МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2004
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2004
Proceedings of the Thirty Third Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–4, 2004

ПРОБЛЕМИ НА ГОЛДБАХ – МИНАЛО, НАСТОЯЩЕ, БЪДЕЩЕ*

Д. И. Толев

В настоящата статия са формулирани класическите проблеми на Голдбах. Дадена е информация за някои нови резултати, свързани с тях.

1. Постановка на проблемите на Голдбах. През 1742 г. в кореспонденция между Голдбах и Ойлер възникват две хипотези, известни като проблеми на Голдбах. В съвременна терминология те се изказват по следния начин:

Бинарен проблем на Голдбах: Всяко четно число $N > 2$ може да бъде представено във вида

$$p_1 + p_2 = N\,, \tag{1}$$

където p_1, p_2 са прости числа.

Тернарен проблем на Голдбах: Всяко нечетно число $N > 5$ може да бъде представено във вида

$$p_1 + p_2 + p_3 = N\,, \tag{2}$$

където p_1, p_2, p_3 са прости числа.

Бинарната хипотеза е много по–силно твърдение и от нея следва тернарната хипотеза. Наистина, ако $N > 5$ е нечетно число, то $N - 3$ е четно и $N - 3 > 2$. Ако е вярна бинарната хипотеза, то за някакви прости числа p_1, p_2 ще имаме $N-3 = p_1+p_2$, откъдето следва $N = p_1 + p_2 + 3$, т.е. даденото число е сума на три прости числа.

Твърде близък до бинарния проблем на Голдбах е следният

Проблем за простите числа близнаци: Съществуват безбройно много прости числа p, такива че числото $p + 2$ също е просто.

Тернарната хипотеза на Голдбах е доказана (за достатъчно големи числа N), но бинарната хипотеза, както и сродната ѝ хипотеза за простите числа близнаци, все още не са доказани. Целта на настоящата статия е да запознае читателя с някои резултати, които, в известен смисъл, са приближения към тези трудни задачи.

2. Методи на Харди–Литлууд и Виноградов. През двадесетте години на миналия век Харди и Литлууд откриват *кръговия метод*, който е известен още

*2000 Mathematics Subject Classification: 11P32.
Ключови думи: проблеми на Голдбах, прости числа.

като *метод на Харди–Литлууд*. В поредица от статии тези математици прилагат кръговия метод за решаване на адитивни задачи от теорията на числата. В частност, Харди и Литлууд [22, 23] намират ново решение на проблема на Уоринг относно представимостта на естествените числа като сума от степени. Тази задача е решена през 1909 г. от Хилберт, но решението чрез кръговия метод е несравнимо по-просто, а освен това позволява броят на събираемите да бъде намален драстично.

В статията [24] Харди и Литлууд прилагат кръговия метод и към проблемите на Голдбах. Чрез евристични съображения тези математици намират предполагаеми асимптотични формули за броя на решенията на съответните уравнения. По–точно, нека $J_2(N)$ означава броя на решенията на уравнението (1) и, съответно, нека $J_3(N)$ е броят на решенията на (2) с прости неизвестни. Прилагайки формално кръговия метод, Харди и Литлууд предполагат, че при $N \to \infty$ са в сила асимптотичните формули

$$J_2(N) \sim \mathfrak{S}_2(N)\frac{N}{\log^2 N} \tag{3}$$

и съответно

$$J_3(N) \sim \mathfrak{S}_3(N)\frac{N^2}{2\log^3 N}. \tag{4}$$

Величините $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$ са така наречените *сингулярни редове* отговарящи на уравненията (1) и (2). Техните стойности се изразяват чрез безкрайни произведения по прости числа и не е трудно да се установи, че ако N е четно, то $\mathfrak{S}_2(N) > c$, а ако N е нечетно, то $\mathfrak{S}_3(N) > c$, където $c > 0$ е константа. Поради това от формулите (3) и (4) следват разрешимостта на бинарната, съответно тернарната задачи, за достатъчно големи стойности на N.

Харди и Литлууд [24] доказват, че ако е вярна *Обобщената Хипотеза на Риман* (OXP)[1], то е налице формулата (4) и по този начин намират условно доказателство на тернарния проблем на Голдбах за достатъчно големи нечетни N.

