*МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2001*
*MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2001*
*Proceedings of Thirtieth Spring Conference of*
*the Union of Bulgarian Mathematicians*
*Borovets, April 8–11, 2001*

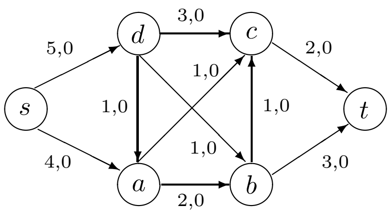
# ПОТОЦИ В ГРАФИ И МРЕЖИ

**Борислав Петров Юруков, Костадин Петров Калинов,**
**Иван Асенов Мирчев**

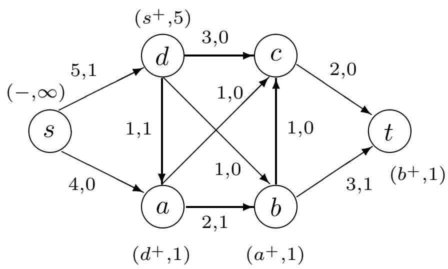
Разгледан е един от разработените десет модула, с които се изследва възможността елементи на математическото оптимиране да се изучават в средното училище (10 кл. СИП). Потоковите алгоритми са важен клас оптимизационни алгоритми в графи и мрежи, които са лесни за усвояване, не изискват много предварителни знания и са атрактивни за широка аудитория. Предполага се познаването само на понятията граф, път, верига, дърво. И в този модул е използван интуитивния подход, който дава възможност пред ученика да се изложат идеи за моделиране с използване на графи, без излишен формализъм и детайли. Това и приложния характер на материята позитивно влияят върху интереса на учениците.

Много реални проблеми свързани с избор на оптимални маршрути или разполагане на обекти, изготвяне на оптимални графици и разписания, намиране на оптимални потоци и др. се описват с езика на графи и мрежи.

**Пример 1.** Да разгледаме изобразения на чертеж 1а граф като мрежа за пренос




Черт. 1а




Черт. 1б

(комуникации) между шест пункта, където първото от числата съпоставени на всяка дъга е нейната *пропускателна способност* (капацитет на мост, пътен участък, дебит на тръба, и т.н.). 1) Да се определи максималното количество (суровини, стоки, хора и т.н.), което може да се пренесе от *източника s* до *крайния пункт t* в тази мрежа. Ако на всяка дъга съпоставим още по едно тегло, напр. цена за пренос на единица количество, то естествено възниква следната задача. 2) Да се пренесе определено количество от $s$ до $t$ на минимална цена. Количеството единици протичащи по дъгата $(i, j)$ се нарича *поток в дъгата* и се бележи с $f(i, j)$. Нулите в черт. 1а са началният поток $f_0$.

Потокът $f$ в една мрежа представлява функция, съпоставяща на всяка дъга $(x, y)$ неотрицателно число $f(x, y)$, така че:

За всеки поток от $s$ в $t$, количеството единици, изходящи от произволен връх $x$, $x \neq s, t$, трябва да бъде равно на количеството единици, входящи в този връх $x$, т.е.

$$\sum_{y \in V} f(x, y) - \sum_{y \in V} f(y, x) = 0,\ x \neq s,\ t.$$

Освен това количеството единици на потока, проходящи по дъгата $(x, y)$, не трябва да превишава нейния капацитет, т.е.

$$0 \leq f(x, y) \leq c(x, y). \tag{2}$$

Накрая, общото количество единици излизащо от източника $s$, трябва да бъде равно на сумарното количество единици влизащо в $t$.

$$\sum_{y \in V} f(s, y) = \sum_{y \in V} f(y, t). \tag{3}$$

Величината на потока $f$ се бележи с $val\ (f)$ или $v$ и се определя по следния начин:

$$v = val\ (f) = \sum_{\forall y} f(s, y).$$

Задачата за намиране на максимален поток се състои в търсене на поток, удовлетворяващ горните изисквания, за който величината $v$ е максимална.

