МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

ИЗУЧАВАНЕ НА СИМЕТРИЧНИТЕ ПОЛИНОМИ В ЗАДЪЛЖИТЕЛНО ИЗБИРАЕМАТА ПОДГОТОВКА (ЗИП) ПО МАТЕМАТИКА В 9-ТИ КЛАС*

Маряна Георгиева Кацарска

В настоящата разработка е показано как може да се докаже основната теорема за симетрични полиноми на три променливи в часовете за ЗИП по математика с учениците от 9-ти клас. Предложени са промени за последователността на някои от разглежданите теми, които са свързани помежду си и са включени нови задачи, които биха улеснили решаването на предложените в [1].

Сега в нашата учебна документация изучаването на симетричните полиноми на две променливи се поставя в 9-ти клас при темата „Формули на Виет“[2],[3]. Тук чрез коефициентите на дадено квадратно уравнение се изразяват симетрични полиноми на корените му или частно от такива. Например задача от този вид е:

1. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $f(x) = 0$, пресметнете стойността на израза A:

$$a) f(x) = x^2 + 3x - 4,\ A = x_1^2 + x_2^2; \qquad b) f(x) = 3x^2 + 6x + 2,\ A = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3;$$

$$c) f(x) = 2x^2 - 3x - 4,\ A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad d) f(x) = x^2 + px + q,\ A = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1},\ x_1 x_2 \neq 0.$$

По-нататък при темата „Някои специални системи уравнения“ се разглеждат системи с две неизвестни, на които лявата страна е симетрична функция на неизвестните. Например такива са системите:

$$2a) \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x + 2y - xy = 4; \end{array} \right. \qquad 2b) \left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 19(x + y) \\ 6x + 6y + xy = 0; \end{array} \right. \qquad 2c) \left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 + x^3 y^3 = 12 \\ x + y + xy = 0. \end{array} \right.$$

При решаването на много от тях се прилага методът на последователното изключване на неизвестните. Той е достатъчно общ и теоретически е ясно, че от всяка система от две уравнения с две неизвестни, изключвайки едното неизвестно, получаваме уравнение относно другото. Този процес на изключване в повечето случаи не е елементарен и най-голям негов недостатък е, че много често довежда до уравнение

*Посвещава се на светлата памет на доц. д-р М. Гаврилов в знак на признателност за неоценимата му помощ оказана на автора.

от по-висока степен. Нека разгледаме системата $2c$). От второто уравнение изразяваме $y = -\dfrac{x}{1+x}$ (очевидно няма решение, при което $x = -1$) и след заместване в първото се получава уравнението:

$$x^5 + x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 12x - 3 = 0.$$

В този случаи се достига до уравнение, което учениците не умеят да решават. Както е известно норвежкият математик Абел е доказал, че не съществуват формули за изразяване корените на общото уравнение от пета и по-висока степен чрез коефициентите му и краен брой действия събиране, изваждане, умножение, деление и коренуване. Ето защо методът на изключването в такива случаи не е удобен. В училище такива системи се решават чрез някакви изкуствени преобразувания, за чието откриване не съществуват никакви общи подходи. По тази причина методът за решаването на една система от този вид обикновено трудно може да се приложи при решаването на друга.

Ако се използва теория за симетрични полиноми, то от дадената по-горе система, след полагането $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$, се получава системата:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^3 = 12 \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 0. \end{array}\right.$$

Решението ѝ е сравнително леко и води до две възможности $\sigma_1 = -2$ и $\sigma_2 = 2$ или $\sigma_2 = -2$:

За x и y съответно получаваме системите:

$$\left|\begin{array}{l} x + y = -2 \\ xy = 2; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x + y = 2 \\ xy = -2. \end{array}\right.$$

Първата от системите няма реални корени, а от втората намираме:
$x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $y_1 = 1 + \sqrt{3}$ или $x_2 = 1 + \sqrt{3}$, $y_2 = 1 - \sqrt{3}$.

От изложеното до тук се вижда, че с помощта на факт от теорията за симетрични полиноми, решаването на някои типове от горепосочените задачи значително се опростява и най-важното, използват се стандартни начини за решение. Същественото тук е, че степента на системата като правило се запазва или понижава.