Харди и Литлууд доказват също, че при допускането на OXP почти всички четни числа се представят във вида (1). По–точно, нека X е достатъчно голямо число и нека $E(X)$ е броят на четните числа, ненадминаващи X и които са суми на две прости числа. Тогава, ако е вярна OXP, е в сила оценката

$$E(X) = \mathcal{O}(X^{1/2+\varepsilon})\,, \tag{5}$$

където ε е произволно малко положително число.

През 1937 г. И. М. Виноградов [2] открива метод за оценяване на експоненциални суми от вида

$$S(\alpha) = \sum_{p \le N} e^{2\pi i \alpha p}\,, \tag{6}$$

където сумирането е по прости числа. Очевидно, изпълнено е тривиалното неравенство $|S(\alpha)| \le \pi(N)$[2]. Използувайки остроумни комбинаторни разсъждения, Виноградов установява, че ако реалното число α не е „твърде близко“ до рационална дроб

[1] Нулите на всички L-функции на Дирихле имат реални части ненадминаващи $\frac{1}{2}$. Тази хипотеза не е доказана (или опровергана) и се счита, че е един от най–важните проблеми в математиката.

[2] Както обикновено, $\pi(N)$ означава броя на простите числа ненадминаващи N.

с „малък“ знаменател, то дробните части на числата αp са „равномерно разпределени“ в интервала $[0,1)$. Поради това събираемите в сумата от дясната част на (6) се „унищожават взаимно“ и $|S(\alpha)|$ може да се оцени много по-точно. Благодарение на тези съображения Виноградов успява да избегне използуването на *OXP* и намира безусловно доказателство на асимптотичната формула (4).

Методът на Виноградов позвлява да бъде ефективно изчислено такова N_0, че всяко нечетно число $N > N_0$ да се представя като сума на три прости числа. Известно е, че може да се вземе $N_0 = 10^{1346}$ (Лиу и Ванг [38]), а ако се предполага верността на *OXP* (Дезуйе и съавтори, [16]) то $N_0 = 5$.

След откритието на Виноградов много математици прилагат неговия метод за решаването на разнообразни адитивни задачи с прости числа. В частност, Чудаков [8], Естерман [17] и Ван дер Корпут [51] независимо един от друг доказват, че за величината $E(X)$, определена по-горе, е изпълнено

$$E(X) = \mathcal{O}\Big(\frac{X}{\log^A X}\Big), \tag{7}$$

където A е произволно голяма константа. Тази оценка е много по-слаба от (5), но пък за сметка на това е доказана без използването на *OXP* или други недоказани твърдения.

Оценката (7) е интересна сама по себе си, но има също и важни приложения. Например, от нея се получава друго решение на тернарния проблем на Голдбах. Наистина, нека N е нечетно число. Да разгледаме редицата $N-p$, където p пробягва простите числа за които $2 < p < N$. Членовете на тази редица са четни числа, а от известната теорема на Чебишев следва, че броят им е не по–малък от $\dfrac{cN}{\log N}$, където $c > 0$ е константа. Прилагайки (7) при $A = 2$ виждаме, че ако N е достатъчно голямо, то непременно ще съществува просто p, за което $N-p$ е сума на две прости числа и, следователно, N ще бъде сума на три прости числа.

Съществен напредък при оценяването на $E(X)$ е получен от Монтгомери и Вон [39], които установяват, че съществува (ефективно изчислима) константа $\delta > 0$, такава че

$$E(X) = \mathcal{O}(X^{1-\delta})\,. \tag{8}$$

Най–добрата известна оценка от този тип е получена от Ли [37], който установява (8) при $\delta = 0.086$.

За по–подробна информация относно кръговия метод и приложението му в адитивната теория на числата препоръчваме на читателя монографиите на Виноградов [3, 4], Карацуба [5] и Вон [52].

3. Методи на решетото. Един от най–старите методи в математиката е *решетото на Ератостен*, с чиято помощ се определят простите числа ненадминаващи дадена константа и се изчисляват стойностите на функцията $\pi(x)$ при зададени не много големи x. През миналия век бяха разработени много по-усъвършенствувани методи, чрез които от дадена редица от числа се „отсяват“ елементи със зададени свойства и, в частност, числа с ограничен брой прости множители (така наречените *почти прости числа*).