**1. Алгоритъм за търсене на увеличаваща (потока) верига.** В зависимост от потока $f(x, y)$, дъгите на изходния граф (мрежата), можем да разделим условно на три множества:
$I$ – *ненаситени дъги, в които потокът може да се увеличава*, т.е. $c(x,y) - f(x,y) > 0$.
$R$ – *дъги, за които* $f(x, y) > 0$, *т.е. дъги за които потокът може да бъде намален.*
$N$ – *дъги, в които потокът не може нито да се увеличава, нито да се намалява.* Това са дъгите, които имат нулев капацитет или „огромна“ цена за преминаване на потока;

**Идея на алгоритъма [1]:** Алгоритъмът оцветява (маркира) дъги и върхове на графа строейки „растящо“ от върха $s$ дърво от оцветени дъги, по което могат да се изпратят допълнителни единици поток. Два типа са възможните увеличаващи $(s - t)$ вериги:

(4) $(s{-}t)$ път състоящ се само от ненаситени дъги, т.е. дъги от $I$. Пътят $(s, d), (d, a), (a, b), (b, t)$ от черт. 1а е такъв. Увеличението на потока в тези ненаситени дъги очевидно ще увеличи величината на потока в мрежата (виж черт. 1б). Колко е максимално възможното увеличение на потока в този тип вериги?

(5) $(s - t)$ верига, в която дъгите ориентирани от $s$ към $t$ са от $I$, а дъгите ориентирани от $t$ към $s$ са от $R$. Напр. веригата $(s, a), (d, a), (d, c), (c, t)$ от черт. 1б. Ако увеличите с 1 потока в дъгите от $I$ и намалите с 1 потока в дъгите от $R$ очевидно ще увеличите потока в мрежата. С колко най-много може да нарасне потока чрез този тип вериги?

**Описание на алгоритъма:**

*Стъпка 1.* Определете множествата $I$, $R$, $N$. Дъгите от $N$ изключете от разглеждане. Всички върхове са неоцветени. Оцветете върха $s$ с двойката $(-, \infty)$.

*Стъпка 2.* Ако съществува неоцветен връх $y$, при оцветен връх $x$:

а) Ако $(x, y) \in I$, т.е. $f(x, y) < c(x, y)$ — оцветете дъгата $(x, y)$ и маркирайте (оцветете) върха $y$ с двойката $(x^+, \Delta_y)$, където

$$\Delta_y = \min\{\Delta_x,\ c(x, y) - f(x, y)\} \quad \textit{(право маркиране)};$$

б) Ако $(y, x) \in R$, т.е. $f(y, x) > 0$ — оцветете дъгата $(y, x)$ и маркирайте (оцветете) върха $y$ с двойката $(x^-, \Delta_y)$, където

$$\Delta_y = \min\{\Delta_x,\ f(y, x)\} \quad \textit{(обратно маркиране)}.$$

в) ако не сте в а) или б), не оцветявайте.

*Стъпка 3.* Ако върхът $t$ не може да се оцвети — край, в мрежата няма увеличаваща верига. В противен случай, в мрежата съществува единствена увеличаваща $(s - t)$ верига. Край.

Числото $\Delta_y$ в маркировката на всеки връх $y$ дава максимално възможното увеличение на потока от $s$ до този връх, а първият маркиращ символ указва предишния връх $x$ от веригата и начина, по който се изменя потокът в дъгата $(x, y)$ — при $x^+$ увеличение, при $x^-$ намаляване на потока с $\Delta_t$.

**Коментар и обосновка:** 1. Очевидно алгоритъмът строи дърво с корен $s$ тъй като не се оцветяват дъги, на които и двата края са оцветени (липсват цикли). 2. Ако съществува увеличаваща $(s-t)$ верига, то $t$ е оцветен и обратно. 3. Процедурата е крайна тъй като се оцветява по веднъж, а дъгите и върховете са краен брой.