Примери като разгледания ни подтикнаха да се занимем по-подробно с този проблем. Оказа се, че теорията за симетрични полиноми дава възможност да се решават по друг начин такива задачи. Тя е сравнително проста и нейното познаване би улеснило решаването на различни типове задачи, като доказателство на алгебрични тъждества и неравенства, решаване на някои видове ирационални уравнения, разлагане на симетрични и антисиметрични изрази на множители и др.

В задължителната учебна програма не е възможно разглеждането на симетрични полиноми на две и три променливи. По сега действащите учебни програми това е предвидено в часовете за ЗИП по математика в 9 клас. В учебника [1] са дадени дефинициите за симетрични полиноми на две и три променливи, основната теорема (всеки симетричен полином може да се представи като полином на елементарни симетрични полиноми) за две променливи е доказана, а за три се приема без доказателство. Считам, че тя също може да се докаже, тъй като доказателството ѝ е аналогично на това за две променливи. Предлагам това да стане по следния начин.

Нека $f(x,y,z)$ е произволен симетричен полином, който не съдържа подобни едночлени. Очевидно $f(x,y,z)$ е крайна сума на едночлени от вида: $A = ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$. Тъй като $f(x,y,z)$ е симетричен полином и ако съдържа едночлена $ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, ще съдържа и всички едночлени от вида $ax^k y^l z^s$, където $k\,l\,s$ е произволна пермутация на α, β и γ . Да означим с S_A сумата на тези едночлени. Без ограничение можем да считаме, че $\alpha \ge \beta \ge \gamma$. След изнасяне на общ множител $a(xyz)^{\gamma}$ от всички събираеми от вида A се получава:

$$f(x,y,z) = f_1(x,y,z) + a(xyz)^{\gamma} g(x,y,z).$$

Тук $f_1(x,y,z)$ е симетричен полином несъдържащ едночлени от вида A, $g(x,y,z)$ има един от следните три вида:

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^m y^n + x^n y^m + x^m z^m + x^n z^m + y^m z^n + y^n z^m \\ &= (x^m + y^m + z^m)(x^n + y^n + z^n) - (x^{m+n} + y^{m+n} + z^{m+n}) \\ &= S_m S_n - S_{m+n}, \end{aligned} \tag{1}$$

където $m = \alpha - \gamma$, $n = \beta - \gamma$ и $m \ne n$ при $\alpha > \beta > \gamma$.

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^m y^m + x^m z^m + y^m z^m = \frac{(x^m + y^m + z^m)^2 - (x^{2m} + y^{2m} + z^{2m})}{2} \\ &= \frac{S_m^2 - S_{2m}}{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

при $m = \alpha - \gamma = \beta - \gamma$ (когато $\alpha = \beta > \gamma$).

$$g(x,y,z) = x^n + y^n + z^n = S_n, \tag{3}$$

при $\alpha > \beta = \gamma$, $\alpha - \beta = \alpha - \gamma = n$. Ако $\alpha = \beta = \gamma$, то $f(x,y,z)$ съдържа само един едночлен от вида

$$x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} = a(xyz)^{\alpha} = a\sigma_3^{\alpha}.$$

Тъй като $f(xyz)$ е крайна сума на събираеми от вида S_A, за всяко от тях прилагаме горните разсъждения.

С доказателството на теоремата за три променливи отпада разглеждането на зад. 1а) и 1б) от [1] към темата, които се явяват задачи – компоненти на доказаната по-горе теорема, а именно равенствата (1) и (2). Като последна към темата е включена задачата

3. Да се докаже, че за положителни x, y, z е вярно неравенството:

$$a)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \qquad b)\ \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \ge \frac{x+y+z}{3}.$$

Първото от тях се доказва елементарно, като в неравенството $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ положим $a = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ и $c = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$, но за доказателството на второто ни е необходима задачата компонента

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \ge xy(x+y) + xz(x+z) + yz(y+z). \tag{4}$$

$[2(x^3+y^3+z^3)-xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)=$
$=x^3-x^2y+x^3-x^2z+y^3-xy^2+y^3-y^2z+z^3-xz^2+z^3-yz^2=$
$=x^2(x-y)+x^2(x-z)-y^2(x-y)+y^2(y-z)-z^2(y-z)=$
$=(x^2-y^2)(x-y)+(x^2-z^2)(x-z)+(y^2-z^2)(y-z)=$
$=(x+y)(x-y)^2+(y+z)(y-z)^2+(x+z)(x-z)^2 \geq 0$ при $x>0, y>0, z>0$, като равенство се достига при $x=y=z$.]

