МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

ПРЕДСТАВЯНЕТО НА КРАСОТАТА И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВОТО НА ЗАДАЧИТЕ В ДОСТЪПНА ФОРМА – НАЧИН ЗА МОТИВИРАНЕ НА УЧЕНИЦИТЕ

Стелиана Миткова Кокинова

В настоящата статия се разглежда въпроса за противоречието между предизвикателното и достъпното в обучението по математика както и различията между подходите в образованието в България и САЩ, очертали се по време на международния летен семинар: „Красива математика за слънчеви деца“ – 18-29 август 2000 г. – Варна. Направен е скромен опит да се намери разумния баланс между елитарното и достъпното, абстрактното и прагматичното обучение, което да мотивира учениците.

Едно от най-големите предизвикателства за учителите по математика е да открият кои задачи са интересни за техните ученици. Много по-лесно те биха могли да кажат какво е безинтересна задача – такава, която не изисква комбинативност и изобретателност при решаването, а има нужда от добра техника на пресмятане и рутина, т.е. задача, при решаването на която не се нуждаем от „прозрение“.

Учителят по математика е лишен от възможността да устройва „представления“ в часовете си, както това правят учителите по химия и физика. Това естествено не означава, че той не може да прикове вниманието с нещо красиво и впечатляващо елегантно. Това са „рекламните“ задачи на всеки учител – събирани дълго и подбрани много внимателно. Те са неговото „съкровище“.

От години и аз се опитвам да натрупам такова „съкровище“. Забелязах, че учениците най-много харесват онези задачи, чието решение е достъпно, по възможност кратко и най-важното – неочаквано. И естествено тези задачи подхранват въображението, разчупват традициите и подготвят тези млади хора за истинските предизвикателства в живота, дават им куража и самочувствието, че могат да се справят почти с всичко. Едва ли бъдещият архитект, археолог или дори политолог би могъл да се справи успешно с предизвикателствата на избраната от него наука, ако не е усвоил логиката на математиката, ако не се се научил да използва аналогията като средство, което би му помогнало в трудни ситуации.

Работата със силно мотивирани млади хора винаги е била приятно предизвикателство. Ново, още по-голямо предизвикателство беше обаче поканата за участие в международния летен семинар: „Красива математика за слънчеви деца“, организиран от 18 до 29 август 2000 г. във Варна. Идваха най-добрите учители от САЩ, като те очакваха да се срещнат с интересни начини на преподаване, с интересни хора. Това беше чудесен начин да се сравни това, което е интересно за нас – българските учители с това, което е интересно за американските ни колеги.

За това ново предизвикателство реших да представя няколко задачи, провокирали учениците ми с „особения си поглед“– при решаването на „чисто“ алгебрични задачи бяхме повикали на помощ въображението си и ... геометрията [1].

Задача 1. Пресметнете $S = ab + 2bc + 3ac$ при $a > 0; b > 0; c > 0$

$$a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 25 \tag{1}$$

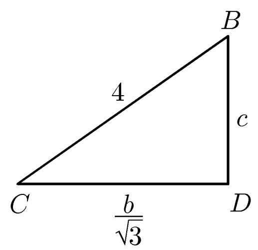
$$\frac{b^2}{3} + c^2 = 16 \tag{2}$$

$$c^2 + ac + a^2 = 9 \tag{3}$$

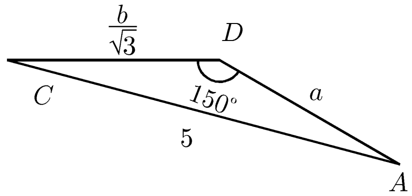
Едно възможно решение на задачата е:

От (2) следва $\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 + c^2 = 4$, и следователно можем да разглеждаме $\frac{b}{\sqrt{3}}$ и c като катети в правоъгълен триъгълник с хипотенуза 4 (фиг. 1). Основание за това ни даваше условието, че $b > 0$ и $c > 0$. От (1) получаваме $5^2 = a^2 - 2(-\frac{\sqrt{3}}{2})a\frac{b}{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2a\frac{b}{\sqrt{3}}\cos 150^0$ и следователно можем да разглеждаме 5, a и $\frac{b}{\sqrt{3}}$ като страни в тъпоъгълен триъгълник ($a > 0$ и $b > 0$ – по условие) с тъп ъгъл, равен на 150^0 (фиг. 2).

