

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2004  
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2004  
Proceedings of the Thirty Third Spring Conference of  
the Union of Bulgarian Mathematicians  
Borovets, April 1–4, 2004

КОМПЮТЪРНИ МЕТОДИ В ГЕОМЕТРИЯТА НА  
ТРИЪГЪЛНИКА\*

Грозьо Станилов Иванов

Работата е посветена на геометрията на триъгълника. Въведени са девет нови забележителни точки за произволен триъгълник, а с това и три нови триъгълника се аташират към него. Това е направено като е използвана идея от диференциалната геометрия – когато лице на равнинна фигура зависи от координатите на една променлива точка, то с това е дефинирана повърхнина. Като се използва метода на геометричните места, се въвеждат шест придружаващи даден триъгълник елипси – три от които са описани и три частично вписани. Освен това се въвеждат и шест придружаващи триъгълника хиперболи. Като се използвани снопове криви от втора степен, се дефинират шест придружаващи даден триъгълник параболи – три от които са частично вписани. Установени са твърдения за принадлежност на нововъведените забележителни точки с дефинираните криви от втора степен. Дългите технически пресмятания са избегнати като е прилагана системно компютърна алгебра. Дадени са графични визуализации на получените геометрични обекти, като за целта е използвана компютърна графика. Накрая се дава като едно Приложение страница, на която се вижда схемата по която работи компютърната програма. Предложената разработка се характеризира с изключителното използване за научни изследвания на компютърната алгебра и компютърната графика, тъй като всичко се прави само с тях.

Най-напред ще дадем едно елементарно определение на понятието геометрия на триъгълника. Под *Геометрия на триъгълника* се разбира всичко онова, което един произволен триъгълник поражда. Според това определение към тази геометрия спадат всички негови забележителни точки като медицентър, ортоцентър, центъра на вписаната както и центъра на описаната окръжност, точката на Нагел, точката на Жергон, както и забележителните прави – правата на Ойлер, правата на Менелай. Окръжността на деветте точки (окръжността на Фойербах) също принадлежи на тази геометрия.

През последните десетилетия геометрията на триъгълника е станала една твърде обемна област на математиката. Свидетелство за това е неотдавна появилата се Енциклопедия [1] на американския математик Clark Kimberling, в която се анализират 1114 забележителни точки за всеки триъгълник.

Предмет на настоящата статия е, като се прилага компютърна алгебра, установяването на факта, че всеки триъгълник поражда редица елипси, хиперболи и

---

\*2000 Mathematics Subject Classification: 51M04, 51N20, 68U05, 65D18.

Key words: Triangle centers, Triangle elipsis, Triangle hyperbolas, Triangle parabolas.

параболи, с което се въвеждат значителен брой нови забележителни точки в геометрията на триъгълника.

**1. Нови забележителни точки в геометрията на триъгълника.** В нашата статия [2] въведохме шест нови забележителни точки за произволен триъгълник. Тъй като те са тясно свързани с изследванията ни тук, ще дадем алгоритъма за тяхното въвеждане и определяне.

Нека  $ABC$  е произволен триъгълник. Без ограничение на общността избираме ортонормираната координатна система  $OXY$ , така че върховете на триъгълника да имат следните координати:  $A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$ ,  $C(0, c)$ . Тук  $a$ ,  $b$ ,  $c$  са произволни параметри, подчинени на условията  $a \neq b$  и  $c \neq 0$ , които са условия за съществуване на триъгълник.