Нека r е естествено число. Казваме, че естественото число n е почти просто от ред r и записваме $n = P_r$, ако каноничното разлагане на n се състои от най–много r на брой прости множителя (всеки от тях се брои толкова пъти, колкото е степента му с която влиза в това каноничното разлагане). Например, числата 4, 5, 10 и 15 са почти прости от ред 2, докато $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ не е такова, но е почти просто от ред 3.

Интересно приближение към бинарната хипотеза на Голдбах е получено през 1919 г. от В. Брун [12]. Използувайки своя метод на решетото, който днес носи неговото име, Брун доказва, че всяко достатъчно голямо четно число N се представя във вида

$$P_9 + P_9' = N\,.$$

Брун прилага същия метод и към проблема за простите числа близнаци и доказва, че съществуват безбройно много двойки почти–прости числа P_9, P_9', такива че $P_9+2=P_9'$.

През 1930 г. Шнирелман [9] чрез оригинални вероятностни съображения и използувайки решетото на Брун доказва, че съществува такова естествено число g, че всяко естествено число може да се представи като сума на не повече от g прости числа[3]. Константата g е известна като константа на Шнирелман и може да бъде ефективно изчислена. Методът на Шнирелман впоследствие е усъвършенстван и с негова помощ горният резултат е установен при $g = 6$ (Рамаре [44]). Ясно е, обаче, че методите на Харди–Литлууд и Виноградов дават по–точен резултат.

През четиридесетте години на миналия век Селберг [45, 46] разработва мощен и удобен метод, известен днес като *решето на Селберг*. По–късно методите на решетото са усъвършенствувани и приложени в широк кръг от задачи от много математици. Едно от най–важните открития в тази област принадлежи на Чен [15], който през 1973 г. доказва, че всяко достатъчно голямо четно N се представя във вида

$$p + P_2 = N\,,$$

където p е просто число, а P_2 е почти просто от ред 2. Чен прилага своя метод и към хипотезата за простите числа близнаци и установява, че съществуват безбройно много прости числа p, такива че $p + 2 = P_2$.

За систематично изучаване на методите на решетото и приложението им за различни задачи от теорията на числата препоръчваме на читателя монографиите на Халберстам и Рихерт [21], Хооли [30] и Грийвс [19].

4. Задачи, подобни на проблемите на Голдбах. С помощта на метода на Виноградов е възможно да се изследва представимостта на големите числа N във вида

$$p_1 + p_2 + \gamma = N,$$

където p_1, p_2 са прости числа, а числата γ пробягват редица от стойности, която може да е твърде рядка. Например, не е трудно да се изследва случая когато γ е n–та степен на естествено число при фиксирано цяло $n \geq 2$ (Карацуба [5], глава 12).

Много интересен резултат от този тип е известната теорема на Линник [6], според която съществува такава константа t, че всяко достатъчно голямо N да се представя

[3]Шнирелман доказва този резултат преди публикуването на знаменитата теорема на Виноградов.

във вида

$$p_1 + p_2 + 2^{\nu_1} + \cdots + 2^{\nu_k} = N\,, \tag{9}$$

където p_1, p_2 са прости числа, ν_i са неотрицателни цели числа, а $k \leq t$. Тук γ пробягва редица, за която броят на елементите, ненадминаващи X, е само $\mathcal{O}(\log^t X)$. Неотдавна Хийт-Браун и Пухта [28] установиха, че за представимостта на N във вида (9) е достатъчно да се вземе $k = 13$, а ако се допусне верността на *OXP*, то е достатъчно $k = 7$. Независимо от тях Пинц и Ружа [43] установиха разрешимостта на (9) при $k = 8$ и, съответно, $k = 7$, ако се допуска верността на *OXP*.

Нека споменем още една популярна хипотеза относно простите числа: за всяко цяло число $r \geq 3$ съществуват безбройно много аритметични прогресии съставени от r на брой различни прости числа. При $r = 3$ това означава, че съществуват безбройно много тройки различни прости числа, удовлетворяващи уравнението

$$p_1 - 2p_2 + p_3 = 0.$$

Това твърдение, явно, е подобно на тернарния проблем на Голдбах и се доказва с помощта на метода на Виноградов. Ако е изпълнено, обаче, $r \geq 4$, то ще трябва да изследваме система от $r - 2$ уравнения с r неизвестни прости числа и тази задача е извън обхвата на съвременните методи. Интересен резултат в това направление е получен от Хийт-Браун [25], който установява съществуването на безбройно много аритметични прогресии, съставени от четири различни члена, три от които са прости числа, а четвъртото е почти просто от тип P_2.

