МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001
Proceedings of Thirtieth Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 8–11, 2001

ОБРАТНА ТЕОРЕМА НА ТРИСЕКТОРНАТА ТЕОРЕМА НА МОРЛЕЙ*

Грозьо Станилов, Мая Стоянова

В работата даваме едно елементарно доказателство на обратната теорема на теоремата на Морлей за трисектрисите на произволен триъгълник в Евклидовата геометрия.

Франк Морлей (Frank Morley, 1860-1937) открива през 1899 една изящна теорема от елементарната геометрия на Евклидовата равнина, носеща неговото име.

Теорема. *Пресечните точки на прилежащите към страните на произволен триъгълник трисектриси, са върхове на равностранен триъгълник.*

Съществуват изключително много доказателства на тази теорема [1]. Познати ни са и две работи, в които тази теорема се обръща. Те обаче се базират и на факти, които не са обект на училищната математика [2], [3].

Тук ние даваме едно доказателство, което е лишено от този недостатък. Да разгледаме произволен триъгълник ABC и в него да означим

$$\sphericalangle A=\alpha,\quad \sphericalangle B=\beta,\quad \sphericalangle C=\gamma;\qquad AB=c,\quad BC=a,\quad CA=b.$$

Нека k_i, m_i, n_i са числа между 0 и 1 за $i=1,2,3$ и такива, че

$$\sum_{i=1}^{3} k_i=1,\quad \sum_{i=1}^{3} m_i=1,\quad \sum_{i=1}^{3} n_i=1. \tag{0}$$

Да разделим $\sphericalangle CAB=\alpha$ на три равни части, равни съответно на $k_1\alpha, k_2\alpha, k_3\alpha$ и да постъпим по същия начин с ъглите $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCA$:

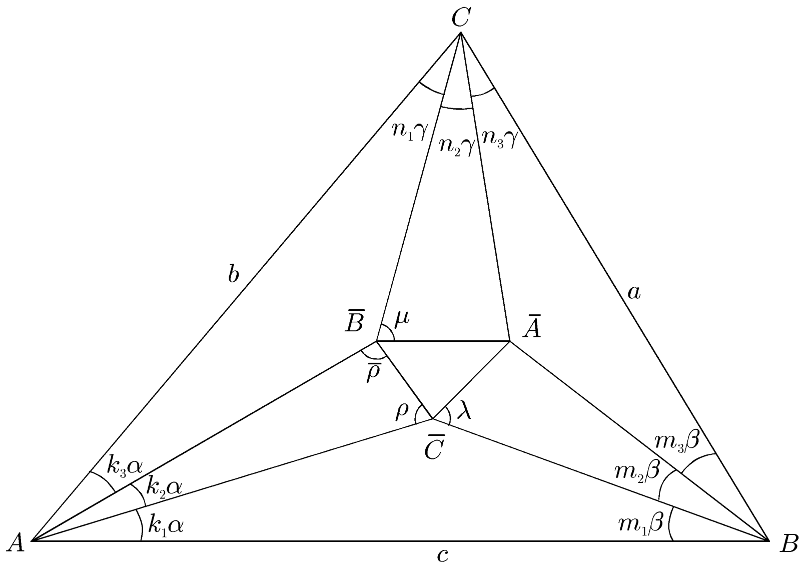
$\sphericalangle ABC=\beta$ да разделим на $m_1\beta, m_2\beta, m_3\beta$,

$\sphericalangle BCA=\gamma$ да разделим на $n_1\gamma, n_2\gamma, n_3\gamma$. (черт.1):

Прилежащите към страните на триъгълника лъчи, с които направихме това деление на ъглите, определят триъгълник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ във вътрешността на триъгълника ABC. Разглеждаме триъгълниците $AB\bar{C}, BC\bar{A}, CA\bar{B}$ и от синусовата теорема получаваме равенствата:

$$\begin{aligned}
A\bar{C}&=\frac{c\sin(m_3\beta)}{\sin(k_1\alpha+m_3\beta)},\quad & B\bar{C}&=\frac{c\sin(k_1\alpha)}{\sin(k_1\alpha+m_3\beta)},\\
A\bar{B}&=\frac{b\sin(n_1\gamma)}{\sin(n_1\gamma+k_3\alpha)},\quad & C\bar{B}&=\frac{b\sin k_3\alpha)}{\sin(n_1\gamma+k_3\alpha)},\\
B\bar{A}&=\frac{a\sin(n_3\gamma)}{\sin(n_3\gamma+m_1\beta)},\quad & C\bar{A}&=\frac{a\sin(m_1\beta)}{\sin(n_3\gamma+m_1\beta)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

*Частично финансирана от Националния фонд за научни изследвания, договор ММ 809/98.



