

ПЛАСТИЧНА ХИРУРГИЯ И КОМБИНАТОРНА ТОПОЛОГИЯ

Николай Хаджииванов

Предложен е математически модел на един проблем на пластичната хирургия и неговото решение с помощта на основна теорема от комбинаторната топология.

1. Увод. Нека T е триъгълник, а $\tilde{T}$ е затворената област с контур T . Изображението $r : \tilde{T} \rightarrow T$ е ретракция, ако $r(x) = x$ за всяко $x \in T$, и е псевдоретракция, ако x и $r(x)$ са върху една и съща страна на T за всяко $x \in T$.

Нека $x_0 \in \tilde{T}$ и $O_\delta(x_0)$ е δ -околност на x_0 в $\tilde{T}$. Осцилацията на r в $O_\delta(x_0)$ ще означим с $\omega_\delta(r, x_0)$. Числото $j(r, x_0) = \inf\{\omega_\delta(r, x_0) | \delta > 0\}$ ще наречем *скок на r в x_0* . Разкъсване на $\tilde{T}$ при псевдоретракцията r наричаме числото $d(r) = \sup\{j(r, x) | x \in \tilde{T}\}$.

Очевидно е, че r е непрекъсната в x_0 точно тогава, когато скокът ѝ в тази точка е 0. Ясно е, че за всяко положително ϵ и за всяко положително δ в $O_\delta(x_0)$ могат да се намерят такива точки x_δ и y_δ , че разстоянието $d(r(x_\delta), r(y_\delta))$ между $r(x_\delta)$ и $r(y_\delta)$ да е по-голямо от $j(r, x_0) - \epsilon$, но има такова положително δ_0 , че за всеки две точки x и y от $O_{\delta_0}(x_0)$ е в сила неравенството $d(r(x), r(y)) < j(r, x_0) + \epsilon$.

Да си представим триъгълна еластична ципа $\tilde{T}$, опъната и закрепена неподвижно по контура си за триъгълна рамка T . Ако се опитаме да изтеглим тази ципа върху рамката, непременно ще я разкъсваме. Това е така, защото математическият модел на подобно изтегляне е ретракция, а всяка ретракция на триъгълна област върху контура ѝ притежава поне една точка на прекъсване съгласно една знаменита теорема на Брауер. Дори и ципата да е закрепена само във върховете на триъгълната рамка, стига контурът ѝ да се хлъзга по страните на рамката без да напуска никоя страна, прекъсване пак ще има, защото математическият модел на изтегляне от такъв тип е псевдоретракция, а твърдението на Брауер е вярно и за псевдоретракции.

Скокът в някоя точка характеризира „степената на разкъсването“ на ципата в нея.

Пример. Нека $\triangle XYZ$ е вписан в $\triangle ABC = T$, а D е вътрешна точка на областта с контур $\triangle XYZ$. Ако $x \in \tilde{T}$ и x е вътрешна за $\triangle BDC$, с $r(x)$ ще означим успоредната на правата DX проекция на x върху страната $[BC]$. Аналогично ще дефинираме r и за $\triangle CDA$ и $\triangle ADB$: в първия от тези два ъгъла проектираме успоредно на DY , а във втория – на DZ . Върху отсечката $[DB]$ ще дефинираме r както в $\triangle BDC$, върху отсечката $[DC]$ – както в $\triangle CDA$, а върху отсечката $[DA]$ – както в $\triangle ADB$.

По такъв начин е дефинирана ретракция $r: \tilde{T} \rightarrow T$. Тя е непрекъсната във всички точки на $\tilde{T}$ с изключение на точките, които лежат върху отсечките $[DA)$, (DB) , (DC) . В точките на тези отсечки ретракцията е прекъсната. Ако $x \in [DB)$, тогава $j(r, x) \leq |XZ|$, като равенство има само при $x = D$. Аналогични неравенства са верни и върху отсечките (DC) и (DA) : при $x \in (DC)$ имаме $j(r, x) < |XY|$, а при $x \in (DA)$ – $j(r, x) < |YZ|$. Така се убеждаваме, че $j(r, x) \leq \text{diam } \triangle XYZ$, като равенството се достига само при $x = D$. Поради това $d(r) = \max(|XY|, |YZ|, |ZX|) = \text{diam } \triangle XYZ$.