Друго естествено обобщение на проблемите на Голдбах е така нареченият проблем на Уоринг-Голдбах, отнасящ се за представимостта на числата N във вида

$$p_1^n + \cdots + p_k^n = N, \tag{10}$$

където $n \geq 2$ и k са зададени цели числа, като $k \geq k_0(n)$, а p_i са прости числа. Например, през 1938 г. Хуа [31] доказва разрешимостта на (10) в прости числа p_i в случая $n = 2$ и $k = 5$ и за достатъчно големи $N \equiv 5 \pmod{24}$. Уравнението (10), а също и системи уравнения от този тип, са систематично изследвани монографиите на Виноградов [3, 4] и Хуа [32].

Предполага се, че големите числа N, удовлетворяващи някои естествени аритметични условия, могат да се представят като сума на четири или даже на три квадрата на прости числа. Съвремените методи не позволяват тези хипотези да бъдат доказани. Установени са, обаче, някои по–слаби резултати от подобен тип. Грийвс [18] и Плаксин [7] изследват уравнението

$$x_1^2 + \ldots x_4^2 = N\,, \tag{11}$$

където две от неизвестните са прости числа, но върху другите две няма наложени ограничения. Брудерн и Фуври [13] доказват, че ако N е достатъчно голямо и $N \equiv 4 \pmod{24}$, то (11) има решение в почти прости неизвестни, всяко от които е от тип P_{34}.

Голям брой математици са работили и продължават да работят върху задачи от подобен вид и има публикувани огромен брой книги и статии по тази тематика. Тук ще споменем само някои от постиженията на български математици.

Хийт-Браун и авторът [29] доказват разрешимостта на (11) за достатъчно големи $N \equiv 4 \pmod{24}$, като едното от неизвестните е просто число, а останалите три са

почти прости от от тип P_{101}. В [29] е уточнен също резултатът на Брудерн и Фуври от [13]. Впоследствие авторът [50], доказа разрешимостта на (11) с едно просто и три почти прости неизвестни от тип P_{80}, а така също с четири почти прости неизвестни от тип P_{21}.

В няколко статии [40, 42, 47–49] Пенева и авторът, мотивирани от работата на Хийт–Браун [25], разглеждат уравнения с прости неизвестни p, такива че $p+2$ да е почти просто число. Например, в [48] е доказано, че всяко достатъчно голямо $N \equiv 4 \pmod 6$ може да се представи във вида (2), като $p_1+2 = P_2$, $p_2+2 = P_5$, $p_3+2 = P_7$.

Интересни резултати за уравнения от вида (10) и други сродни задачи са получени от Кумчев [14] (съвместно с Брудерн), [33–36]. Той намира нови оценки за експоненциални суми с прости числа и като следствие от тях в случаите, когато k е „малко“ по отношение на n, получава нови и значително по–точни оценки за броя на числата N, ненадминаващи X и непредставими във вида (10).

Трябва да спомена и статията на Пенева [41], посветена на оценяването на броя на четните числа в „къси“ интервали, които не се представат във вида (1). За този свой резултати Пенева беше удостоена с престижната награда на *Ramanujan Society.*

Да се надяваме, че в бъдеще и други наши математици ще се включат в изследването и ще допринесат за развитието на тази важна и трудна теория.

5. Заключение. В последното десетилетие бяхме свидетели на фундаментални открития в теорията на числата, най-впечатляващото от които, несъмнено, е доказателството на Е. Уайлс на хипотезата на Ферма.

Важни открития бяха извършени и в аналитичната теория на числата, в частност, в теорията на простите числа. Оказа се, че методите на решетото могат да се прилагат успешно за откриване на прости (а не само почти прости) числа в някои „редки“ полиномиални редици от естествени числа. През 1998 г. Фридлендер и Иваниец [20] установиха, че има безбройно много прости числа от вида $x^2 + y^4$ (броят на числата от този вид, ненадминаващи X, е от порядък $X^{3/4}$). Още по–рядка полиномиална редица, съдържаща безбройно много прости числа, бе открита от Хийт-Браун [26]. През 2001 г. този учен установи, че има безбройно много прости числа от вида $x^3 + 2y^3$ (броят на числата от този вид, ненадминаващи X, е от порядък $X^{2/3}$). По-късно Хийт-Браун и Мороз [27] доказаха съществуването на безбройно много прости числа, представими чрез зададена кубична бинарна форма, удовлетворяваща някои естествени аритметични условия.