Ако  $M(x, y)$  е произволна точка в равнината на триъгълника, различна от върховете му, с  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  означаваме пресечните точки на правите  $AM$ ,  $BM$ ,  $CM$  съответно с правите  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Разглеждаме следните удвоени лица на посочените триъгълници:

1.  $2F[AA_0C] = c(b-a)(-ac+cx+ay)/(-ac+cx+by)$ ,
2.  $2F[ABA_0] = (b-a)^2cy/(-ac+cx+by)$ ,
3.  $2F[ABB_0] = (b-a)^2cy/(bc-cx-ay)$ ,
4.  $2F[B_0BC] = c(a-b)(-bc+cx+by)/(bc-cx-ay)$ ,
5.  $2F[C_0BC] = -c^2x/(c-y) + bc$ ,
6.  $2F[AC_0C] = c^2x/(c-y) - ac$ .

Намирането на тези лица може да стане лесно, а именно като се използват средствата на аналитичната геометрия: написват се уравнения на съответните прави и се решат системи от две уравнения с две неизвестни. Намирането на лицата става с помощта на детерминанти от трети ред. С помощта на компютърна алгебра всичко става съвсем просто – без никакво напрежение на ума и опасност от технически грешки.

Ще отбележим, че триъгълниците, чиито лица са написани, са еднакво ориентирани и следователно всичките лица имат един и същ знак.

При произволно фиксирани стойности на  $a$ ,  $b$  и  $c$ , с горните изрази се определят шест повърхнини в пространството с дефиниционни области, определени от изменението на точката  $M(x, y)$ . Очевидно не всеки две и повече от две повърхнини се пресичат в една точка. Подбирайки някои от тези повърхнини със съответни дефиниционни области, ние достигаем до нови забележителни точки на триъгълник

Ще разгледаме няколко случая.

I. Нека  $M(x, y)$  е произволна точка от вътрешността на триъгълника. Условието за пресичане на горните шест повърхнини с дефиниционна област вътрешността на триъгълника ни води до решаване на системата от следните пет уравнения за неизвестните  $x$ ,  $y$ :

$$\begin{aligned}
c(b-a)(-ac+cx+ay)/(-ac+cx+by) &= (b-a)^2cy/(-ac+cx+by), \\
c(b-a)(-ac+cx+ay)/(-ac+cx+by) &= (b-a)^2cy/(bc-cx-ay), \\
c(b-a)(-ac+cx+ay)/(-ac+cx+by) &= c(a-b)(-bc+cx+by)/(bc-cx-ay), \\
c(b-a)(-ac+cx+ay)/(-ac+cx+by) &= -c^2x/(c-y)+bc, \\
c(b-a)(-ac+cx+ay)/(-ac+cx+by) &= c^2x/(c-y)-ac.
\end{aligned}$$

Решаването на тази система с класически методи е трудна и отегчителна работа. С помощта на компютърна алгебра това става за секунди. Единственото решение на тази система  $x = (a+b)/3$ ,  $y = c/3$ , които са координатите на медицентъра  $G$ , т.е.

$$G((a+b)/3, c/3).$$

С това ние дадохме един нов подход за въвеждане на медицентъра на триъгълник. Този подход сега ще приложим за въвеждане на нови забележителни точки на триъгълник.

II. Нека сега  $M(x, y)$  е произволна външна точка за триъгълника, но лежи в  $\angle A$ . Сега е подходящо да разгледаме следните лица:

$$(1) \quad 2F[AA_0C], \quad 2F[ABA_0], \quad 2F[BB_0C], \quad 2F[C_0CB].$$

И сега разглежданите триъгълници са еднакво ориентирани и може да се постави въпроса за сечението на съответните повърхнини (1). С компютърна алгебра се установява, че повърхнините (1) имат единствена обща точка, която се получава при  $x = (-a+3b)/5$ ,  $y = 3c/5$ . С това е намерена една нова *забележителна точка в геометрията на триъгълника*, а именно точката,

$$A_1((-a+3b)/5, 3c/5).$$

По същия начин се намират и точките

$$B_1((3a-b)/5, 3c/5), \quad C_1((3a+3b)/5, -c/5),$$

които са външни за триъгълника и лежат съответно в  $\angle b$  и  $\angle C$ .