**2. Алгоритъм за търсене на максимален поток (Форд-Фалкерсон).** Намирането на максимален поток се осъществява чрез многократно прилагане на алгоритъма за построяване на увеличаваща потока верига докато това е възможно. След намиране на увеличаваща верига се формира нов поток (виж (4) и (5)) и се отстраняват маркировките.

Ще илюстрираме работата на този алгоритъм с пример.

**Пример 2.** Да се намери максималния поток в мрежата от черт.1а.

*Стъпка 1.* Определяме множествата $I, R, N$. Всички върхове са неоцветени. Оцветяваме върха $s$ с двойката $(-, \infty)$.

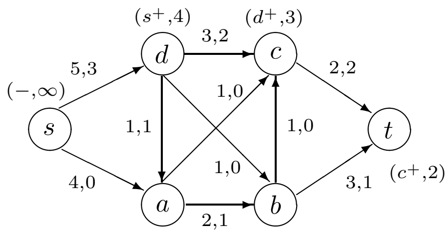
*Стъпка 2.* Последователно (виж черт. 1б)

- оцветяваме дъгата $(s, d)$ и маркираме върха $d$ с двойката $(s^+, \min(\infty, 5 - 0)$, т.е. $(s^+, 5)$, за да определим максимално възможното увеличение на потока до този връх;
- оцветяваме дъгата $(d, a)$ и маркираме (оцветяваме) върха $a$ с двойката $(d^+, \min(5, 1 - 0)) = (d^+, 1)$;
- оцветяваме дъгата $(a, b)$ и маркираме (оцветяваме) върха $b$ с двойката $(a^+, 1)$;

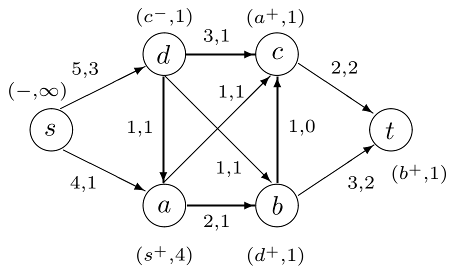
– оцветяваме дъгата $(b, t)$ и маркираме върха $t$ с двойката $(b^+, 1)$.

*Стъпка 3.* Върхът $t$ е оцветен, край на алгоритъма за търсене на увеличаваща верига. Новият поток $f_1$ (черт. 1б) има величина $val(f_1) = 1$. Анулираме маркировките и се връщаме на *Стъпка 1.*

Резултатите от изпълнението на алгоритъма ще дадем за улеснение графично.



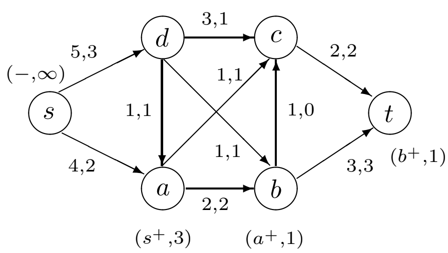

Черт. 1в



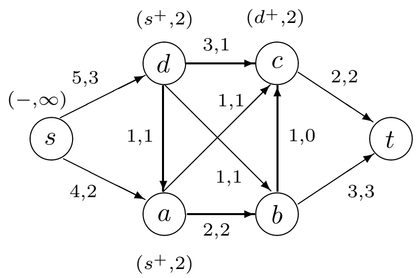

Черт. 1г

Намерена е увеличаваща потока $f_1$ верига $(c, t)$, $(d, c)$ и $(s, d)$. За новия поток $f_2$ (черт. 1в), имаме $val\ (f_2) = 3$. Отново анулираме всички маркировки и се връщаме на *Стъпка 1.*

Намерена е увеличаваща верига $(b, t), (d, b), (d, c), (a, c), (s, a)$. За новия поток $f_3$ имаме $val\ (f_3) = 4$. (черт. 1г). Анулираме маркировките и се връщаме на *Стъпка 1.*