Ще отбележим също и изключително важните резултати на на Бомбиери, Фридлендер и Иваниец [11], които са продължение на класическата теорема на Бомбиери-А. Виноградов от теорията за разпределението на простите числа в аритметични прогресии с „големи“ модули (виж [1, 10]).

Тези открития ни дават надеждата, че ще бъде установено наличието на прости числа и в други аритметични редици и, може би, и в редицата $N - p$, където N е голямо четно число, а $p < N$ пробягва прости числа. С това бинарната хипотеза на Голдбах ще бъде доказана. Може би това ще се случи в не толкова далечно бъдеще!

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Виноградов. О плотностной гипотезе для L–рядов Дирихле. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **29** (1965), 903–934.

[2] И. М. Виноградов. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел. *ДАН СССР*, **15** (1937), 6–7.

[3] И. М. Виноградов. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. Наука, Москва, 1980.

[4] И. М. Виноградов. Особые варианты метода тригонометрических сумм. Наука, Москва, 1976.

[5] А. А. Карацуба. Основы аналитической теории чисел. Наука, Москва, 1983.

[6] Ю. В. Линник. Складывание простых чисел со степенями одного и того же числа. *Мат. Сборник*, **32** (1953), 3–60.

[7] В. А. Плаксин. Асимптотическая формула числа решений нелинейного уравнения с простыми числами. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **45** (1981), 321–397.

[8] Н. Г. Чудаков. О плотности совокупности четных чисел непредставимых как суммы двух нечетных простых. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **2** (1938), 25–40.

[9] Л. Г. Шнирелман. Об аддитивных свойствах чисел. *Изв. Донского Политехн. ин–та (Новочеркаск)*, **14** (1930), 3–28.

[10] E. Bombieri. On the large sieve. *Mathematika*, **12** (1965), 201–225.

[11] E. Bombieri, J. Friedlander, H. Iwaniec. Primes in arithmetic progressions to large moduli. *Acta Math.*, **156** (1986), 203–251; II, *Math. Ann.*, **277** (1987), 361–393; III, *J. Amer. Math. Soc.*, **2**, (1989), 215–221.

[12] V. Brun. Le crible d'Eratostène et le théorème de Goldbach. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **168** (1919), 544–546.

[13] J. Brüdern, E. Fouvry. Lagrange's Four Squares Theorem with almost prime variables. *J. Reine Angew. Math.*, **454** (1994), 59–96.

[14] J. Brüdern, A. V. Kumchev. Diophantine approximations by cubes of primes and almost–primes II. *Illinois J. Math.*, **45** (2001), 309–321.

[15] J.-R. Chen. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Sci. Sinica*, **16** (1973), 157–176.

[16] J.-M. Deshouillers, G. Effinger, H. te Riele, D. Zinoviev. A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1997), 99–104, (electronic).

[17] T. Estermann. On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes. *Proc. London Math. Soc. (2)*, **44** (1938), 307–314.

[18] G. Greaves. On the representation of a number in the form $x^2+y^2+p^2+q^2$ where p and q are odd primes. *Acta Arith.*, **29** (1976), 257–274.

[19] G. Greaves. Sieves in Number Theory. Springer-Verlag, New York, 2001.

[20] J. B. Friedlander, H. Iwaniec. The polynomial X^2+Y^4 captures its primes. *Ann. of Math. (2)*, **148** (1998), 963–1040.

[21] H. Halberstam, H.-E. Richert. Sieve Methods. Academic Press, London, 1974.

[22] *G. H. Hardy, J. E. Littlewood.* A new solution of Waring's problem. *Quart. J. Math. Oxford*, **48** (1919), 272–293.

[23] G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some problems of "'Partitio Numerorum"': I. A new solution of Waring's problem. *Göttingen Nach.* (1920), 33–54.

[24] G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some problems of "'Partitio Numerorum"': III. On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Math.*, **44** (1923), 1–70.

[25] D. R. Heath-Brown. Three primes and an almost-prime in arithmetic progression. *J. London Math. Soc. (2)*, **23** (1981), 396–414.

