

Разглеждането на различни случаи може да се налага от неуточнено в условието на задачата разположение на геометрични обекти (виж задача 8) или от неопределено съответствие между геометрични обекти и техните мерки (задачи 9 и 10). Така се налага учениците да анализират данните в условието и да разглеждат всички възможни комбинации. По-този начин се развиват способности за анализ на различни бази от данни.

Авторите на доклада предложиха част от задачите по геометрия, дискутирани по време на семинара, на ученици в X клас на 119 СОУ „М. Арнаудов“, София, 125 СОУ „Боян Пенев“, София и в математическата гиманазия „Баба Тонка“, Русе. Задачите, които бяха формулирани чрез практическа ситуация, предизвикаха огромен интерес сред учениците (както в обикновените, така и в специализираните училища). Нещо повече – част от деветокласниците предложиха собствени формулировки на някои задачи, които макар и несъвършени, показаха промяна в мисленето, в отношението към геометрията.

В заключение бихме искали да споделим с учителите по математика следното:

Ефективността на обучението по геометрия би се повишила, ако учителят се старае да интерпретира дадена задача във вид, който да привлече вниманието на ученика. Опитът ни показва, че във всеки урок по геометрия може да се намерят такива задачи. В математическата литература, предназначена за българските ученици, много рядко се срещат разработки в духа на идеите, застъпени в този доклад. Добре би било да има повече български книги не просто с набор от задачи и решения, а с такива задачи, които провокират активността на ученика. Показателно е, че почти всички български книги по математика се наричат „Сборник по . . .“, а американските – „Art of Problem Solving“ (Изкуството да се решават задачи).

За да бъде постигната максимална ефективност на обучението по геометрия е необходимо в учебната програма по математика във всеки клас след четвърти да бъдат предвидени практически занятия (лабораторни упражнения), за провеждането на които класа да се дели на групи. В тези часове трябва да се използват калкулатори, компютри и други технически средства по програма, разработена от експертите на МОН.

Да дадем шанс на всеки да обикне математиката!

Димитър Димитров
Младост-2, бл. 219, вх. 5 ап. 92
1799 София, България

Митко Кунчев
МГ „Баба Тонка“
ул. Иван Вазов 20
7000 Русе, България
e-mail: mg@ru.acad.bg

THE ART OF FORMULATING PROBLEMS IN THE CONTEXT OF GEOMETRY

The paper deals with the experience of the authors in teaching geometry. Special attention is payed to the formulation of the problems. Some generalizations based on the work of the Geometry group at the International workshop on Mathematical Problem Solving “Beautiful Mathematics for Sunny Kids”, held during August 19-28, 2000, at the International Home of Scientists, “F. Joliot-Curie”, Varna, are presented. The problems proposed together with some comments would hopefully give a hint to the teachers how to make their teaching even more attractive, and to the students – how to rethink their attitude towards geometry.