МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

ЕДНА ЗАДАЧА В РАЗВИТИЕ

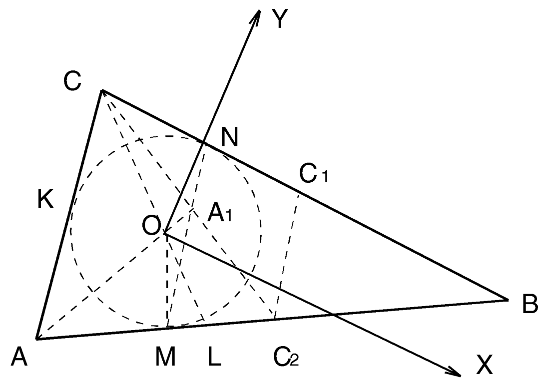
Милен Найденов, Татяна Маджарова

В първата си част тази работа съдържа една задача и шест различни нейни решения, събирани в продължение на години. За всяко едно от тези решения са необходими знания на различни нива. Във втората част на работата е показано как се получават съществено нови задачи като се изменят началните условия на дадената задача.

В триъгълника ABC е вписана окръжност, допираща се до страните AB и BC съответно в точките M и N. Ъглополовящата l на ъгъла BAC пресича правата MN в точка A_1. Да се докаже, че CA_1 е перпендикулярна на l.

Решение.

Първи начин. Продължаваме ъглополовящата CO до пресичането и със страната AB в точка L (фиг. 1).



Фигура 1

В триъгълник OCA_1 $\sphericalangle A_1OC = \sphericalangle OAC + \sphericalangle ACL = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$.

По-нататък ще докажем, че $\sphericalangle OCA_1 = \dfrac{\beta}{2}$, от което непосредствено следва перпендикулярността на AO и CA_1.

Явно, че четириъгълник OA_1NC е вписан в окръжност, защото вече доказахме,че $\sphericalangle A_1OC = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$, и $\sphericalangle CNA_1 = \sphericalangle AMA_1 = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$, т. е. техният сбор е 180°. Диаметър на тази окръжност е отсечката OC, тъй като $\sphericalangle ONC = 90^\circ$. Оттук следва, че и ъгъл $\sphericalangle OA_1C = 90^\circ$, защото е вписан и се измерва със същата дъга, както и $\sphericalangle ONC$.

Втори начин. Означаваме дължините на страните AB, BC и AC съответно с c, a, b. Нанасяме $AC_2 = AC$, $C_2 \in AB$ (фиг. 1). Явно, че точката $A_1 = AO \cap CC_1$ е средата на отсечката CC_2. Върху BC нанасяме $BC_1 = BC_2 = c - b$. Изразяваме $CC_1 = a - BC_1 = a + b - c = 2(p - c)$, като с p сме означили полупериметъра на триъгълник ABC. Знаем, че $CN = p-c$, т.е. точка N е среда на CC_1. Тогава правата през N, успоредна на C_1C_2 е средна отсечка в триъгълник CC_1C_2 и разполовява страната CC_2, т.е. точка $A_2 = MN \cap CC_2$ е среда на CC_2, което води до $A_1 \equiv A_2$. Следователно AA_1 е ъглополовяща и медиана в равнобедрения триъгълник ACC_2, което доказва перпендикулярността на правите AO и CA_1.

Следващият трети начин е предложен в [1], откъдето е взета задачата.

Трети начин. В триъгълник ABC означаваме $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Триъгълник MBN е равнобедрен (фиг. 1). Тогава $\sphericalangle BMN = \dfrac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$. Следователно $\sphericalangle AMA_1 = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$. Триъгълниците AMA_1 и AOC са подобни, тъй като $\sphericalangle MAA_1 = \sphericalangle OAC = \dfrac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle AMA_1 = \sphericalangle AOC = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$.

От подобието следва пропорцията $\dfrac{AC}{AA_1} = \dfrac{AO}{AM}$, която показва още, че и триъгълниците ACA_1 и AOM също са подобни, защото и ъгълът между пропорционалните страни е един и същ $\left(\sphericalangle CAA_1 = \sphericalangle OAM = \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Оттук следва равенство и на ъглите CA_1A и OMA и тъй като ъгъл OMA е прав, то и CA_1A е също прав.

