МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

ЗА МЕТОДА НА АРИТМЕТИЧНИТЕ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ В МАТЕМАТИКАТА ЗА НАЧАЛНОТО УЧИЛИЩЕ

Здравко В. Лалчев

В съобщението е направен кратък коментар на метода на аритметичните преобразувания в математиката за началното училище. Методът е илюстриран чрез решенията на две задачи от математически конкурси, проведени през 2000 г. в България за ученици от четвърти клас.

Известно е, че конкурсите и състезанията по математика не отминават вече и учениците от началното училище. От самосебе си се разбира, че предложените за тази цел задачи трябва да имат решения, изпълними с ограничения обем от средствата на началната училищна математика. Аритметичните решения на някои от задачите за IV клас неминуемо водят до метода на аритметичните преобразувания. По специално, инверсното прилагане на числови преобразувания, вероятно е единствения аритметичен начин за решаване на поне две от задачите, използвани в практиката на математическите състезания през първото полугодие на 2000 година. Но не само последното обстоятелство провокира интереса към този метод. Разсъжденията по инверсия (от края към началото) на основата на аритметичните преобразувания са естествена предпоставка на аналитико-синтетичния метод в обучението по математика в началното училище.

1. Две задачи за четвъртокласници.

Задача 1. Трима моряци и една маймуна са на необитаем остров. Една вечер те събират всички кокосови орехи и ги слагат в голям чувал. Решават да изчакат до сутринта, за да си ги поделят и лягат да спят.

През нощта един от моряците става, дава един орех на маймуната, разделя орехите на три равни части, взема едната от тях, скрива я, а другите две части връща в чувала. След това се връща да спи, доволен че е взел своя дял. Но той не е единствен. През нощта и вторият моряк прави същото: дава един орех на маймуната, дели на три равни части орехите, скрива едната, връща другите две в чувала и се прибира да спи. После същите действия повтаря и третият моряк.

На сутринта, сякаш нищо не се е случило, тримата моряци заедно дават един орех на маймуната и разделят на три равни части останалите орехи в чувала. Намерете най-малкия брой орехи, с който може да се започне, за да се случи всичко това.

(*Забележка.* Задачата е дадена на конкурсния изпит за постъпване в V клас на Природо-математическа гимназия „Акад. Н. Обрешков“ – гр. Бургас, проведен на 24 юни 2000 година.)

Задача 2. На един остров живеели само таралежи, лисици и змии. Всяко животно се храни веднъж на ден, като всеки таралеж изяжда на закуска по една змия, всяка лисица изяжда на обяд по един таралеж и всяка змия изяжда на вечеря по една лисица. В четвъртък (след вечеря) на острова останала само една змия. Колко животни от всеки вид е имало на острова в понеделник същата седмица (преди закуска), ако през това време не са умрели или не са родени други животни?

(*Забележка.* Това е една от задачите по математика за IV клас на Зимните национални състезания по математика, информатика и лингвистика за ученици от IV до VII клас, проведени от 4 до 6 февруари 2000 г. в Плевен, [Сп. Математика и Информатика, брой 2–3, 2000, стр. 63]).

2. Аритметичните преобразувания – метод на началната училищна математика. Един от най-популярните методи на училищната математика, какъвто е методът на уравненията, в случая, по принцип е приложим, но е неприемлив, поне само за това, че „алгебрата“, необходима за решението, „многократно превишава“ алгебричните знания, дори и на учениците от последния (четвърти) клас на началното училище. Алгебричният модел на тези задачи е твърде сложен и за неговото съставяне и обработка са необходими „високи технически умения“, които учениците от първите четири класа не биха имали възможност да притежават. Следователно средствата с които би могло да бъдат „атакувани“ задачите са единствено аритметичните знания, заложени в програмата по математика в началните класове и по-специално знанията за четирите действия с естествени числа.