Минимално разкъсване при ретракция от такъв вид има за онази, за която $\triangle XYZ$ има минимален диаметър. Оказва се, че такъв триъгълник има, защото е вярна следната

Теорема 1. Нека $T = \triangle ABC$ е триъгълник с ъгли α , β , γ , като γ е най-големият измежду тях, и радиус R на описаната окръжност. Измежду вписаните в T триъгълници при $\gamma \leq 120^\circ$ най-малък диаметър има само един и той е равностранен със страна

$$\delta_0 = \frac{2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos(60^\circ + \gamma)}},$$

а при $\gamma > 120^\circ$ – той е равнобедрен с диаметър

$$\delta_1 = \frac{2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta},$$

равен на бедрата му, които са перпендикулярни на CA и CB .

Нека отбележим, че $\delta_1 < \delta_0$ при $\gamma \neq 120^\circ$ и $\delta_1 = \delta_0$ при $\gamma = 120^\circ$.

След Примера и Теорема 1 вече е уместно да формулираме и основния резултат:

Теорема 2. Нека $T = \triangle ABC$ е триъгълник с ъгли α , β , γ , от които най-големият е γ , и радиус R на описаната окръжност. Да положим $d = \delta_0$ при $\gamma \leq 120^\circ$ и $d = \delta_1$ при $\gamma > 120^\circ$. Ако $r: \tilde{T} \rightarrow T$ е псевдоретракция на затворената триъгълна област $\tilde{T}$ върху контура ѝ T , тогава разкъсването $d(r)$ на $\tilde{T}$ относно r е поне d . При това съществува ретракция на $\tilde{T}$ върху T с разкъсване d .

Изследването на разкъсванията при ретракции на правоъгълна и кръгова области е по елементарно. На тези изследвания са посветени [1] и [2].

2. Минимален равностраничен триъгълник, вписан в даден триъгълник. В този пункт ще започнем подготовката за доказване на Теорема 1.

Лема 1. Страните $[YZ]$ и $[ZX]$ на равностраничния триъгълник XYZ със страна δ са основи на равнобедрените триъгълници YZK и XZL , като K и X са от различни страни на правата YZ , а L и Y – на правата XZ . Ако 2α и 2β съответно са ъглите при върховете K и L на тези два триъгълника, то

$$|KL| = \frac{\delta \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos(60^\circ + \gamma)}}{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta},$$

където $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Доказателство. Имаме $|KZ| = \frac{\delta}{2 \sin \alpha}$, $|LZ| = \frac{\delta}{2 \sin \beta}$, $\angle KZY + \angle YZX + \angle XZL = \gamma + 60^\circ$.

Ако $\gamma = 120^\circ$, тогава Z е върху отсечката $[KL]$ и следователно $|KL| = \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$. Това равенство в случая съвпада с желаното.

Нека $\gamma \neq 120^\circ$. Ъгълът при върха Z на триъгълника KLZ е равен на $60^\circ + \gamma$ или е допълнението на този ъгъл до 360° . Сега, като приложим косинусовата теорема за $\triangle KLZ$ получаваме желаното равенство.

Лема 1 е доказана. $\square$

Лема 2. Нека $T = \triangle ABC$ е триъгълник с ъгли α, β, γ , най-големият от които е γ , и радиус R на описаната окръжност. В триъгълника T може да се впише равнобедрен триъгълник със страна δ_0 .

Доказателство. Нека XYZ е равнобедрен триъгълник със страна, равна на δ_0 , и K, L са точките от формулировката на лема 1. С M и N ще означим средите на $[YZ]$ и $[XZ]$. Върху правата през Z , успоредна на KL , ще разгледаме двата противоположни лъча $p^\rightarrow$ и $q^\rightarrow$ с начало Z , първият от които пресича лъча $MK^\rightarrow$. Тъй като $\angle(YZ^\rightarrow, p^\rightarrow) < 90^\circ$ и $\alpha < 90^\circ$, върху лъча $p^\rightarrow$ има единствена точка A' , за която $\angle ZA'Y = \alpha$. Аналогично се дефинира B' – единствената точка върху оста $q^\rightarrow$, за която $\angle ZB'Y = \beta$. Ясно е, че A' лежи върху окръжността k с център K , която минава през точките Z и Y , а B' – върху окръжността l с център L , която минава през точките Z и X . Нека K' и L' са ортогоналните проекции на точките K и L съответно върху осите $p^\rightarrow$ и $q^\rightarrow$. Точката K' е средата на хордата $[A'Z]$ на окръжността k , а L' е средата на хордата $[B'Z]$ на окръжността l . Поради това $|KL| = |K'L'| = \frac{|A'B'|}{2}$.