Черт. 1д




Черт. 1е

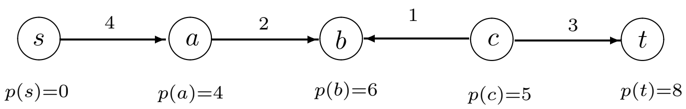
Намерена е увеличаваща верига $(b, t), (a, b), (s, a)$. За получения нов поток $f_4$ имаме $val\ (f_4) = 5$ (черт. 1д). Това е и максималният поток от $s$ до $t$, тъй като връщането към *Стъпка 1* води до ситуацията в черт. 1е, т.е. няма други върхове, които могат да се маркират. Върхът $t$ не може да се оцвети, край на алгоритъма. Потокът $f_4$ е максимален.

Когато в изходната мрежа съществуват няколко източника и няколко крайни пункта е достатъчно мрежата да се допълни с един главен източник $S$ и един главен краен пункт $T$. Източникът $S$ се свързва с останалите източници чрез дъги с неограничен капацитет, а крайните пунктове също се свързват с $T$ чрез дъги с неограничен капацитет.

**3. Алгоритъм за търсене на поток с минимална цена.** Да разгледаме втората задача формулирана в пример 1, т.е. търсене на поток с величина $v$ единици и минимална цена. Ще считаме, че цените са цели числа (пр. 3,25 лв. = 325 ст.). Цените на всяка дъга $(i, j)$ ще бележим с $a(i, j)$.

**Идея на алгоритъма** [**1**]**:** Алгоритъмът за търсене на поток с минимална стойност „се опитва да пренесе“ от $s$ до $t$ максимално възможния брой единици от потока, за всяка от които общата цена за пренос в мрежата е $p$ (лева), като последователно $p = 0, p = 1, p = 2, \dots$. При липса на увеличаваща верига на цена $p$ лева, ако потокът не е максимален се увеличават маркиращите числа $p(x)$ на неоцветените върхове с 1 и отново се прилага алгоритъма на Форд-Фалкерсон.

Да разгледаме увеличаваща $(s - t)$ верига, за която теглата на дъгите са съответните цени за пренос на единица поток.




Очевидно всяка допълнителна единица на потока, протичаща по тази верига, „ще струва“ $p(t) = 4 + 2 - 1 + 3 = 8$ (лева, \$ и т.н.).

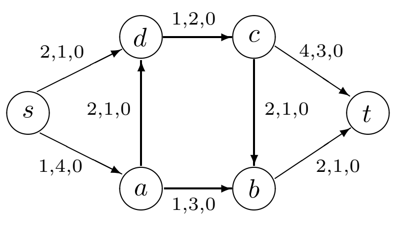
В общия случай, разглежданият алгоритъм намира увеличаваща верига, в която сумата от цените на правите дъги минус сумата от цените на обратните дъги е равна на $p$. (Права дъга — дъга от $s$ към $t$.)

На практика алгоритъмът оцветява дъги и върхове, като на всеки връх $x$ се съпоставя маркиращо число $p(x)$ по следния начин:

$$
\begin{aligned}
&p(s) = 0; \quad p(t) = p; \quad 0 \le p(x) \le p, \text{ при } x \ne s,\ t,\\
(1)\qquad &p(y) - p(x) = a(x, y), \text{ при } (x, y) \in I,\ R.\\
&p(x) - \text{цената, на която до върха } x \text{ може да се пренесе 1 единица}
\end{aligned}
$$

Ще илюстрираме алгоритъма за търсене на поток с минимална стойност.

**Пример 3.** В мрежата, изобразена по-долу, на всяка дъга са съпоставени по три числа — първото е капацитетът на дъгата, второто е цената за пренос на единица продукция по дъгата, а третото е величината на потока. Намерете поток от две единици с минимална цена.