Черт. 1

От тези равенства и косинусовата теорема се вижда, че страните $\bar{A}\bar{B}, \bar{B}\bar{C}, \bar{C}\bar{A}$ са функции на страните и ъглите на триъгълника ABC и на числата k_i, m_i, n_i. От синусовата теорема за триъгълниците $C\bar{A}\bar{B}, A\bar{B}\bar{C}$ и $B\bar{C}\bar{A}$ намираме:

$$\bar{A}\bar{B} = C\bar{A}\frac{\sin(n_2\gamma)}{\sin\mu}, \qquad \bar{B}\bar{C} = A\bar{B}\frac{\sin(k_2\alpha)}{\sin\rho}, \qquad \bar{C}\bar{A} = B\bar{A}\frac{\sin(m_2\beta)}{\sin\lambda}. \tag{2}$$

От синусовата теорема за триъгълниците $C\bar{A}\bar{B}, A\bar{B}\bar{C}$ и $B\bar{C}\bar{A}$ получаваме равенствата:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}\mu &= \frac{C\bar{B} - C\bar{A}\cos(n_2\gamma)}{C\bar{A}\sin(n_2\gamma)}, \quad \operatorname{cotg}\rho = \frac{A\bar{C} - A\bar{B}\cos(k_2\alpha)}{A\bar{B}\sin(k_2\alpha)}, \\ \operatorname{cotg}\lambda &= \frac{B\bar{C} - B\bar{A}\cos(m_2\beta)}{B\bar{A}\sin(m_2\beta)}, \quad \operatorname{cotg}\bar{\rho} = \frac{A\bar{B} - A\bar{C}\cos(k_2\alpha)}{A\bar{C}\sin(k_2\alpha)}. \end{aligned} \tag{3}$$

С помощта на косинусовата теорема за същите триъгълници следват:

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{B}^2 &= C\bar{B}^2 + C\bar{A}^2 - 2C\bar{B}C\bar{A}\cos(n_2\gamma), \\ \bar{B}\bar{C}^2 &= A\bar{C}^2 + A\bar{B}^2 - 2A\bar{C}A\bar{B}\cos(k_2\alpha), \\ \bar{C}\bar{A}^2 &= B\bar{A}^2 + B\bar{C}^2 - 2B\bar{A}B\bar{C}\cos(m_2\beta). \end{aligned} \tag{4}$$

Ще докажем следната

Теорема. *За всеки даден триъгълник ABC полученият по описания начин триъгълник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ е равностранен тогава и само тогава, когато $k_i = m_i = n_i = \frac{1}{3}$ за $i = 1, 2, 3,$, т.е. когато делящите лъчи са трисектрисите на ъглите на дадения триъгълник.*

Доказателство: I. Разглеждаме фамилията от триъгълници ABC, за които

$b = c =$ const и ъгъл $\alpha \to 0$. Тогава за ъглите β и γ и за производните им имаме:

$$\beta = \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \qquad \beta' = \gamma' = -\frac{1}{2}.$$

Страната a е функция на ъгъл α и от синусовата теорема за триъгълника ABC получаваме

$$a = 2b \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \qquad a' = b \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

и следователно при $\alpha \to 0$, $a' \to b$.

От условието триъгълникът $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ да е равностранен:

(5) $$\bar{A}\bar{B}\,(\alpha) = \bar{B}\bar{C}\,(\alpha) = \bar{C}\bar{A}\,(\alpha)\,, \alpha \in (0, \pi)\,.$$

Следват и равенствата

$$\left(\bar{A}\bar{B}\right)'(\alpha) = \left(\bar{B}\bar{C}\right)'(\alpha) = \left(\bar{C}\bar{A}\right)'(\alpha)\,,$$

и в частност

(6) $$\left(\bar{A}\bar{B}\right)'(0) = \left(\bar{B}\bar{C}\right)'(0) = \left(\bar{C}\bar{A}\right)c\,(0)\,.$$

Възползвайки се от равенствата (1) до (4) и от изразите за техните производни при $\alpha \to 0$, последните равенства приемат вида:

(7) $$\frac{k_2}{\sin\rho\,(0)} = \frac{\sin\left(m_1\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n_2\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(n_3\frac{\pi}{2} + m_1\frac{\pi}{2}\right)\sin\mu\,(0)} = \frac{\sin\left(n_3\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(m_2\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(n_3\frac{\pi}{2} + m_1\frac{\pi}{2}\right)\sin\lambda\,(0)}.$$

При направените предположения от (2) получаваме

(8)
$$\operatorname{cotg}\rho\,(0) = \frac{k_3 \operatorname{cotg}\left(n_1\frac{\pi}{2}\right) - k_1 \operatorname{cotg}\left(m_3\frac{\pi}{2}\right)}{k_2}$$

$$\operatorname{cotg}\bar{\rho}\,(0) = \frac{-k_3 \operatorname{cotg}\left(n_1\frac{\pi}{2}\right) + k_1 \operatorname{cotg}\left(m_3\frac{\pi}{2}\right)}{k_2}$$

$$\operatorname{cotg}\mu\,(0) = \frac{k_3 \sin\left(n_3\frac{\pi}{2} + m_1\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(m_1\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n_1\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n_2\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(m_1\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n_1\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n_2\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\operatorname{cotg}\lambda\,(0) = \frac{k_1 \sin\left(n_3\frac{\pi}{2} + m_1\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(m_3\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n_3\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(n_2\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(m_3\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n_3\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n_2\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Ние разглеждаме фамилия от триъгълници ABC, за които страните b, c са фиксирани и равни, и тъй като $A\bar{C}\,(0) = c = b = A\bar{B}\,(0)$, то триъгълникът $A\bar{B}\bar{C}$, разглеждан като функция на α, е равнобедрен при $\alpha \to 0$. Тогава $\rho\,(0) = \bar{\rho}\,(0) = \dfrac{\pi}{2}$ и следователно $\operatorname{cotg}\rho\,(0) = 0$. От последното равенство и равенство (8) получаваме

(9) $$k_1 \operatorname{cotg}\left(m_3\frac{\pi}{2}\right) = k_3 \operatorname{cotg}\left(n_1\frac{\pi}{2}\right).$$

От друга страна, ъгълът λ може да се изрази по следния начин

$$\lambda = 2\pi - \left(\frac{\pi}{3}\right) - \rho(\alpha) - \sphericalangle B\bar{C}A = 2\frac{\pi}{3} - \rho(\alpha) + k_1\alpha + m_3\beta$$

и при $\alpha \to 0$ получаваме

$$\lambda(0) = \frac{\pi}{6} + m_3\frac{\pi}{2}.$$

Аналогично имаме:

$$\mu(0) = \frac{\pi}{6} + n_1\frac{\pi}{2}.$$

II. Сега разглеждаме фамилията от триъгълници ABC, за които отново страните $b = c$ са фиксирани, но този път $\alpha \to \pi$.

Тогава за ъглите β и γ при $\alpha \to \pi$ имаме

$$\beta = \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \to \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0, \quad \beta c = \gamma c = -\frac{1}{2}.$$

За страната а при $\alpha \to \pi$ имаме $a \to 2b$, $ac \to 0$.

Сега от равенство (5) при $\alpha \to \pi$ получаваме

$$\bar{A}\bar{B}(\pi) = \bar{B}\bar{C}(\pi) = \bar{C}\bar{A}(\pi). \tag{10}$$

Разписваме тези равенства, използваме отново (1) до (4), и извършваме граничен преход при $\alpha \to \pi$. Така получаваме равенствата:

$$\left(\bar{A}\bar{B}\right)^2(\pi) = b^2\frac{(n_3 - m_1)^2}{(n_3 + m_1)^2}, \quad \left(\bar{A}\bar{C}\right)^2(\pi) = b^2\frac{(m_1 - n_3)^2}{(n_3 + m_1)^2}, \quad \left(\bar{B}\bar{C}\right)^2(\pi) = 0. \tag{11}$$

Тогава от равенството (10) следва, че $n_3 = m_1$ и чрез циклична замяна получаваме:

$$k_3 = n_1, \quad m_3 = k_1, \quad n_3 = m_1. \tag{12}$$

Сега от (9) имаме

$$k_1 \operatorname{cotg}\left(k_1\frac{\pi}{2}\right) = n_1 \operatorname{cotg}\left(n_1\frac{\pi}{2}\right) = m_1 \operatorname{cotg}\left(m_1\frac{\pi}{2}\right). \tag{13}$$

Разглеждаме функцията

$$F(x) = x \operatorname{cotg}\left(x\frac{\pi}{2}\right), \quad x \in (0,1).$$

Тя е строго намаляваща и $F(0) = \dfrac{2}{\pi}$, $F(1) = 0$.