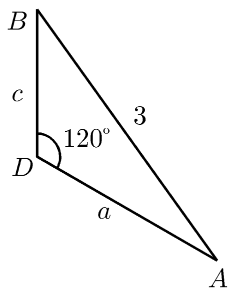
От (3) $9 = c^2 + ac + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 120^0$ аналогично разглеждаме $3, a$ и c като страни в тъпоъгълен триъгълник с тъп ъгъл, равен на 120^0 (фиг. 3)



Фиг. 1



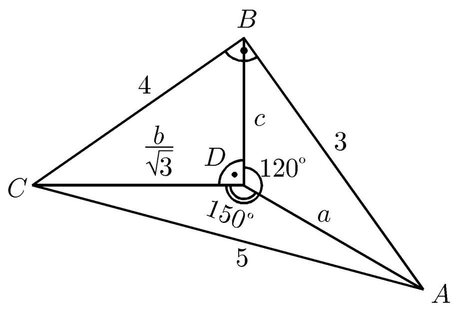
Фиг. 2



Фиг. 3

Бихме могли да обединим трите фигури в една (фиг. 4):

Тогава т. D е във вътрешността на триъгълника ABC със страни 3, 4 и 5, който по Питагоровата теорема се оказва правоъгълен и следователно лицето му $S_{ABC} = 0,5.AB.BC = 6$. Но лицето може да се представи и като сума от лицата на трите триъгълника: $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ADC} = 0,5ac\sin 120^0 + 0,5\frac{b}{\sqrt{3}}c + 0,5\frac{b}{\sqrt{3}}a\sin 150^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}ac + \frac{1}{2.\sqrt{3}}bc + \frac{1}{4.\sqrt{3}}ab = \frac{1}{4.\sqrt{3}}(3ac + 2bc + ab)$. Това, което



Фиг. 4

трябваше да пресметнем по условие е $S = ab + 2bc + 3ac$, т.е. $S_{ABC} = \dfrac{S}{4.\sqrt{3}} = 6$ и следователно $S = ab + 2bc + 3ac = 24\sqrt{3}$.

Сходна по идея беше и

Задача 2. Има ли решение системата:

(4) $$x^2 + xy + y^2 = 4$$

(5) $$x^2 + xz + z^2 = 9$$

(6) $$y^2 + yz + z^2 = 36 \text{ при } x > 0, y > 0 \text{ и } z > 0$$

Предложеното решение е:

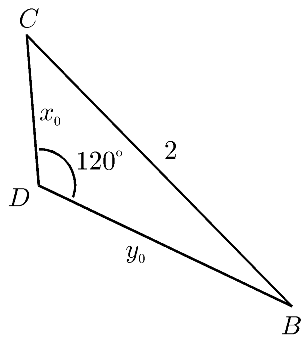
Нека (x_0, y_0, z_0) е решение на дадената система, като $x_0 > 0, y_0 > 0$ и $z_0 > 0$ (следва от условието). Тогава от:

от (4) имаме $x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 = 4$, т.е. $4 = x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0.\cos 120^0$

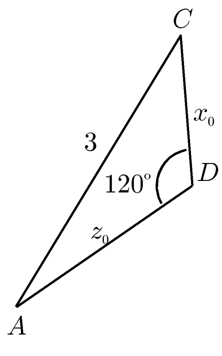
от (5) имаме $x_0^2 + x_0z_0 + z_0^2 = 9$, т.е. $9 = x_0^2 + z_0^2 - 2x_0z_0.\cos 120^0$

от (6) имаме $y_0^2 + y_0z_0 + z_0^2 = 36$, т.е. $36 = y_0^2 + z_0^2 - 2y_0z_0.\cos 120^0$

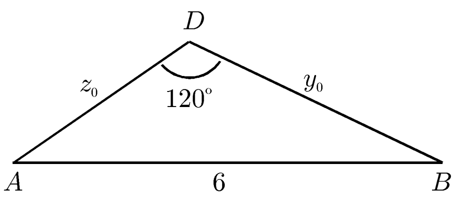
Ето защо бихме могли да разгледаме x_0, y_0, z_0, като страни в триъгълници (фиг. 5, фиг. 6, фиг. 7)



Фиг. 5

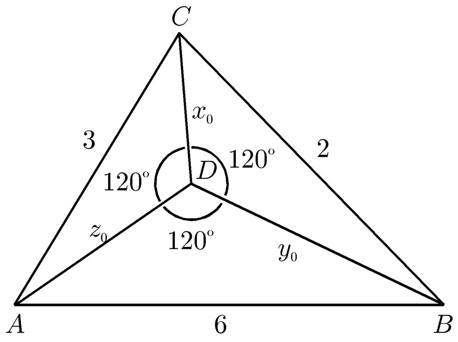


Фиг. 6



Фиг. 7

Или след като ги „залепим“ получаваме триъгълника на фигура 8:



Фиг. 8

Тогава за триъгълник ABC трябва да е изпълнено $|AC - BC| < AB < |AC + BC|$, т.е. $1 < 6 < 5$, което е очевидно невярно.