В началото всички маркиращи числа са нули, т.е.

$$p(s) = p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = p(t) = 0.$$

Всички дъги и върхове, с изключение на върха $s$ (той ще бъде оцветен винаги) са неоцветени. За краткост ще изложим резултатите от изпълнението на алгоритъма в таблица.

| Итерация | $p(s)$ | $p(a)$ | $p(b)$ | $p(c)$ | $p(d)$ | $p(t)$ | Оцветени дъги | Оцветени върхове |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Няма | $s$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $(s,d)$ | $s,d$ |
| 2 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | $(s,d)$ | $s,d$ |
| 3 | 0 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | $(s,d),(d,c)$ | $s,d,c$ |
| 4 | 0 | 4 | 4 | 3 | 1 | 4 | $(s,d),(d,c),(s,a),(c,b)$ | $s,d,c,a,b$ |
| 5 | 0 | 4 | 4 | 3 | 1 | 5 | $(s,d),(d,c),(s,a),(c,b),(b,t)$ | $s,d,c,a,b,t$ |

Върхът $t$ се оказва оцветен. По увеличаващата верига $(s,d)$, $(d,c)$, $(c,b)$, $(b,t)$, можем да пропуснем една единица поток от $s$ до $t$. Увеличаваме потока в съответните дъги $f(s,d) = f(d,c) = f(c,b) = f(b,t) = 1$. Този пренос се осъществява на цена (разходи) $p(t) = 5$ лв.

Полученият поток не е максимален за изходния граф, защото след процедурата „оцветяване на върховете“ при повторно прилагане на алгоритъма за търсене на увеличаваща верига, върхът $t$ ще се окаже отново оцветен, т.е. съществува увеличаваща наличния поток верига.

| Итерация | $p(s)$ | $p(a)$ | $p(b)$ | $p(c)$ | $p(d)$ | $p(t)$ | Оцветени дъги | Оцветени върхове |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 4 | 4 | 3 | 1 | 5 | $(s,d),(s,a)$ | $s,d,a$ |
| 7 | 0 | 4 | 5 | 4 | 1 | 6 | $(s,d),(s,a)$ | $s,d,a$ |
| 8 | 0 | 4 | 6 | 5 | 1 | 7 | $(s,d),(s,a)$ | $s,d,a$ |
| 9 | 0 | 4 | 7 | 6 | 1 | 8 | $(s,d),(s,a),(a,b),(b,t)$ | $s,d,a,b,t$ |

По веригата $(s,a)$, $(a,b)$, $(b,t)$ можем да изпратим само една единица поток от $s$ в $t$, при разходи за този пренос $p(t) = 8$.

Полученият поток с величина 2 единици е максимален поток за мрежата (проверете) с минимална стойност равна на 13 лв.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Minieka. Optimization Algorithms for Networks and Graphs. New York and Basel, Marcel Deker Inc., 1978.

Борислав Юруков
ЮЗУ „Неофит Рилски“
2700 Благоевград
e-mail: `yurukov@aix.swu.bg`

Костадин Калинов
МГ „акад. С.П. Корольов“
2700 Благоевград

Иван Мирчев
ЮЗУ „Неофит Рилски“
2700 Благоевград
e-mail: `mirchev@aix.swu.bg`

# FLOW ALGORITHMS FOR GRAPHS AND NETWORKS

**Borislav Petrov Yurukov, Kostadin Petrov Kalinov,
Ivan Assenov Mirchev**

One of the ten developed educational units is considered in this paper. The objective is to investigate possibility for teaching some elements of mathematical optimization at upper-secondary school level. The flow algorithms are an important class of optimization algorithms for graphs and networks, which are easily internalized. They do not require a lot of previous knowledge and they are attractive for many people. The only notions of graph, path and tree are necessary. The intuitive approach was used in this unit and it gives the students the chance to obtain ideas about modelling by using graphs without unnecessary formalization and details. This fact and the applied characteristics of the subject matter have positive influence upon the interests of the students.