От Лема 1 следва, че

$$|KL| = \frac{\delta_0 \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos(60^\circ + \gamma)}}{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

В това равенство ще заместим δ_0 с израза му от формулировката на Теорема 1 и така ще получим $|KL| = R \sin \gamma$. Следователно $|A'B'| = 2R \sin \gamma = |AB|$.

Ще означим с C' пресечната точка на правите $A'Y$ и $B'X$. Триъгълниците ABC и $A'B'C'$ са еднакви, понеже $|AB| = |A'B'|$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$.

Лема 2 е доказана. $\square$

Основното твърдение в този пункт е следната

Лема 3. Нека $T = \triangle ABC$ е триъгълник с ъгли α, β, γ и радиус R на описаната окръжност. Има единствен равнобедрен триъгълник с минимална страна, вписан в T . Този триъгълник има страна δ_0 .

Доказателство. Нека равнобедреният триъгълник със страна δ е вписан в T и K, L са точките от лема 1. От лема 1 следва, че $|KL| = \frac{\delta}{\delta_0} \cdot R \sin \gamma = \frac{\delta}{\delta_0} \cdot \frac{|AB|}{2}$. Върхът A лежи върху тази дъга от окръжността k с център K , от всяка точка на която $[ZY]$ се вижда под ъгъл α , а B – върху онази дъга от окръжността l с център L , от всяка точка на която $[ZX]$ се вижда под ъгъл α . С P и Q ще означим ортогоналните проекции съответно на K и L върху правата AB . Очевидно $|KL| \geq |PQ| = \frac{|AB|}{2}$.

От двете съотношения за $|KL|$ следва че $\delta \geq \delta_0$. При това равенството е налице точно тогава, когато $KL \parallel AB$, т.е. $\triangle XYZ$ е еднакъв с построения в лема 2.

Лема 3 е доказана. $\square$

3. Триъгълник с минимален диаметър, вписан в даден триъгълник. В този пункт ще завършим доказателството на Теорема 1.

Лема 4. *Функцията $d(X, Y, Z) = \max(|XY|, |YZ|, |ZX|)$, дефинирана при $X \in [BC]$, $Y \in [CA]$, $Z \in [AB]$, има най-малка стойност d_0 . Измежду триъгълниците, вписани в $T = \triangle ABC$, има такъв, чийто диаметър е d_0 и следователно е най-малък.*

Доказателство. Функцията $d(X, Y, Z)$ е непрекъсната в паралелепипеда $[BC] \times [CA] \times [AB]$ и следователно има най-малка стойност d_0 .

Нека (X_0, Y_0, Z_0) е тройка, за която $d(X_0, Y_0, Z_0) = d_0$. Ще докажем, че тези три точки са върхове на триъгълник. Очевидно е, че този триъгълник ще е с най-малък диаметър измежду всички вписани в T триъгълници.

Преди всичко ще докажем, че трите точки са различни. Да допуснем противното и нека например $X_0 = Y_0$. Тогава $X_0 = Y_0 = C$ и $d_0 = |CZ_0|$.

За точката $Z_0 \in [AB]$ има две възможности: тя е вътрешна за страната или съвпада с някой от краищата ѝ. Ще отхвърлим последователно и двете.

Нека $Z_0 \in (AB)$. Тогава очевидно Z_0 съвпада с петата C_1 на височината през C , защото в противен случай за произволна точка $Z_1 \in (C_1, Z_0)$ е вярно неравенството $|CZ_1| < |CZ_0|$, така че $d(X_0, Y_0, Z_1) = |CZ_1| < d_0$, което е невъзможно.

И така $Z_0 = C_1$. Ще означим с D ортогоналната проекция на Z_0 върху правата AC , а с E – ортогоналната проекция на Z_0 върху правата CB . Върху (CD) и (CE) съответно ще изберем точки Y_1 и X_1 толкова близо до C , че $|X_1Y_1| < d_0$. Очевидно $|Y_1Z_0| < d_0$ и $|Z_0X_1| < d_0$. Тогава $d(X_1, Y_1, Z_0) < d_0$, което е противоречие.

