МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

РАЗЛИКИ В ИЗГРАЖДАНЕТО НА КОМБИНАТОРНИ УМЕНИЯ У ИЗЯВЕНИТЕ УЧЕНИЦИ В БЪЛГАРИЯ И САЩ

Красимир Ангелов Пенев

Имайки конкретен опит като участник в математически олимпиади, като учител по математика и като редактор в научно-популярно математическо списание („Математика“), за мен беше особено интересно да стана преподавател и треньор на отбора по математика в едно от най-реномираните американски средни училища. Едно от първите неща, които ме впечатлиха в новата ми работа бяха отчетливите разлики между комбинаторните традиции в обучението в България и Съединените щати.

Цялостно сравнение, разбира се, е възможно само след обстоен анализ на множество основни принципи и детайли. В тази статия ще се ограничим с подробното разглеждане на една нетривиална задача. Тя е интересна и с историята си, и с това, че особено ясно илюстрира разликите между „българския“ и „американския“ подход към комбинаториката на ученическа възраст.

В работите си по минимални абелеви топологични групи покойният Иван Проданов използва като лема твърдението, че никоя безкрайна абелева група не е обединение на множества, които са „малки“ в определен смисъл. Доказателството му е кратко, но използва аксиомата на избора. Проданов се заинтересува от елементарно доказателство с цел популяризиране на този резултат. След време италианският математик Дзаниер успя да намери забележително, макар и трудно, елементарно решение за случая на произволна безкрайна абелева група G.

В памет на Иван Проданов твърдението бе поместено като конкурсна задача в [1], като в качеството на групата G бе избрана групата на двумерните вектори относно събирането. Формулировката на задачата е следната:

> Дадени са четири подмножества $A_1, A_2, \dots, A_4$ на равнината със следното свойство: за всяко $i = 1, 2, 3, 4$ съществуват пет такива транслации, че образите на A_i при тези транслации два по два нямат общи точки. Да се докаже, че съществува точка в равнината, която не принадлежи на нито едно от множествата A_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Както се очакваше, задачата се оказа трудна за участниците в конкурса, между които имаше и златни медалисти на международни олимпиади.

По-късно вариант на същата задача бе включен във второто издание на книгата на Проданов [2]. В него става въпрос за групата G на целите числа. Ще се спрем накратко на решението по забележителната идея на Дзаниер. Започваме с точната формулировка.

Едно множество A от цели числа се нарича *k-малко* за някое цяло положително k, ако съществуват k непресичащи се транслации на това множество, т.е. ако има такива k цели числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, че $(a_i + A) \cap (a_j + A) = \emptyset$ при $i \neq j$. Например членовете на всяка целочислена аритметична прогресия с разлика d е d-малко множество.

Едно подмножество A на $\mathbb{Z}$ ще наричаме *малко*, ако то е k-малко за всяко $k = 1, 2, \ldots$. Твърдението на Проданов гласи: *Множеството $\mathbb{Z}$ не може да се представи като обединение на краен брой малки множества.* Всъщност може да се твърди нещо повече:

> *Ако $n \geq 1$ е цяло число, то $\mathbb{Z}$ не може да се представи като обединение на n на брой $(n+1)$-малки множества.*

Допускаме противното: нека $\mathbb{Z}$ е обединението на непресичащите се $(n+1)$-малки множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$. По дефиниция съществуват такива цели числа $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, a_{i,n+1}$, че „транслациите“ $a_{i1}+A_i, a_{i2}+A_i, \ldots, a_{in} + A_i, a_{i,n+1} + A_i$ на A_i са две по две непресичащи се множества. Естествено е да предполагаме, че ключът към решението се крие именно в числата a_{ij}, понеже в общия случай за множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не е известно нищо друго. И наистина е така, както показва следното впечатляващо приложение на принципа на чекмеджетата.

Числата a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, образуват матрица с n реда и $n+1$ стълба. Във всеки ред избираме по един елемент и образуваме сумата на така избраните елементи. Формално казано, на всяка редица $\alpha = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ с $1 \leq j_\nu \leq n+1$ за всяко $\nu = 1, 2, \ldots, n$ съпоставяме числото

$$x_\alpha = a_{1j_1} + a_{2j_2} + \cdots + a_{nj_n}.$$

Тъй като $\mathbb{Z}$ е обединение на множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$, всяко от числата x_α се съдържа в някое от тях.

За редицата α има $(n+1)^n$ възможности. Сега да забележим, че $(n+1)^n/n > (n+1)^{n-1}$: тогава съгласно принципа на Дирихле някое от множествата A_i съдържа *повече* от $(n+1)^{n-1}$ суми, които имат вида x_α. Нека например A_1 е такова множество.