[26] D. R. Heath-Brown. Primes represented by $x^3 + 2y^3$. *Acta Math.*, **186** (2001), 1–84.
[27] D. R. Heath-Brown, B. Z. Moroz. Primes represented by binary cubic forms. *Proc. London Math. Soc.*, **84** (2002), 257–288.
[28] D. R. Heath-Brown, J.-C. Puchta. Integers represented as a sum of primes and powers of two. *Asian J. Math.*, **6** (2002), 535–566.
[29] D. R. Heath–Brown, D. I. Tolev. Lagrange's four squares theorem with one prime and three almost–prime variables. *J. Reine Angew. Math.*, **558** (2003), 159–224.
[30] C. Hooley. Applications of sieve methods to the theory of numbers. Cambridge Univ. Press, 1976.
[31] L.-K. Hua. Some results in the additive prime number theory. *Quart. J. Math.*, **9** (1938), 68–80.
[32] L.-K. Hua. Additive Theory of Prime Numbers. Amer. Math. Soc., Providence, 1965.
[33] A. V. Kumchev. Diophantine approximations by cubes of primes and almost primes. *Rocky Mountain J. Math.*, **30** (2000), 961–980.
[34] A. V. Kumchev. On the Waring-Goldbach problem: exceptional sets for sums of cubes and higher powers. *Canad. J. Math.*, (in press).
[35] A. V. Kumchev. On Weyl sums over primes and almost–primes, .
[36] A. V. Kumchev. The Waring–Goldbach problem for seventh powers, .
[37] H. Li. The exceptional set of Goldbach numbers II. *Acta Arith.*, **92** (2000), 71–88.
[38] M. C. Liu, T. Z. Wang. On the Vinogradow bound in the three prime Goldbach conjecture. *Acta Arith.*, **105** (2002), 133–175.
[39] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan. The exceptional set in Goldbach's problem. *Acta Arith.*, **27** (1975), 353–370.
[40] T. P. Peneva. On the ternary Goldbach problem with primes p_i such that $p_i + 2$ are almost-primes. *Acta Math. Hungar.*, **86** (2000), 305–318.
[41] T. P. Peneva. On the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals. *Monaths. Math.*, **132** (2001), 49–65.
[42] T. P. Peneva, D. I. Tolev. An additive problem with primes and almost-primes. *Acta Arith.*, **83** (1998), 155–169.
[43] J. Pintz, I. Z. Ruzsa. On Linnik's approximation to Goldbach's problem I. *Acta Arith.*, **102** (2003), 169–194.
[44] O. Ramaré. On Shnirel'man's constant. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.*, **22** (1995), 645–706.
[45] A. Selberg. The general sieve method and its place in prime number theory. *Proc. Internat. Congress Math., Cambridge, Mass.*, **1** (1950), 286–292.
[46] A. Selberg. Sieve methods. *Proc. Sympos. Pure Math.*, **20** (1971), 311–351.
[47] D. I. Tolev. Arithmetic progressions of prime–almost–prime twins. *Acta Arith.*, **88** (1999), 67–98.
[48] D. I. Tolev. Representations of large integers as sums of two primes of special type. Proceedings of the Conference on Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis, (Graz 1998), de Gruyter, 2000, 485–495.
[49] D. I. Tolev. Additive problems with prime numbers of special type. *Acta Arith.*, **96** (2000), 53–88.
[50] D. I. Tolev. Lagrange's four squares theorem with variables of special type. *Proc. Conferenence of Analytic Number Theory and Diophantine Equations*, Max–Planck Institute of Mathematics, Bonn, 2002.
[51] Van der Corput. Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten. *Math. Ann.*, **116** (1939), 1–50.
[52] R. C. Vaughan. The Hardy–Littlewood method, Sec. ed. Cambridge Univ. Press, Second edition, 1997.

Факултет по Математика и Информатика
Пловдивски Университет „Паисий Хилендарски“
ул. „Цар Асен“ 24
4000 Пловдив
e-mail: dtolev@pu.acad.bg

GOLDBACH PROBLEMS – PAST, PRESENT AND FUTURE.

D. Tolev

In this paper the classical Goldbach problems are formulated. Information about and some recent results, related to them, is given.
2000 Mathematics Subject Classification: 11P32.
Key words: Goldbach problems; prime numbers.