Четвърти начин. В триъгълник AMA_1 (фиг. 1) $\sphericalangle MAA_1 = \dfrac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle AMA_1 = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$. Прилагаме синусова теорема за този триъгълник

$$\frac{AA_1}{\sin\left(90^\circ + \dfrac{\beta}{2}\right)} = \frac{AM}{\sin\left(180^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}\right)}.$$

Тъй като $AM = p - a$, за AA_1 получаваме

$$AA_1 = \frac{(p-a)\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{1}$$

В последното равенство заместваме $\cos\dfrac{\beta}{2}$ и $\sin\dfrac{\gamma}{2}$ с известните формули $\cos\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{p\,(p-b)}{ac}}$ и $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)\,(p-b)}{ab}}$.

Така получаваме

$$AA_1 = (p-a)\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}}.\sqrt{\frac{ab}{(p-a)\,(p-b)}} = \sqrt{\frac{pb\,(p-a)}{c}} = b\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}} = b\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Следователно точка A_1 съвпада с проекцията на точка C върху правата AO, което доказва перпендикулярността на правите AO и CA_1.

Пети начин. В триъгълник AA_1C (фиг. 1) определяме CA_1 по косинусова теорема

$$CA_1^2 = b^2 + AA_1^2 - 2b.AA_1 \cos\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Да означим търсения ъгъл $\sphericalangle AA_1C = \varphi$. Прилагаме косинусова теорема още веднъж за същия триъгълник:

$$b^2 = CA_1^2 + AA_1^2 - 2AA_1.CA_1 \cos\varphi$$

и заместваме CA_1^2 с израза от (2)

$$b^2 = b^2 + AA_1^2 - 2b.AA_1 \cos\frac{\alpha}{2} + AA_1^2 - 2AA_1.CA_1 \cos\varphi,$$

$$2AA_1.CA_1 \cos\varphi = 2AA_1^2 - 2b.AA_1 \cos\frac{\alpha}{2}.$$

В последното равенство делим на $2AA_1 \neq 0$ и получаваме

$$CA_1 \cos\varphi = AA_1 - b.\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Заместваме AA_1 с израза, получен в (1) и намираме

$$CA_1 \cos\varphi = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\left[(p-a)\cos\frac{\beta}{2} - b\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]. \tag{3}$$

Но $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}$, $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{ab}}$. Тогава

$$(p-a)\cos\frac{\beta}{2} - b\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = (p-a)\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}} - b\,(p-a)\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}} =$$

$$(p-a)\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}} - (p-a)\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{ac}} = 0,$$

което съгласно (3) води до $\cos\varphi = 0$, т.е. перпендикулярност на правите CA_1 и AO.

Шести начин. За доказателството на перпендикулярността на двете прави ще използваме аналитична геометрия. Избираме координатна система XOY така, че $OX \| NB$ и $OY \equiv ON$ (фиг. 1). Приемаме, че радиусът на вписаната окръжност е единица, т.е. BC има уравнение $y = 1$. Ако означим съответно с α_1 и α_2 големините на ъглите, които OK и OM сключват с оста OX, тогава допирните точки имат съответно координати $N(0,1)$, $K\,(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1)$, $M\,(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)$, а нормалните уравнения на правите AC и AB са съответно

$$AC : x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - 1 = 0,$$

$$AB : x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - 1 = 0.$$

От уравненията на страните на триъгълника ABC лесно можем да определим координатите на върховете му след решаване на съответните системи. Така намираме, че

$$A\left[\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}, \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}\right], \quad B\left[\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}, 1\right], \quad C\left[\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}, 1\right].$$

Тогава AO има уравнение $y = x\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, т.е. ъгловият коефициент на тази права е $k_{AO} = \operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. Намираме координатите на точка A_1, като пресечна точка на правите AO и MN. Правата MN има уравнение $y = \dfrac{-1 + \operatorname{tg}\dfrac{\alpha_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{\alpha_2}{2}}x + 1$. Като решим системата от уравненията на правите AO и MN получаваме

$$x_{A_1} = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}},$$

$$y_{A_1} = \frac{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}.$$

Пресмятаме ъгловия коефициент на правата CA_1. $k_{CA_1} = \dfrac{y_{A_1} - y_C}{x_{A_1} - x_C}$ и след преобразувания получаваме $k_{CA_1} = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}$, т.е. $k_{CA_1}.k_{AO} = -1$. Известно е, че това е условието за перпендикулярност на правите CA_1 и AO.

Тези шест начина дават възможност да прогнозираме, че ако използваме метода за пресмятане информацията на една математическа задача, изложен в [2], то може да очакваме оценка около 1.7918 *ната*, която е много висока и показва изключителните качества на тази задача.