III. Нека сега точката  $(x, y)$  е произволна външна точка за триъгълника, но лежи в противоположния ъгъл на  $\angle A$ . Сега е подходящо да се разгледат следните лица

$$(2) \quad 2F[ABA_0], \quad 2F[AA_0C], \quad 2F[AB_0B], \quad 2F[ACC_0].$$

Така дефинираните четири повърхнини имат единствена обща точка, която се получава при  $x = 3a-b$ ,  $y = -c$ . С това е определена *забележителната точка на триъгълника*

$$A_2(3a-b, -c).$$

По аналогичен начин се намират и точките

$$B_2(-a+3b, -c), \quad C_2(-a-b, 3c),$$

лежащи в противоположните ъгли съответно на ъглите  $\angle B$  и  $\angle C$ .

С това установихме следната

**Теорема 1.** *Всеки триъгълник  $ABC$  поражда триъгълниците  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ .*

Като се използват координатите на върховете на трите триъгълника непосредствено може да се докаже следната

**Теорема 2.** *Трите триъгълника  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  са хомотетични с център на хомотетия  $G$ . По-точно:*

- 1)  $\Delta A_1B_1C_1 = \chi_1(\Delta ABC)$ ,  
където  $\chi_1$  е хомотетия с център  $G$  и коефициент  $\kappa_1 = -4/5$ ;
- 2)  $\Delta A_2B_2C_2 = \chi_2(\Delta ABC)$ ,  
където  $\chi_2$  е хомотетия с център  $G$  и коефициент  $\kappa_2 = 4$ .

Алгоритъмът, с който въведохме двата нови триъгълника може да се приложи неограничен брой пъти. По-голям интерес представлява това да се направи по начина, както бе получен първия триъгълник. Така ще се получи една безкрайна редица от триъгълници, чиито страни намаляват неограничено. Очевидно границата на тази редица е медицентърът  $G$  на дадения триъгълник. Представлява интерес да се направи анимация на този процес, който ще доведе до една “дупка” в  $\Delta ABC$ . На следващите визуализации ще се види разположението на тези нови точки относно върховете на триъгълника.

## 2. Забележителни елипси и хиперболи в геометрията на триъгълника.

Въведените лица, които използвахме за дефиниране на двата нови триъгълника, ще приложим и за дефиниране на криви от втора степен, индуцирани от даден триъгълник. По-точно тук ще се въведем елипси, хиперболи и параболи. За целта да разгледаме двете редици от лица:

- |    |                 |                 |                 |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|
| A. | 1. $F[AA_0C]$ , | 3. $F[BB_0A]$ , | 5. $F[CC_0B]$ ; |
| B. | 2. $F[AA_0B]$ , | 4. $F[BB_0C]$ , | 6. $F[CC_0A]$ . |

Дефинираме следните множества от точки  $M(x, y)$  в цялата равнина:

- 1) С помощта на редицата A:

$$\begin{aligned} E_{13} : 1. &= 3, & E_{15} : 1. &= 5, & E_{35} : 3. &= 5; \\ H_{13} : 1. &= -3, & H_{15} : 1. &= -5, & H_{35} : 3. &= -5; \end{aligned}$$

- 2) с помощта на редицата B

$$\begin{aligned} E_{24} : 2. &= 4, & E_{26} : 2. &= 6, & E_{46} : 4. &= 6; \\ H_{24} : 2. &= -4, & H_{26} : 2. &= -6, & H_{46} : 4. &= -6; \end{aligned}$$

- 3) С помощта на двете редици:

$$E_{14} : 1. = 4, \quad E_{25} : 2. = 5, \quad E_{36} : 3. = 6;$$

**Теорема 3.** *Всички множества  $E_{ij}$  са елипси, а всички множества  $H_{ij}$  – хиперболи. При това*

$$E_{13} \equiv E_{24}, \quad E_{15} \equiv E_{26}, \quad E_{35} \equiv E_{46}.$$

Доказателството на последната част от теоремата е съвсем просто и може да се проведе със средствата на елементарната геометрия. Ще се занимаем с доказателствата за  $E_{13}$ ,  $E_{14}$ ,  $H_{13}$  и  $H_{24}$ . Едновременно ще характеризираме и геометрично тези криви. Всичко това ще направим като приложим компютърната алгебра на програмата MAPLE.