Без да използват неравенството (4) учениците трудно биха се справили с доказателството на 3*b*), а прилагането на последното изключително улеснява работата.

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}-\frac{x+y+z}{3}=\frac{3(x^3+y^3+z^3)-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}$$

$$=\frac{2(x^3+y^3+z^3)+(x^3+y^3+z^3)-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\geq\frac{xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+(x^3+y^3+z^3)-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{3(x^2+y^2+z^2)}=0$$

$$\Longrightarrow \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\geq\frac{x+y+z}{3}$$

като равенство се достига само при $x=y=z$.

Към тази тема могат да се включат задачи от вида

4. Ако x, y и z са страни на триъгълник да се докажат неравенствата:

$$a)\ 2(xy+xz+yz)>x^2+y^2+z^2; \quad b)\ (x^2+y^2+z^2)(x+y+z)>2(x^3+y^3+z^3).$$

5. Решете в цели числа уравненията:

$$a)\ \frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3; \qquad b)\ \frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=6.$$

При зад. 5 се показва приложението на неравенството

$$(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2\geq xyz(x+y+z). \tag{5}$$

Очевидно $x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0$ и уравнението 5) е еквивалентно на

$$(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2=3xyz. \tag{6}$$

За произволни числа x, y, z лявата страна е положително число. Следователно $3xyz>0$ и оттук се вижда, че или x, y и z са едновременно положителни, или едното е положително, а другите две – отрицателни. Ако в частното $\frac{xy}{z}$ две от числата заменим с противоположните им, то очевидно отношението не се променя. Оттук можем да направим извода, че е достатъчно да намерим положителните числа, които са решение на даденото уравнение и след това да образуваме различните възможности когато две от тях са отрицателни. За произволни числа x, y, z е вярно неравенството (5). След заместване на (6) в (5) се получава

$$3(xyz)\geq(x+y+z)xyz \iff 3\geq x+y+z \quad (xyz>0)$$

Целите положителни числа, удовлетворяващи условието $x + y + z \leq 3$ са $x = y = z = 1$. От изложеното по-горе следва, че целите решения на даденото уравнение са $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ и $(-1, -1, 1)$.

При повечето от задачите за неравенства от част V в учебника по математика за ЗИП в 9-ти клас [1], лявата и дясната страна на разглежданите неравенства са симетрични полиноми на две и три променливи. Ето защо тя се явява естествено продължение на т. 8. „Симетрични полиноми на две променливи" и т. 9. „Симетрични полиноми на три променливи". Затова считам, че е целесъобразна следната последователност на разглежданите въпроси:

• Симетрични полиноми на две променливи: дефиниция, основна теорема, формули на Нютон.

• Неравенства на две променливи: неравенства между средно хармонично, средно геометрично, средно аритметично и средно квадратично.

• Симетрични полиноми на три променливи: дефеницция, основна теорема, формули на Нютон, неравенства, верни за произволни три числа

• Други неравенства. Решаване на екстремални задачи чрез използване на неравенства.

• Приложения в геометрията.

Доказателството на основната теорема за симетрични полиноми на три променливи позтолява реализирането на дидактическата задача за обучение в самостоятелно търсене на доказателство по аналогия с изученото за две променливи (Допуска се евентуално насочване от страна на учителя при отделните елементи на доказателството). Това повишава самочувствието на учениците и интереса им към разглежданата проблематика, създава увереност в собствените им възможности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Запрянов и др. Математика за задължително избираема подготовка в 9-ти клас. Просвета, София, 1995.
[2] З. Запрянов и др. Учебно помагало за 9. клас. Просвета, София, 1998.
[3] Ч. Лозанов, М. Гаврилов и др. Математика за 9. клас на СОУ. Анубис, София, 1998.

Мариана Георгиева Кацарска
Природо-математически факултет
ЮЗУ „Неофит Рилски"
2700 Благоевград
бул. „Иван Михайлов" 66
e-mail: mariana@aix.swu.bg

SYNIMETRIC POLYNOMIALS IN THE ELECTIVE STUDYING MATHEMATICAL COURSES IN 9 TH CLASS OF HIGH SCHOOLS

Mariana Georgieva Katzarska

In this paper we show how the basic theorem of symmetric polynomials of three variables can be proved in elective mathematical courses in 9 th class of high schools. Changes in the order of some topics considured are proposed, and new problems are included that would facilitate solving the problems suggested in [1].