Следва повторно приложение на принципа на чекмеджетата. Ако $\alpha=(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ е която и да е от разглежданите редици, за нейната „втора част“ $(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ има *точно* $(n+1)^{n-1}$ възможности. Тогава, щом в A_1 има повече от $(n+1)^{n-1}$ суми x_α, втората част $(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ на някои две от тях е една и съща.

И така: съществуват две *различни* редици α и β от вида

$$\alpha = (j_1', j_2, j_3, \ldots, j_n), \quad \beta = (j_1'', j_2, j_3, \ldots, j_n),$$

за които съответните числа x_α и x_β принадлежат на множеството A_1. Тогава

$$x_\alpha - a_{1j_1'} = a_{2j_2} + a_{3j_3} + \cdots + a_{nj_n} = x_\beta - a_{1j_1''},$$

ето защо $a_{1j_1''} + x_\alpha = a_{1j_1'} + x_\beta$. Но $x_\alpha \in A_1$, $x_\beta \in A_1$, следователно числото $x = a_{1j_1''} + x_\alpha = a_{1j_1'} + x_\beta$ принадлежи както на $a_{1j_1'} + A_1$, така и на $a_{1j_1''} + A_1$. Последното противоречи на дефиницията на малко множество, с което твърдението е доказано.

Още веднъж подчертаваме, че множеството на целите числа има значение само защото е комутативна група относно събирането. Горното доказателство се пренася без изменение за случая на произволна безкрайна абелева група.

Историята получи неочаквано развитие, когато задачата бе пренесена на американска земя. През 1994 г. тя е била дадена на контролна работа при подготовката на американския отбор за международната олимпиада. На пръв поглед формулировката ѝ е само незначително променена:

- Става дума не за групата $\mathbb{Z}$, а за множеството $\mathbb{N}$ на целите неотрицателни числа. Дефиницията на n-малко множество е същата.

- Явно е формулирано: да се докаже, че $\mathbb{N}$ не може да се представи като обединение на n на брой $(n+1)$-малки множества. Това е съществено неявно упътване.

Тези две „незабележими“ разлики коренно променят ситуацията. Очаквало се е задачата да бъде най-трудната в състезателната тема, но за всеобщо учудване повечето от половината участници са я решили бързо и успешно, прилагайки пораждащи функции. Подобно нещо не е било предвидено от никого – такъв подход съществува *единствено* за множеството $\mathbb{N}$!

И така, нека множеството $\mathbb{N}$ на целите неотрицателни числа е представено като обединение на n на брой $(n+1)$-малки множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$. За всяко $k=1,2,\ldots,n$ да разгледаме степенния ред

$$u_k(x) = \sum_{a\in A_k} x^a,$$

който е пораждащата функция на това множество. (Ако A_k е крайно множество, $u_k(x)$ е полином.) Пораждащата функция на самото множество $\mathbb{N}$ е безкрайната аритметична прогресия

$$x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^m + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} x^m.$$

Както е известно, тя определя сходящ степенен ред при $|x| < 1$. Тъй като предстои да работим с неравенства, удобно е да разгледаме дори само стойностите на x от интервала $(0,1)$. Така не налагаме никакво съществено ограничение на разглежданията. Ролята на условието $0 < x < 1$ се свежда до това просто да гарантира, че всички степенни редове по-долу имат *положителни* членове, и освен това – че са сходящи.

Разглеждаме сумата $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$, която също представлява степенен ред:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m + \cdots \,.$$

Понеже множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ покриват $\mathbb{N}$, всяко $m \in \mathbb{N}$ принадлежи на някое множество A_k. Тогава едночленът x^m участва като член в развитието на $u_k(x)$. Ето защо всички коефициенти c_m, $m = 0,1,2,\ldots$, са цели *положителни* числа. В частност, те са по-големи или равни от съответните коефициенти на прогресията $\sum_{m=0}^{\infty} x^m$

– пораждащата функция на $\mathbb{N}$. Оттук следва, че ако $0 < x < 1$, то

$$(\star)\qquad u_1(x) + \cdots + u_n(x) \geq 1 + x + \cdots + x^m + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Да отбележим изрично, че този извод важи за пораждащите функции на произволни множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, чието обединение съвпада с $\mathbb{N}$. Именно този факт, познат на американските олимпийци, е бил решаващ за успешната атака на задачата.