И така, при $X_0 = Y_0$ е сигурно, че $Z_0 \notin (AB)$. Без ограничение на общността можем да приемем, че $Z_0 = A$ и следователно $d_0 = |AC|$. Ако α е остър, ще вземем $Z_1 \in (AC_1)$. Ясно е, че $|CZ_1| < |AC|$ и следователно $d(X_0, Y_0, Z_1) = |CZ_1| < d_0$, което е противоречие. Поради това α не е остър. Петата A_1 на височината през A е върху отсечката (BC) . Ще вземем точките $X_1 \in (A_1C)$ и $Y_1 \in (AC)$ толкова близко до C , че $|X_1Y_1| < d_0$. Тъй като $|X_1A| < |AC|$ и $|Y_1A| < |AC|$, то $d(X_1, Y_1, Z_0) < d_0$, което е противоречие.

Доказахме, че точките X_0, Y_0, Z_0 са различни. Остава да докажем, че те не са върху една права. Ако допуснем противното, без ограничение на общността можем да приемем, че $X_0 = B, Y_0 = A, Z_0 \in (AB)$. Поне един от ъглите α и β е остър. Без ограничение на общността можем да считаме, че такъв е първият от тях. Ще вземем $Y_1 \in (AD) \cap (AC)$, където D е ортогоналната проекция на Z_0 върху AC . Имаме $|Z_0Y_1| < |AZ_0| < |AB|$, $|BY_1| < |AB|$. Следователно $d(X_0, Y_1, Z_0) < |AB| = d_0$, което е противоречие.

Лема 4 е доказана. $\square$

Лема 5. *Във всеки триъгълник с минимален диаметър, вписан в триъгълника ABC , двете най-големи страни са равни.*

Доказателство. Нека $[X_0Y_0]$ е най-голямата страна на триъгълника $X_0Y_0Z_0$ с

минимален диаметър d_0 измежду вписаните в $T = \triangle ABC$. Трябва да докажем, че поне една от другите му две страни е равна също на d_0 . Да допуснем противното.

Ако X_0 и Y_0 са върху една и съща страна на T , тогава поне едната от тези две точки съвпада с C . Без ограничение на общостта можем да приемам, че $Y_0 = C$. Имаме $|X_0Y_0| > |Y_0Z_0|$ и $|X_0Y_0| > |Z_0X_0|$. Върху отсечката $[CX_0]$ ще вземем точка X_1 толкова близо до X_0 , че $|X_1Y_0| > |Y_0Z_0|$ и $|X_1Y_0| > |Z_0X_1|$. По такъв начин сме сигурни, че $d(X_1, Y_0, Z_0) = |X_1Y_0| < |X_0Y_0| = d(X_0, Y_0, Z_0)$, а това е противоречие.

И така, X_0 и Y_0 са върху различни страни на T . Тогава C не съвпада с никоя от тези две точки. Върху (CX_0) и (CY_0) ще вземем съответно точки X_1 и Y_1 , така че $X_1Y_1 \parallel X_0Y_0$ и при това да са толкова близко съответно до X_0 и Y_0 , че $|X_1Y_1| > |CX_1|, |X_1Y_1| > |CY_1|$. Тогава $d(X_1, Y_1, Z_0) = |X_1Y_1| < |X_0Y_0| = d(X_0, Y_0, Z_0)$, което е противоречие.

Лема 5 е доказана. $\square$

Лема 6. *Върховете на всеки триъгълник с минимален диаметър, вписан в $T = \triangle ABC$, са вътрешни точки за страните на T .*

Доказателство. Нека $\triangle X_0Y_0Z_0$ е с минимален диаметър d_0 измежду триъгълниците, вписани в T . От лема 5 знаем, че двете му най-големи страни са равни. Тогава ъгълът между тях е най-много 60° . Да допуснем противното на това, което искаме да докажем, и нека например $Y_0 = C$. Тъй като $\triangle X_0Y_0Z_0$ е остроъгълен, то $\angle Z_0X_0Y_0$ е остър и поради това върху (X_0Y_0) можем да вземем точка X_1 толкова близо до X_0 , че $|Z_0X_1| < |Z_0X_0|$. Разбира се, и $|Y_0X_1| < |Y_0X_0|$. Триъгълникът $X_1Y_0Z_0$ също е вписан в T . Ако $|Y_0Z_0| = d_0$, този триъгълник също има диаметър d_0 , но най-голямата му страна $[Y_0Z_0]$ е по-голяма от останалите две, а това противоречи на Лема 5. Ако $|Y_0Z_0| < d_0$, тогава $\triangle X_1Y_0Z_0$ има диаметър, помалък от d_0 , което е невъзможно.