Следователно предположението, че системата има решение е погрешно, т.е. отговорът на поставения въпрос е „не“.

При така предложените решения на поставените задачи много ясно се забелязва неочакваният момент – моментът на „скок“ от алгебричния проблем към „чисто“ геометричната му интерпретация. Това което се харесва на учениците е простотата на новата задача, това че нейното решение е почти очевидно. Естествено, тук присъства и едно доста основателно притеснение – „красотата“ на такъв тип задачи може да се оцени само от хора, готови да направят този „скок“. За останалите, тази красота ще си остане неразкрита. Следователно учителят би могъл да си позволи такъв тип решения само, ако предварително многократно е провокирал учениците си с най-различни нестандартни идеи и решения, ако той знае, че до него са хора, които не следват пасивно мисълта му, а на моменти дори я изпреварват. В противен случай такъв тип задачи би имал обратен ефект – би превърнал математиката в елитарна наука.

Един по-щадящ учениците начин при решаването на подобни задачи беше предложен от проф. Джеймс Шулц. Задачата би могла да бъде „раздробена“ на по-малко „предизвикателни“ задачи, които се нуждаят от по-малки „скокове“:

Задача 1. а) Решете системата:

$$a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 25 \tag{1}$$

$$\frac{b^2}{3} + c^2 = 16 \tag{2}$$

$$c^2 + ac + a^2 = 9 \tag{3}$$

и намерете $S = ab + 2bc + 3ac$ при $a > 0, b > 0, c > 0$;

б) Можете ли, използвайки само чертежа на Фигура 4 да намерите стойността на дадения израз?

По аналогичен начин би могла да се формулира и

Задача 2. а) Решете системата:

(4) $$x^2 + xy + y^2 = 4$$

(5) $$x^2 + xz + z^2 = 9$$

(6) $$y^2 + yz + z^2 = 36 \text{ при } x > 0, y > 0 \text{ и } z > 0$$

б) Можете ли, използвайки само чертежа на Фигура 8 да установите дали тази система има решение?

Този начин на решаване на задачата, чрез използване на така наречената форсирана аналогия е по-лесен и достъпен, ето защо е особено подходящ при работа с ученици, които нямат много опит. Използването на аналогията като метод, както и идеите на когнитивната наука, при решаването на различни математически задачи са вече доста препоръчвано средство при обучението по математика [2, 3].

Това което може да се разграничи при така предложените два подхода на задаване на задачи е:

първи подход	**втори подход**
абстрактен	прагматичен
елитарен	достъпен
неочакван	с малък елемент на изненада
запомнящ се	рутинен

Хубавото при този втори начин е разумното „раздробяване“ на задачата на по-малки и по-лесни. Така учениците биха могли да проследят пътя на разсъждението, на зараждането на идеята. Точно такъв подход при задаването и решаването на задачи бе предложен от американските ни колеги. Изводът, който може да се наложи от всичко това е, че те се стремяха да направят математиката за учениците си максимално достъпна и атрактивна, да ги накарат да преодолеят страха си от тази считана от мнозина за „елитарна“ наука.

При този „щадящ“ начин на свеждане на задачата до форсирана подсказка обаче, се губи целият чар на „откритието“ и се оставя на учениците само да оценят „мъдростта“ на учителя, който им е дал базата за аналогия. Въпросът е как да научим учениците сами да стигат до подобни аналогии и да съхраним чувството им на изследователи. Ето два възможни начина за подготовка за решаване на първата от тези две задачи, при които постепенно се приближаваме към целта, без обаче да съобщаваме на учениците за това и ги оставяме да бъдат изненадани от собственото си откритие.

Първи начин. Тази задача се предлага на учениците в часовете по ЗИП в 11 клас. Това би ни дало възможност да не я класифицираме като геометрична или алгебрична от самото начало. Можем да подготвим учениците за решаването ѝ като им дадем първо задача А:

Постройте триъгълник със страни a, b и x, ако a и b са дадени отсечки, а $x^2 = a^2 - ab + b^2$.

Някои от учениците биха разделили тази задача на две подзадачи:

а) постройте отсечка $x^2 = a^2 + b^2 - \left(\sqrt{ab}\right)^2$, т.е. x може да бъде построена като катет в правоъгълен триъгълник с хипотенуза равна на $a^2 + b^2$ и катет $\sqrt{ab}$, а него можем да построим като височина към хипотенузата в правоъгълен триъгълник с хипотенуза $a + b$.