**Изследване на  $E_{13}$ .** Съгласно дефиниционното равенство за това множество получаваме уравнението

$$E_{13} : -ac^2b + ac^2x + bc^2x - c^2x^2 - acxy - 2abcy - a^2y^2 - bcxy - b^2y^2 + aby^2 = 0.$$

Очевидно то е уравнение на крива от втора степен, чиято детерминанта е

$$\text{Det}(E_{13}) = 0.25c^4(a-b)^4 \neq 0.$$

Следователно кривата е неизродена. Квадратното уравнение за безкрайни точки на кривата има дискриминанта

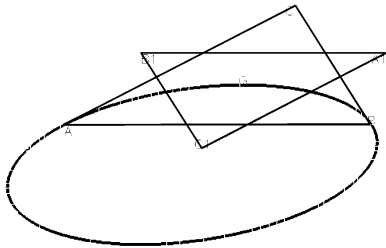
$$\text{Diskr.}(E_{13}) = -0.75c^2(a-b)^2 < 0.$$

Следва, че  $E_{13}$  е елипса. Непосредствено се проверява, че елипсата  $E_{13}$  минава през медицентъра  $G$  и има за допирателни правите  $AC$  и  $BC$  с допирни точки съответно  $A$  и  $B$ .  $E_{13}$  допира правата  $A_2B_2$  в точката  $G_{13}(a+b, -c)$  и има за център точката  $Z_{13}((2a+2b)/3, -c/3)$ .

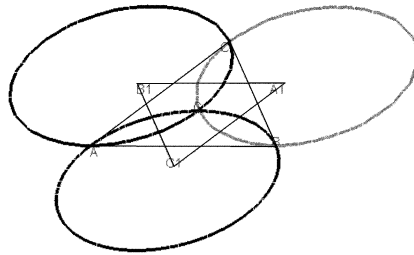
Понеже  $E_{13}$  допира правите  $AC$  и  $BC$ , ще я наричаме *(частично) вписана в триъгълника*.

Като е използвана компютърната графика на MAPLE, на Фиг. 1 е представена визуализацията елипсата  $E_{13}$  заедно с двата нововъведени триъгълника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ . На Фиг. 2 са представени трите (частично) вписани в триъгълника  $ABC$  елипси  $E_{13}$ ,  $E_{15}$  и  $E_{35}$ .

Ще отбележим, че всички визуализации в настоящата работа са направени при конкретните стойности  $a = -15$ ,  $b = 5$ ,  $c = 5$ .



Фиг. 1. ( $E_{13}$ )



Фиг. 2. ( $E_{13}$ ,  $E_{15}$ ,  $E_{35}$ )

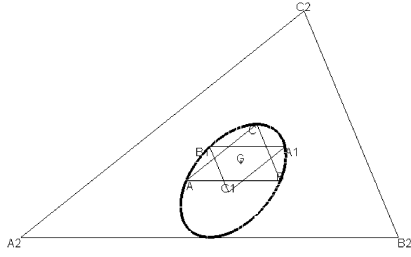
**Изследване на  $E_{14}$ .** Съгласно дефиниционното равенство за това множество получаваме уравнението

$$E_{14} : -2abc^2 + 2ac^2x + a^2cy + 2bc^2x - 2c^2x^2 - 2acxy + 2abcy - a^2y^2 - 2bcxy + b^2cy - b^2y^2 = 0$$

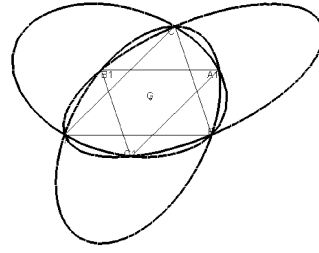
Детерминантата на тази крива е  $\text{Det.}(E_{14}) = 0.5c^4(a-b)^4 \neq 0$ , а дискриминантата на квадратното уравнение за безкрайни точки на кривата е  $\text{Diskr.}(E_{14}) = -c^2(a-b)^2 < 0$ .