Формулираните задачи имат това общо качество, че върху елементите на дадено числено множество, елементите на което не са известни, „действат“ последователно няколко преобразувания (преобразуванията са известни). В резултат на преобразуванията първоначалното множество се преобразува в ново множество, чиито елементи (числа) са известни. При тези условия в задачата се изисква да се намерят елементите на първоначалното множество. По същество това са задачи от релации (в частния случай преобразувания) при които е известно (дадено) второто множество и известна (дадена дескриптивно) релацията (преобразуванието) и трябва да се намери първото множество. За да бъде решена задачата, достатъчно е да се намери обратната релация (обратното преобразувание) и да се приложи към последното (известно) множество, т.е. задачата се решава чрез разсъждения, построени по инверсия (от края към началото). Обикновено, в задачата има повече от едно преобразувание, т.е. няколко преобразувания, които „действат“ последователно (резултантното преобразувание е произведение от няколко преобразувания). Ето защо в решението на задачата е необходимо да се намери обратното преобразувание на произведение от преобразувания. Както е известно: Обратното преобразувание на произведение от преобразувания е произведение на обратните преобразувания, взети в обратен ред.

За учениците от началното училище са известни основните аритметични преобразувания: събиране на „a („$+a$“); изваждане на „a“ („$-a$“.); умножение на „a „(a“.); деление на „a“ („$: a$“.); адитивно (събирателно) допълнение до „a“ („$a-$“); мултипликативно (умножително) допълнение до „a“ („a :“). За удобство шестте числови преобразувания могат да бъдат допълнени и с преобразуванието: „равно на“ (тъждественото преобразувание), което запазва числото. (Това преобразувание може да бъде означено по няколко начина, например, „$+0$“, „-0“, „$.1$“, „: 1“ или „$=$“. Ние ще предпочитаме означението „$=$“.)

За учениците са известни и обратните преобразувания на посочените по-горе числови преобразувания: Обратното преобразувание на събиране на „a“ е изваждане на „a“; Обратното преобразувание на изваждане на „a“ е събиране на „a“.; Обратното преобразувание на умножение на „a“ е деление на „a“; Обратното преобразувание на деление на „a“ е умножение на „a“; Обратното преобразувание на адитивно допълнение до „a“ е адитивно допълнение до „a“; Обратното преобразувание на мултипликативно допълнение до „a“ е мултипликативно допълнение до „a“. Обратното преобразувание на „равно на“ е „равно на“.

При решаване на задачите е целесъобразно да се следва схемата:

1) Построява се модел (аритметичен) на задачата, със средствата на математиката за началното училище, т.е. информацията от задачата се „превежда“ на аритметичен език. За удобство елементите на множествата се изобразяват с квадратчета, а преобразуванията се представят чрез стрелки. Квадратчетата, които представляват известни числа са запълнени със „стойностите“ на съответните елементи, квадратчетата, които отговарят на неизвестни елементи са „празни“. Стрелките, които представляват известни преобразувания са „надписани“ със знака (символа) на съответното преобразувание. Стрелките, които отговарят на неизвестни преобразувания не са надписани. Когато цялата известна информация е представена по описания начин се казва, че е построен аритметичен модел на задачата.

2) Информацията от аритметичния модел на задачата се „обработва“. За целта върху модела се представят и обратните преобразувания, като се поставят обратните стрелки (със съответните „надписи“) и на основата на обратните преобразувания се попълват последователно (в обратен ред) и празните квадратчета. Ако някое преобразувание остава неизвестно то съответното квадратче се попълва въз основа на допълнителната информация, съдържаща се в задачата. Така, като се започне от края се върви към началото.

3) След обработката (окончателната или частична) информацията в модела се получава нова информация в която се съдържа и отговора на задачата. За да се „прочете“ този отговор е необходимо новата информация да се „преведе“ на езика, използван в задачата.

3. Приложение на метода на аритметичните преобразувания (Аритметични решения на задачите 1 и 2)

Решението на задача 1 е представено на таблицата на сх. 1.

Решението на задача 2 е представено на таблицата на сх. 2.

4. Няколко думи в заключение. Методът на аритметичните преобразувания може да бъде прилаган и в случаите, когато предварително не би могло да бъде построен цялостен математически модел на задачата, например, когато не са известни някои от преобразуванията, (както в задача 2). Разбира се, необходимо е да има данни за моделиране поне на „последния ход“, за да може да започне и обработката на частичната информация, заложена в частичния модел. Последното обстоятелство дава възможност моделът да бъде разширяван (от края към началото) като на всяка стъпка се извършва и обработка на „известната“ информацията. В този случай моделирането и обработката на модела се извършва едновременно, като на всяка стъпка едната дейност осигурява другата.