Противоречието, до което достигнахме, показва, че не е възможно някой от върховете на триъгълника $X_0Y_0Z_0$ да бъде връх на T .

Лема 6 е доказана. $\square$

Лема 7. *Нека T_0 има минимален диаметър измежду всички вписани в $T = \triangle ABC$ триъгълници и γ е най-големият ъгъл на T . Ако T_0 не е равностраничен, тогава $\gamma > 120^\circ$ и единият от върховете на T_0 лежи върху ъглополовящата през върха C на триъгълника T , а страните на T_0 през този връх са перпендикулярни съответно на CA и CB и са равни на δ_1 .*

Доказателство. От лема 5 знаем, че двете най-големи страни на триъгълника $T_0 = \triangle PQR$ са равни; можем да считаме, че тези две страни са $[RP]$ и $[RQ]$. Тогава ъгълът между тях е не по-голям от 60° . Той е дори по-малък от 60° , тъй като триъгълникът T_0 по предположение не е равностраничен: $|PQ| < |RP| = |RQ|$.

От Лема 6 знаем, че всеки от върховете P, Q, R е вътрешна точка на страна на T . Ще докажем, че правата RP е перпендикулярна на страната на T , върху която е P . Да допуснем, че това не е вярно и нека M е ортогоналната проекция на R върху правата, на която лежи въпросната страна на T . Върху тази страна ще вземем точка P_1 между P и M толкова близо до P , че да бъде валидно неравенството $|RP_1| > |P_1Q|$. От $P_1 \in (MP)$ следва, че $|RP_1| < |RP| = |RQ|$. Триъгълникът

RP_1Q има диаметър $|QR|$, но най-голямата му страна е единствена. Полученото противоречие на Лема 5.

И така, RP е перпендикулярна на страната на T , на която лежи P . Аналогично, RQ е перпендикулярна на страната на T , на която е Q . Тъй като $|RP| = |RQ|$, то R е върху ъглополовящата на T през върха, противоположен на страната, върху която е R . Тогава ъгълът на T при този връх е равен на $180^\circ - \angle PRQ$ и следователно е по-голям от 120° . Ясно е тогава, че въпросният връх трябва да бъде C . Нека $P \in (CB)$, $Q \in (CA)$. За ъглополовящата CR имаме $|CR| = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\gamma}{2}$ и от правоъгълния $\triangle PBQ$ получаваме $|RP| = |CR| \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{ab}{a+b} \sin \frac{\gamma}{2} = \delta_1$. Тъй като $\angle PRQ < 60^\circ$, имаме $|PQ| < |RP| = |RQ|$. Следователно $\text{diam } \triangle PQR = \delta_1$.

Лема 7 е доказана. $\square$

Доказателство на Теорема 1. Нека T_0 е триъгълник с минимален диаметър, вписан в T (вж. Лема 4).

Ако $\gamma \leq 120^\circ$, тогава от Лема 7 следва, че T_0 е равнобедрен, а от Лема 3 следва, че T_0 е единственият равнобедрен триъгълник с минимална страна, вписан в T . При това страната му е равна на δ_0 .

Ако $\gamma > 120^\circ$, тогава или T_0 е равнобедрен и съгласно Лема 3 има страна δ_0 , или T_0 е равнобедреният триъгълник с диаметър δ_1 от Лема 7. Тъй като $\delta_1 < \delta_0$, равнобедреният триъгълник не може да има минимален диаметър. Така остава, че T_0 е равнобедрен с диаметър δ_1 .

Теорема 1 е доказана. $\square$

4. Разкъсване на триъгълна област при псевдоретракция върху контура ѝ. В този пункт ще докажем Теорема 2.

Доказателство на Теорема 2. На всяка точка $x \in \tilde{T}$ ще съпоставим номер $\nu(x)$ по следния начин: $\nu(x) = 1$, ако $r(x) \in [AB]$; $\nu(x) = 2$, ако $r(x) \in [BC]$ и $\nu(x) = 3$, ако $r(x) \in [CA]$. От това, че r е псевдоретракция, следва $r(A) = A$ и следователно $\nu(A) = 1$. Аналогично получаваме $\nu(B) = 2$ и $\nu(C) = 3$. Ясно е също, че ако x е върху някоя страна на T , тогава $\nu(x)$ е номерът на някой от краищата на тази страна. Наистина, ако $x \in [AB]$, тогава $x \in [AB]$ или $x = B$. В първия случай $\nu(x) = 1 = \nu(A)$, а във втория – $\nu(x) = \nu(B)$.