Следователно  $E_{14}$  е елипса. С непосредствена проверка се установява, че тази елипса минава през точките  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , поради което я наричаме *описана около триъгълника*. Тя има за център точката  $Z_{14}((a+b)/2, 0)$ , която е средата на страната  $AB$  на триъгълника.

На Фиг. 3 е визуализирана  $E_{14}$ , а на Фиг. 4 – трите описани елипси  $E_{14}$ ,  $E_{25}$ ,  $E_{36}$ .



Фиг. 3. ( $E_{14}$ )

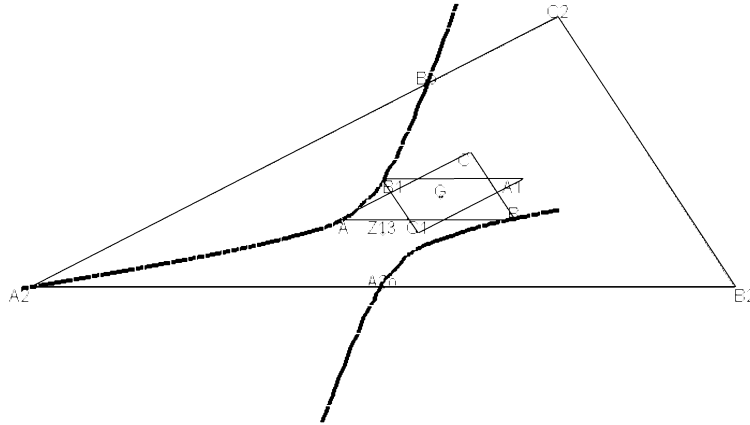


Фиг. 4. ( $E_{14}, E_{25}, E_{36}$ )

**Изследване на  $H_{13}$ .** Съгласно дефиниционното равенство за това множество, получаваме уравнението

$$H_{13} \quad -abc^2 + ac^2x + 2a^2cy + bc^2x - c^2x^2 - 3acxy - a^2y^2 + bcxy + b^2y^2 - aby^2 = 0.$$

Детерминантата на тази крива от втора степен е  $\text{Det}(H_{13}) = -0.25c^4(a-b)^4 \neq 0$ , а дискриминантата на квадратното уравнение за безкрайни точки на кривата е  $\text{Diskr.}(H_{13}) = 1.25c^2(a-b)^2 > 0$ . Следователно  $H_{13}$  е хипербола. Непосредствено се проверява, че тази хипербола минава през точките  $A, A_2, B, B_1$  като в  $A$  има допиране с правата  $AC$ . На Фиг. 5 е дадена една визуализация на тази хипербола  $H_{13}$ .