Решение на задача 1

	I моряк						II моряк						III моряк						Тримата моряци				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	□	$\xrightarrow{-1}$	□	$\xrightarrow{:3}$	□	$\xrightarrow{.2}$	□	$\xrightarrow{-1}$	□	$\xrightarrow{:3}$	□	$\xrightarrow{.2}$	□	$\xrightarrow{-1}$	□	$\xrightarrow{:3}$	□	$\xrightarrow{.2}$	□	$\xrightarrow{-1}$	□	$\xrightarrow{:3}$	n
2											!	$\xleftarrow{:2}$	7	$\xleftarrow{+1}$	6	$\xleftarrow{.3}$	2	$\xleftarrow{:2}$	4	$\xleftarrow{+1}$	3	$\xleftarrow{.3}$	1
3																	!	$\xleftarrow{:2}$	7	$\xleftarrow{+1}$	6	$\xleftarrow{.3}$	2
4					!	$\xleftarrow{:2}$	25	$\xleftarrow{+1}$	24	$\xleftarrow{.3}$	8	$\xleftarrow{.2}$	16	$\xleftarrow{+1}$	15	$\xleftarrow{.3}$	5	$\xleftarrow{:2}$	10	$\xleftarrow{+1}$	9	$\xleftarrow{.3}$	3
5																	!	$\xleftarrow{:2}$	13	$\xleftarrow{+1}$	12	$\xleftarrow{.3}$	4
6											!	$\xleftarrow{:2}$	25	$\xleftarrow{+1}$	24	$\xleftarrow{.3}$	8	$\xleftarrow{:2}$	16	$\xleftarrow{+1}$	15	$\xleftarrow{.3}$	5
7																	!	$\xleftarrow{:2}$	19	$\xleftarrow{+1}$	18	$\xleftarrow{.3}$	6
8	79	$\xleftarrow{+1}$	78	$\xleftarrow{.3}$	26	$\xleftarrow{:2}$	52	$\xleftarrow{+1}$	51	$\xleftarrow{.3}$	17	$\xleftarrow{:2}$	34	$\xleftarrow{+1}$	33	$\xleftarrow{.3}$	11	$\xleftarrow{:2}$	22	$\xleftarrow{+1}$	21	$\xleftarrow{.3}$	7

Решение на задача 2

	Понеделник						Вторник						Сряда						Четвъртък						
		з		о		в		з		о		в		з		о		в		з		о		в	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Т 1	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	0
Л 2	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	0
З 3	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{-?}$	□	$\xrightarrow{=}$	□	$\xrightarrow{=}$	1

Т 1	41	$\xleftarrow{=}$	41	$\xleftarrow{+28}$	13	$\xleftarrow{=}$	13	$\xleftarrow{=}$	13	$\xleftarrow{+9}$	4	$\xleftarrow{=}$	4	$\xleftarrow{=}$	4	$\xleftarrow{+3}$	1	$\xleftarrow{=}$	1	$\xleftarrow{=}$	1	$\xleftarrow{+1}$	0	$\xleftarrow{=}$	0
Л 2	28	$\xleftarrow{=}$	28	$\xleftarrow{=}$	28	$\xleftarrow{+19}$	9	$\xleftarrow{=}$	9	$\xleftarrow{=}$	9	$\xleftarrow{+6}$	3	$\xleftarrow{=}$	3	$\xleftarrow{=}$	3	$\xleftarrow{+2}$	1	$\xleftarrow{=}$	1	$\xleftarrow{=}$	1	$\xleftarrow{+1}$	0
З 3	60	$\xleftarrow{+41}$	19	$\xleftarrow{=}$	19	$\xleftarrow{=}$	19	$\xleftarrow{+13}$	6	$\xleftarrow{=}$	6	$\xleftarrow{=}$	6	$\xleftarrow{+4}$	2	$\xleftarrow{=}$	2	$\xleftarrow{=}$	2	$\xleftarrow{+1}$	1	$\xleftarrow{=}$	1	$\xleftarrow{=}$	1

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лалчев З. Математика. Изд. Веда Словена – ЖГ, София, 1995.
[2] Лалчев З. Метод на инверсията. *Начално образование*, **5**, **6**, изд. МОН, 1999.

Здравко Вутов Лалчев
Факултет НПП
Софийски университет „Св. Кл. Охридски“
ул. Шипченски проход 69 А
1574 София, България

ABAOUT THE METHOD OF ARITHMETICAL TRANSFIGURES IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

Zdravko Voutov Laltchev

The method of arithmetical transfigures is represented in the article and it is applied in solving of two mathematical problems desined for competitions in the fouth primary school's degree.