Някои от резултатите, получени дотук, ни дават възможност да изведем интересни метрични зависимости в триъгълника.

Нека означим $B_1 = NK \cap BO$ и $C_1 = MK \cap CO$. Явно, че $CA_1 = b\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $AB_1 = c\sin\dfrac{\beta}{2}$, $BC_1 = a\sin\dfrac{\gamma}{2}$, $AA_1 = b\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $BB_1 = c\cos\dfrac{\beta}{2}$ и $CC_1 = a\cos\dfrac{\gamma}{2}$. Тогава от известните формули за синуси и косинуси на половинките ъгли в триъгълника получаваме

$$CA_1.AB_1.BC_1 = abc\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = rS, \tag{11}$$

$$AA_1.BB_1.CC_1 = abc\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = pS. \tag{12}$$

От (11) и (12) следва

$$AA_1.BB_1.CC_1.CA_1.AB_1.BC_1 = S^3. \tag{13}$$

Ако лицата на триъгълниците AA_1C, BB_1A, CC_1B са съответно $S_1,\ S_2,\ S_3$, тогава лесно определяме $S_1 = \dfrac{b^2}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b^2}{4}\sin\alpha = S\dfrac{b}{2c}$, $S_2 = S\dfrac{c}{2a}$, $S_3 = S\dfrac{a}{2b}$. От тези формули веднага следва

$$8S_1.S_2.S_3 = S^3. \tag{14}$$

Тези резултати дават възможност да формулираме следните задачи:

Задача 1. Даден е триъгълник с лице S, дължини на страните $a,\ b,\ c$ и ъгли съответно срещу всяка от тях $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. Построени са правоъгълни триъгълници, чиито хипотенузи са с дължини $a,\ b,\ c$ и имат съответно остри ъгли $\dfrac{\alpha}{2},\ \dfrac{\beta}{2},\ \dfrac{\gamma}{2}$ и лица $S_1,\ S_2,\ S_3$. Тогава $S_1,\ S_2,\ S_3$ са корени на уравнението

$$8a^2b^2c^2x^3 - 4abcS\left(a^3+b^3+c^3\right)x^2 + 2S^2\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right)x - a^2b^2c^2S^3 = 0.$$

Задача 2. (Аналог за външно вписана окръжност) В триъгълник ABC точките

N_1, M_1 и K_1 са допирните точки на външно вписаната окръжност $k_a(O_a, r_a)$ със страната BC и съответно с продълженията на AB и AC. Нека $AO_a \cap M_1N_1 = A_1$. Да се докаже, че CA_1 е перпендикулярна на AO.

По-надолу ще използваме означенията въведени в тази задача и в цитираната задача от [1].

Следствия.

1°. Правите M_1N_1, MN и AO се пресичат в една точка.

2°. Нека $CA_1 \cap AB = T$. Тогава триъгълник ATC е равнобедрен.

3°. Правите CT, MK и M_1K_1 са успоредни.

4°. Точките O, O_a и $A_1 = MN \cap M_1N_1$ лежат върху една права ($AO \equiv l_a$).

5°. Правите TK, MC и AO се пресичат в една точка.

6°. Правите TK_1, M_1C и AO се пресичат в една точка.

7°. Ако в следствие 2° зададем точка A_1 като $A_1 = MN \cap M_1N_1$, то може да се получи следната задача: В триъгълник ABC точка $A_1 = MN \cap M_1N_1$ и $T = CA_1 \cap AB$. Да се докаже, че триъгълник ACT е равнобедрен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Русев, Св. Савчев. Сборник от задачи по геометрия за факултативна подготовка. ДИ „Народна просвета„, София, 1990, 116.

[2] М. Н. Найденов. Метод за пресмятане информацията на една математическа задача. *Математически форум*, бр. 2, април-юни 2000 г., 51–56.

Милен Найденов Найденов
Татяна Стефанова Маджарова
9000 Варна, ул. „Васил Друмев“, 73
Висше Военноморско училище „Н. Вапцаров“
Катедра „Математика, физика и информатика“
e-mail: `madjarova@mail.com`

A PROBLEM IN DEVELOPMENT

Milen Naydenov, Tatiana Madjarova

At first we find six ways of proving a problem. Knowledge from different levels is necessary for each of these proofs. Further we show how new problems can be received if some of the initial conditions of the given problem are changed.