От (13) следват $m_1 = m_3 = n_1 = n_3 = k_1 = k_3$.

Сега от (7) следва равенството

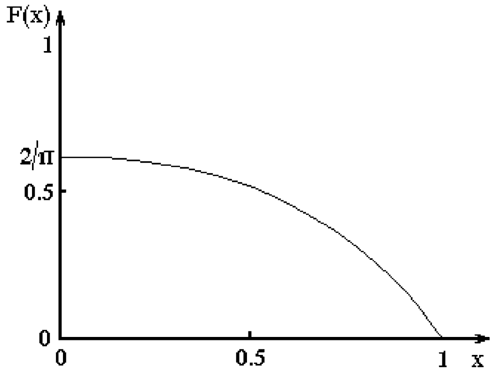
$$\frac{\sin\left(k_2\frac{\pi}{2}\right)}{k_2} = \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{6} + m_1\pi\right), \tag{14}$$

от което ще докажем, че $m_1 = k_2$. Въвеждаме функциите

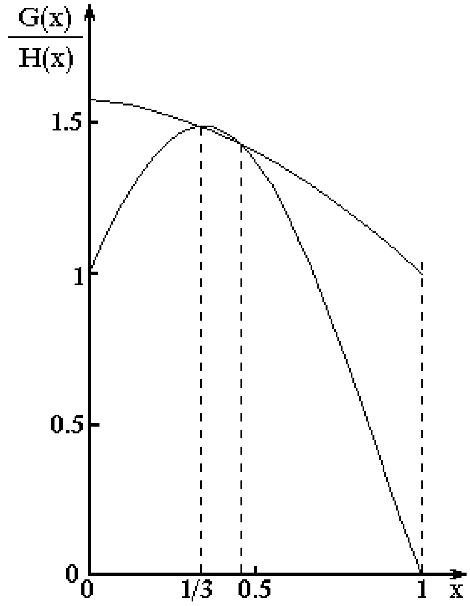
$$G(x) = \frac{\sin\left(x\frac{\pi}{2}\right)}{x}, \quad x \in (0,1)$$

$$H(x) = \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{6} + x.\pi\right), \quad x \in (0,1)$$

Графиките на тези функции са показани на черт. 3.



Черт. 2



Черт. 3

Следва, че те се пресичат при $x = \dfrac{1}{3}$, откъдето следва $m_1 = k_2$, и при $x_0 \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$, за който началните условия (0) са нарушени. В първия случай следват равенствата $k_i = m_i = n_i = \dfrac{1}{3}$ за $i = 1, 2, 3,$, с което теоремата е доказана.

Ще отбележим, че използването на компютри може да бъде избегнато, но това би направило доказателството по-малко достъпно за ученика.

ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Oakley Cletus, C. Baker Justine. The Morley Trisector Theorem. *American Mathematical Monthly*, **85** (1978), 737–745.

[2] T. D. Y. Kleven. Morley's theorem and a converse. *American Mathematical Monthly*, **85** (1978), 100–105.

[3] Wong Yung-Chaw, Tsang Kai-Man. A strong converse of Morley's trisector theorem. *American Mathematical Monthly*, **89** (1982), 642–653.

G. Stanilov
University of Sofia "St. Kl. Ohridski"
Faculty of Mathematics and Informatics
5, Blvd. G. Bourchier
1164 Sofia, Bulgaria
e-mail: stanilov@fmi.uni-sofia.bg

M. Stoyanova
University of Sofia “St. Kl. Ohridski”
Faculty of Mathematics and Informatics
5, Blvd. G. Bourchier
1164 Sofia, Bulgaria
e-mail: stoyanova@fmi.uni-sofia.bg

A CONVERSE THEOREM OF MORLEY’S TRISECTOR THEOREM

Grozio Stanilov, Maya Stoyanova

In the paper we give an elementary proof of the converse theorem of Morley’s trisector theorem in the Euclidean geometry. Among other things as sinus-and cosine law, elementary analysis, we use also computer graphic, which can be omitted.