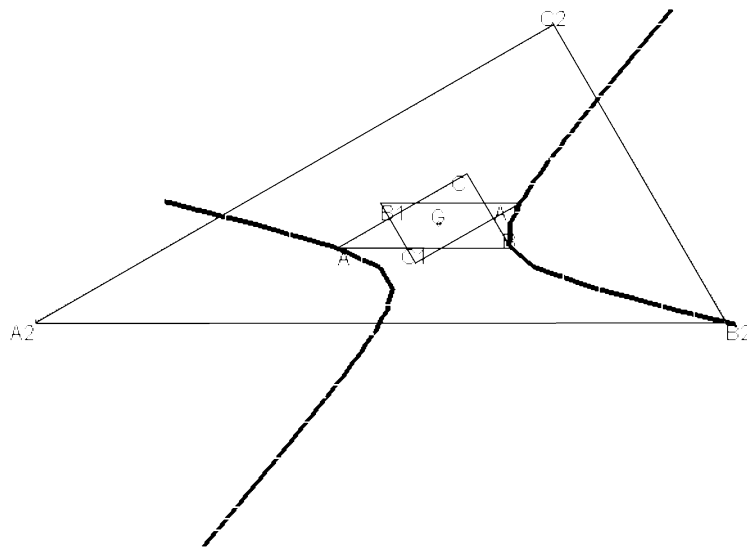


Фиг. 5. ( $H_{13}$ )

**Изследване на  $H_{24}$ .** Съгласно дефиниционното равенство на това множество, получаваме уравнението

$$H_{24} : \quad 2b^2cy - 3bcxy - aby^2 + acxy + a^2y^2 - abc^2 + bc^2x + ac^2x - c^2x^2 - b^2y^2 = 0.$$

Детерминантата на тази крива от втора степен е  $\text{Det}(H_{24}) = -0.25c^4(a-b)^4 \neq 0$ , а дискриминантата ѝ е  $\text{Diskr.}(H_{24}) = 1.25c^2(a-b)^2 > 0$ . Следователно кривата хипербола. Непосредствено се проверява, че тя минава през  $B, A, A_1, B_2$ , като в първата точка тя допира правата  $BC$ . На Фиг. 6 е представена една визуализация на хиперболатата  $H_{24}$ .



Фиг. 6. ( $H_{24}$ )

**3. Забележителни параболи в геометрията на триъгълника.** Най-напред ще въведем (*частично*) *вписани параболи в триъгълник*. За целта да разгледаме снопа криви от втора степен, минаващи през върховете  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и за които правите  $AC$  и  $BC$  са допирателни. Този сноп има уравнение:

$$(3.1) \quad ky^2 + (cx + ay - ac)(cx + by - bc) = 0,$$

където  $k$  е параметър. Условието една крива от снопа (3.1) да е парабола води до

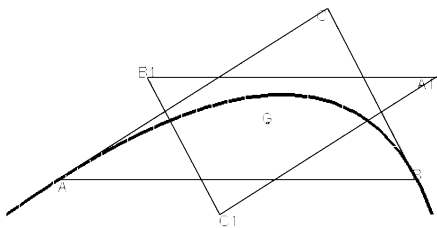
$$(3.2) \quad k = 0.25(a - b)^2.$$

Следователно параболата от снопа има уравнение

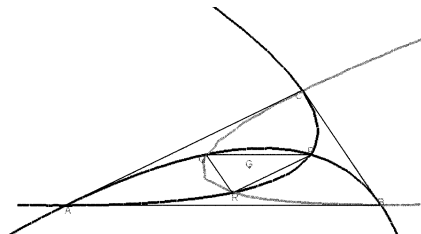
$$(3.3) \quad 0.25(a - b)^2y^2 + (cx + ay - ac)(cx + by - bc) = 0.$$

На Фиг. 7 е представена една визуализация на тази парабола. Всеки триъгълник притежава три такива вписани параболи. На Фиг. 8 е представена една тяхна визуализация, заедно с трите им пресечни точки, означени с

$$P((a + 4b)/9, 4c/9), \quad Q((4a + b)/9, 4c/9), \quad R((4a + 4b)/9, c/9).$$



Фиг. 7



Фиг. 8

За всеки триъгълник те са негови вътрешни точки и са нови забележителни точки в геометрията на триъгълника. Триъгълникът  $PQR$  е също хомотетичен на дадения триъгълник с център на хомотетията  $G$  и коефициент, равен на  $-1/3$ . И тук представлява интерес алгоритъма за получаване на този триъгълник да се приложи неограничено и да се направи анимация на процеса.