Множествата A_k са $(n+1)$-малки, т.е. всяко A_k има $n+1$ две по две непресичащи се транслации $a_{k1} + A_k,\ a_{k2} + A_k,\ \ldots,\ a_{k,n+1} + A_k$. Пораждащите функции на току-що изброените множества очевидно са

$$x^{a_{k1}} \left(\sum_{a \in A_k} x^a \right) = x^{a_{k1}} u_k(x),\ x^{a_{k2}} u_k(x),\ \ldots,\ x^{a_{k,n+1}} u_k(x).$$

Условието транслациите да са две по две непресичащи се означава, че *в сумата на техните пораждащи функции всеки член x^m участва с коефициент 0 или 1.* Ето защо при $x \in (0,1)$ имаме

$$\left(x^{a_{k1}} + x^{a_{k2}} + \cdots + x^{a_{k,n+1}}\right) u_k(x) \leq \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \quad \text{т.е.}$$

$$u_k(x) \leq \frac{1}{(1-x)\left(x^{a_{k1}} + x^{a_{k2}} + \cdots + x^{a_{k,n+1}}\right)}$$

за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$. Нека сега x клони към 1 със стойности, по-малки от 1. Тогава всяко от събираемите $x^{a_{k1}}, x^{a_{k2}}, \ldots, x^{a_{k,n+1}}$ също клони към 1, а сумата им — към $n+1$. Ето защо има такова $x_k \in (0,1)$, че при $x \in (x_k, 1)$ е изпълнено неравенството $x^{a_{k1}} + x^{a_{k2}} + \cdots + x^{a_{k,n+1}} > n$, откъдето следва $u_k(x) < \dfrac{1}{n(1-x)}$ за $x \in (x_k, 1)$. Число x_k с такова свойство съществува за всяко $k = 1, \ldots, n$, и ако положим $x_0 = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, получаваме $u_k(x) < \dfrac{1}{n(1-x)}$ за всяко $x \in (x_0, 1)$. Тогава обаче за $x \in (x_0, 1)$ имаме $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) < \dfrac{1}{1-x}$, а това противоречи на $(\star)$.

Разбира се, примитивно е да побързаме с извода, че американските ученици са много по-добре образовани и подготвени от българските си връстници. Резултатът им от контролното се дължи в решаваща степен на формулировката. Мощният апарат на пораждащите функции е просто неприложим в случаите, с които започнахме. Затова едва ли може да се съмняваме, че при естествена формулировка на задачата резултатите нямаше да бъдат съществено различни от онези, които наблюдавахме в България през 80-те години. Несъмнено тази *обективно* трудна задача е предизвикателство и за професионални математици.

По-важно е да си дадем сметка за друго. Комбинаторните традиции в двете страни са коренно различни. Изявените ученици в България се подготвят относително бавно и продължително, развивайки комбинаторния си усет в продължение на години. Това става с добре подбрани и проверени от практиката примери – лесни или трудни, но напълно елементарни по дух, без „висша техника“ от рода на пораждащите функции. Роля за това играе и достъпната за учениците литература, в която те практически липсват. Струва ми се, че дори в последните години фамилиарни с този мощен апарат са само най-добрите българските олимпийци.

Олимпийското движение в САЩ има много по-кратка история. Един надарен ученик там рядко има друга възможност за съдържателна подготовка освен да изучава внимателно задачите от предишни състезания и коментарите към тях. Не е тайна, че голяма част от тези трудни задачи са съпътстващ продукт на научна работа. В това няма нищо странно, но авторите им рядко се стараят да изложат доказателствата достъпно, на елементарен език. Математическата асоциация на Америка издава специални поредици от книги за математически състезания и за популяризиране на математиката въобще. От тях виждаме, че в рамките на добрия тон е използването на съвсем специализирани знания в решенията на „ученически“ задачи. И от изложението далеч не става ясно дали те имат елементарни решения. Тази и други причини изглежда са довели дотам, че добрите ученици в средното училище съзнателно и целенасочено се занимават с такъв неприсъщ за възрастта им апарат. Бих добавил още: неприсъщ и за общото равнище на математическото образование в Съединените щати.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Математика*, **10** (1985), 48–49.
[2] Ив. Проданов. Принцип на Дирихле. София, „Народна просвета“, 1988.

Krassimir A. Penev
3135 Decatur Avenue, Apt. 32
Bronx, New York 10467, USA
e-mail: krassi@worldnet.att.net

DIFFERENCES IN BUILDING COMBINATORIAL SKILLS WITH TALENTED STUDENTS IN BULGARIA AND THE USA

Krassimir Angelov Penev

Having the specific experience of a mathematical olympiad contestant and of an editor of a mathematical journal (*Matematika*), I found it particularly interesting to become a teacher and a coach of the mathematical team in one of the top American high schools. One of the first things to impress me were the apparent differences between the traditions in combinatorics teaching in Bulgaria and the USA.

A comprehensive comparison is of course possible only after a painstaking analysis of a multitude of basic principles and details. In this article we restrict ourselves to a detailed consideration of a nontrivial problem. For one thing, it is interesting with its history. For another, it clearly illuminates the differences between the "Bulgarian" and the "American" approach to high-school combinatorics.