За всяко n ще вземем такава триангулация θ_n на триъгълната област $\tilde{T}$, всеки триъгълник на която има диаметър, по-малък от $\frac{1}{n}$. Върховете на триангулацията са номерирани автоматично с помощта на току-що въведената номерация на точките от $\tilde{T}$. Тази номерация на върховете на триангулацията θ_n удовлетворява граничните условия на лемата на Шпернер, както проверихме по-горе. Поради това можем да приложим тази лема и по такъв начин ще достигнем до заключението, че има триъгълник $[x_n y_n z_n]$ на триангулацията, всички върхове на който са номерирани различно; можем да приемем, че $\nu(x_n) = 1, \nu(y_n) = 2, \nu(z_n) = 3$. От дефиницията на номерацията знаем, че $r(x_n) \in [AB], r(y_n) \in [BC], r(z_n) \in [CA]$. От Лема 4 и Теорема 1 следва, че $d(r(x_n), r(y_n), r(z_n)) \geq d_0$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $d(r(x_n), r(y_n)) \geq d_0$.

Нека x_0 е точка на съгъстяване на редицата $\{x_n\}_n$. Тогава $x_0 \in \tilde{T}$ и тъй като $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, сигурно е, че за всяко положително δ има такава n , че x_n и y_n

принадлежат на $O_\delta(x_0)$. Това показва, че $\omega_\delta(r, x_0) \geq d$ за всяко положително δ . Следователно $j(r, x_0) \geq d$ и поради това $d(r) \geq d$.

За да завършим доказателството на теоремата, остава само да покажем, че съществува ретракция r на $\tilde{T}$ върху контура T , за която $d(r) = d_0$. Такава ретракция ще получим като в Примера изберем $\triangle XYZ$ така, че диаметърът му да е минимален измежду диаметрите на вписаните в T триъгълници.

Теорема 2 е доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Хаджииванов. Ретракции на триъгълна и правоъгълна области. *Математика*, **2** (2000), 2–12.
- [2] Н. Хаджииванов. Кръгови ретракции. *Математика*, **3** (2000), 2–4.

Николай Хаджииванов
 Факултет по математика и информатика
 Софийски университет „Св. Климент Охридски“
 бул. „Джеймс Баучер“ 5
 1164 София, България
 e-mail: hadzhiivanov@hotmail.com

PLASTIC SURGERY AND COMBINATORIAL TOPOLOGY

N. Khadzhiivanov

A mathematical model of a problem in plastic surgery is considered and solved by means of combinatorial topology methods.

Let T be a triangle and $\tilde{T}$ be the closed region with boundary T . The map $r : \tilde{T} \rightarrow T$ is called a pseudoretraction if x and $r(x)$ lie on the same side of T for any $x \in \tilde{T}$. Let $\omega_\delta(r, x_0)$ be the oscillation of the pseudoretraction r on the δ -neighbourhood $O_\delta(x_0)$ of point x_0 . Let $j(r, x_0) = \inf\{\omega_\delta(r, x_0) | \delta > 0\}$ and $d(r) = \sup\{j(r, x) | x \in \tilde{T}\}$. The number $d(r)$ is called here degree of discontinuity of the map r .

The main results obtained here are the following two theorems.

Theorem 1. Let $T = \triangle ABC$ be a triangle with angles α, β, γ , where γ is the greatest one, and R is the circumradius of T . For $\gamma \leq 120^\circ$ there is an unique inscribed in T triangle of minimal diameter which is equilateral with side equal to

$$\delta_0 = \frac{2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos(60^\circ + \gamma)}}$$

and for $\gamma > 120^\circ$ – it is isosceles with diameter

$$\delta_1 = \frac{2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

equal to its lateral sides, that are perpendicular to CA and CB .

Theorem 2. Let $T = \triangle ABC$ be a triangle with angles α, β, γ , where γ is the greatest one, and R is the circumradius of T . Set $d = \delta_0$ for $\gamma \leq 120^\circ$ and $d = \delta_1$ for $\gamma > 120^\circ$. If $r : \tilde{T} \rightarrow T$ is a pseudoretraction of the closed triangular region $\tilde{T}$ onto its boundary T , then the degree of discontinuity of r equals at least d . In addition, there is a retraction of $\tilde{T}$ on T with degree of discontinuity d .