За да въведем описани параболи ще използваме факта, че елипсите  $E_{14}$ ,  $E_{36}$  са описани около триъгълника. Разглеждаме снопа криви от втора степен, минаващи през върховете  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на триъгълника. Той има уравнение

$$(3.4) \quad E_{14} + kE_{36} = 0,$$

където  $k$  е параметър, а

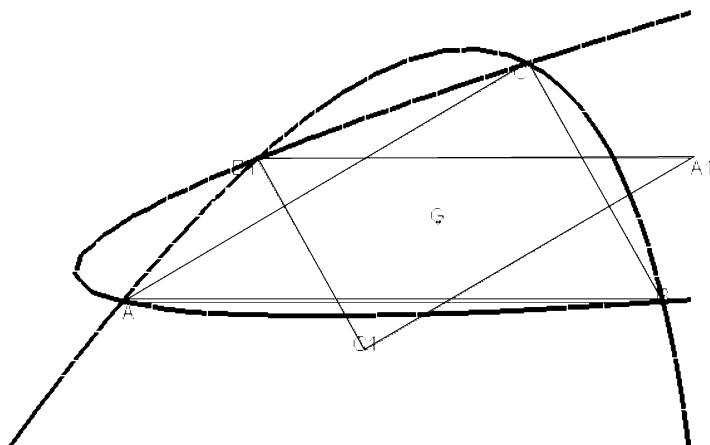
$$E_{36} : b^2cy - b^2y^2 - abcy + 2aby^2 + 2a^2cy - 2a^2y^2 - abc^2 + bc^2x + ac^2x - 2acxy - c^2x^2 = 0.$$

Условието една крива от снопа (3.4) да е парабола води до определянето на  $k$ , а именно:

$$k_1 = (-3 + 5^{0.5})/2,$$

$$k_2 = (-3 - 5^{0.5})/2.$$

Следователно има две параболи от разглеждания сноп. Непосредствено се установява, че и двете параболи минават през  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и точката  $A_1$ . На Фиг. 9 е представена визуализация на двете параболи.



Фиг. 9

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] CLARK KIMBERLING. Encyclopedia of Triangle centers, in internet [www.Clark Kimberling Home Page](http://www.Clark Kimberling Home Page).
- [2] G. STANILOV. Mittels Computer Graphik zu neuen merkwürdigen Dreieckspunkten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2003, Vorträge auf der 37. Tagung fuer Didaktik der Mathematik, vom 3. bis 7.3.2003 in Dortmund, 617–620.

Грозьо Станилов  
Педагогически колеж Добрич  
ул. Добротица € 12  
9302 Добрич  
e-mail: stanilov@fmi.uni-sofia.bg

## COMPUTER METHODS IN THE TRIANGLE GEOMETRY

**Grozio Stanilov**

Using surfaces defined by area functions we introduce for any triangle  $ABC$  with  $A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$ ,  $C(0, c)$ , two new triangles  $A_1((-a + 3b)/3, 3c/5)$ ,  $B_1((-b + 3a)/5, 3c/5)$ ,  $C_1((3a+3b)/5, -c/5)$  and  $A_2(3a-b, -c)$ ,  $B_2(-a+3b, -c)$ ,  $C_2(-a-b, 3c)$ . The point  $A_1$  is an outpoint of the given triangle, but in  $\sphericalangle A$ , the point  $A_2$  is also an outpoint but in the opposite angle of  $\sphericalangle A$ . To any triangle we attach three inscribed and three described ellipses, six hyperbolas. We introduced also three inscribed parabolas and six described parabolas. The cutpoints of the inscribed parabolas  $P((a + 4b)/9, 4c/9)$ ,  $Q((4a + b)/9, 4c/9)$ ,  $R((4a + 4b)/9, c/9)$ , are innere points of the given triangle. All calculations we accomplish only by computer algebra. To vizualizate all things we use computer graphic.