б) постройте триъгълник по дадени a, b и x.

Някои от учениците, обаче, биха се опитали да атакуват проблема директно, т.е. да преобразуват уравнението по следния начин:

$$x^2 = a^2 - ab + b^2 = a^2 - 2\frac{1}{2}ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^0$$

Така те ще сведат задачата до построяването на триъгълник не по три страни, а по две страни и ъгъл между тях.

След тази задача решаването на системата от задача 1 чрез геометрия не би била вече непостижима цел.

Втори начин. Подготвяме учениците чрез задача Б:

Даден е триъгълник ABC и точка D вътрешна за него, като при това $\sphericalangle BDC = 90^0, \sphericalangle ADC = 150^0, AD = a, BD = c, CD = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Намерете AB, BC и AC.

Решение: Ще използваме фигура 4. След изготвянето на чертежа учениците лесно съобразяват, че:

$$AC^2 = a^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2a\frac{b}{\sqrt{3}}\cos 150^0 = a^2 + 2\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{3}$$

$$AB^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 120^0 = c^2 + ac + a^2$$

$$BC^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 + c^2 = \frac{b^2}{3} + c^2$$

Или:

$$AC^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{3} \tag{7}$$

$$AB^2 = c^2 + ac + a^2 \tag{8}$$

$$BC^2 = \frac{b^2}{3} + c^2 \tag{9}$$

Тогава системата (1) – (3) от задача 1 изцяло прилича на системата (7) – (9), като само остава да съобразим, че $AC^2 = 25, AB^2 = 16, BC^2 = 9$. След тази замяна геометричното решаване на системата ще следва естествено и логично.

Щом сме подготвили учениците си за „скока“, независимо дали чрез първия или втория начин, те ще се насладят на радостта от „откривателството“ и сами ще преминат от брега наречен алгебра на брега наречен геометрия, като освен това се убедят за сетен път, че това, с което се занимават е само интересна математика. Струва ми се, че това е разумният компромис между запазване на предизвикателството, красотата и изследователския дух, от една страна, и достъпността на това предизвикателство, от друга.

В този ред от мисли, като че ли се налагат няколко извода:

• математиката не бива да се възприема и съответно преподава като елитарна наука;

• учителите да провокират учениците си и те да изпреварват мисълта на учителя си, а не да я следват пасивно през повечето време (като се използват картинки, предизвикателно условие, аналогии);

• учениците да участват активно в генерирането на нови идеи т.е. да се чувстват въвлечени в „играта“.

Много от тези неща наблюдавах като стремеж да бъдат достигнати на този летен семинар, за който вече споменах. Това ме кара да използвам вече готовите части от подготвяния в САЩ сборник, съдържащ разработените на този семинар теми от раздела „Вписани и описани многоъгълници“ с настоящите ми ученици от 9 клас. Още едно основание за добри очакванияни дава завидно доброто представяне на тези ученици на математическото състезание ARML Powel Contest #1 2000 – 2001.

В заключение бих искала да благодаря на професор Джеймс Шулц от университета в Охайо, който ми помогна да разбера, че има очарование и в по-малките предизвикателства към учениците. Особена благодарност дължа и на г-жа Евгения Сендова за подкрепата и ценните бележки, които допринесоха много за написването на тази статия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Мерзляк, В. Полонский, М. Якир. Неочаквана стъпка или сто и тринадесет красиви задачи. София, Академично издателство „Марин Дринов“, 1994.

[2] S. Chaiklin. Cognitive Studies of Algebra Problem Solving and Learning. In: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra (Eds S. Wagner, C. Kieran), vol. **4**, Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, 1991, 93–114.

[3] R. Davis. Three Ways of Improving Cognitive Studies in Algebra. In: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra (Eds S. Wagner, C. Kieran), vol. **4**, Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, 1991, 115–119.

Стелиана Миткова Кокинова
Първа английска езикова гимназия
бул. „Дондуков“ № 60, София

PRESENTING THE BEAUTY AND CHALLENGE OF MATHEMATICAL PROBLEMS IN A WIDELY ACCESSIBLE FORM – A TOOL FOR MOTIVATING THE STUDENTS

Stelliana Mitkova Kokinova

This paper discusses the controversy between challenge and accessibility in mathematical education as well as the differences between the approaches to mathematical teaching in USA and Bulgaria which became clear during the international symposium "Beautiful Mathematics for Sunny Children" held in August in Varna, Bulgaria. An attempt is made to find a reasonable balance between the elitist and the accessible, between the abstract and the pragmatic, a ballance that will further motivate the students.