

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2004
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2004
*Proceedings of the Thirty Third Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–4, 2004*

**ВЪРХУ ЕДИН ОТ НЕРЕШЕНИТЕ ПРОБЛЕМИ НА
ХИЛБЕРТ – ШЕСТНАДЕСЕТИЯТ***

Емил Хорозов

Докладът представлява кратък обзор върху Шестнадесетия проблем на Хилберт (втората му част). Към края на обзора е отделено място за единствения точен резултат в тази тематика – решението на инфинитезималния проблем на Хилберт за квадратични векторни полета. Този резултат принадлежи на българската школа. Изложението е предназначено за широк кръг любители на математиката и не изисква познания повече от получаваните в първите два курса на университета.

На II международен Конгрес на математиците, проведен в Париж през 1900 г., 38-годишният математик от Гьотинген Давид Хилберт изнася доклад с название „Математически проблеми“ (превод на руски може да се намери в [1]). Докладът веднага е оценен като основно събитие на конгреса. Още първото му изречение показва амбициите на автора „... да открие завесата, зад която е скрито нашето бъдеще, за да проникне поне с един поглед в предстоящите успехи на нашето знание и тайните на неговото развитие в близките столетия.“ Действително, някои направления, в които се развива математиката през XX век, са повлияни сериозно от Хилберт. Дали това е станало благодарение на доклада или благодарение на творчеството на Хилберт е труден въпрос. Без съмнение, огромният авторитет на Хилберт е бил достатъчен, за да привлече вниманието на много математици към неговия списък.

В уводната част на своя доклад Хилберт посочва примери на важни проблеми, отдавна стоящи пред математиката. Единият от тях е голямата теорема на Ферма. Друг такъв е задачата за трите тела. Те са според Хилберт „на противоположни полюси – единият е свободно достижение на чистия разум, принадлежащ на чистата теория на числата, другият е поставен от астрономията и необходим за познанието на основните явления на природата.“ Тези проблеми имат и други характеристики, правещи ги противоположни: единият е формулиран математически точно (теорема на Ферма), другият по-скоро посочва област, в която според интересите и силите си изследователят би могъл да поставя множество конкретни въпроси, да намира нови обекти, да търси връзки между тях. Единият проблем приключва (и вече е приключил) с доказателство и отговор „да“ или „не“. Другият никога не може да завърши, независимо колко дълбоки резултати, свързани с него, са получени.

*2000 Mathematics Subject Classification: Primary 37G15; Secondary 58K10.

Key words: : limit cycles, Poincaré map.

Проблемите на Хилберт са практически от всички области на математиката. Това е обусловено от желанието на Хилберт (и разбира се – от неговите изключителни способности) да подчертае единството на математиката. Те имат и различен характер като постановка; повечето от тях са от типа „да-не“, т.е. за тях лесно може да се каже дали са решени. Още при изнасянето на доклада се оказва, че някои от проблемите са били решени. Поради това печатният вариант се различава от изнесения на конгреса. Други от тях са били близки до решаването им. За трети е било нужно много време за да бъдат решени до голяма степен. Два от тези проблеми не са решени досега. Това са осмият и шестнадесетият (по-точно – втората му част).

Осмият проблем съдържа като подвъпрос хипотезата на Риман за нулите на ζ -функцията, както и следствия и обобщения.

Шестнадесетият проблем се състои от две части. Първата част принадлежи към реалната алгебрична геометрия. Пита се колко са и как са разположени (компактните) компоненти на алгебричните криви и повърхнини, (т.е. чиито точки са зададени като решения на полиномиални уравнения). В тази част има много и изключителни резултати, принадлежащи на Брусоти, Петровски, Олейник, Милнор, Том, Арнолд, Гудков, Рохлин и др. (вж [2]). Тя също може да се счита за решена.

Втората част е проблем от „топологията на кривите, дефинирани чрез диференциални уравнения“ и според Хилберт е свързан с първата част. Въпросът е „за максималния брой и разположение на граничните цикли на Поанкаре за диференциално уравнение от първи ред и първа степен от вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

където X и Y са цели рационални функции от степен $n \dots$ “ По-долу ще обясня понятията на език, който се употребява сега.

Разглеждаме система диференциални уравнения

$$(1) \quad \dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y).$$

Всяка двойка функции $x(t)$, $y(t)$ задава крива в равнината x, y . Ние се интересуваме от кривите, зададени от решения на системата диференциални уравнения. Те се наричат фазови криви или орбити. Ако решението се задава от двойка периодични функции, съответната крива е затворена. Ние ще разглеждаме само двойки функции, поне едната от които не е константа. Иначе ще получим тривиален случай на неподвижна точка. От теоремата за единственост следва, че през една точка в равнината минава само една траектория. Следователно, ако тя се самопресича, то тя е затворена. Ако затворената крива е изолирана (т.е. в нейна околност няма други затворени), тя се нарича **граничен цикъл** (понятието е въведено от Поанкаре).

Пример 1. Да разгледаме системата

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Лесно се вижда (чрез заместване), че двойката функции $x = \cos t$, $y = \sin t$ е едно решение на системата, т.е. съответната крива е затворена. Ще покажем, че е граничен цикъл. Ако направим полярна смяна на променливите:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$

ще получим проста система с разделени променливи (т.е. такава, че в нея всяко

уравнение зависи само от една променлива):

$$\dot{r} = r(1 - r^2)/2, \quad \dot{\phi} = 1.$$

Нека $r(t)$, $\phi(t)$ е произволно решение, с начално положение $r \neq 1, 0$. Тъй като никоя фазова крива не може да пресича окръжността $r = 1$ и не минава през точката $r = 0$, то в никоя точка на нашата фазова крива производната на $r(t)$ не се анулира. Това следва от първото уравнение по-горе. Следователно тя не е периодична функция. Получихме, че няма други периодични решения освен посоченото по-горе.

Пример 2. Да разгледаме системата

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x$$

Отново преминавайки към полярни координати, получаваме простата система:

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\phi} = 1.$$

Оттук се вижда, че всички решения са периодични. Следователно няма гранични цикли.

Пример 3. Разглеждаме системата

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$$

Сега всички решения освен нулевото се стремят към ∞ и следователно отново няма гранични цикли. Този път изобщо няма цикли.

Дадената от Хилберт формулировка на шестнадесетият проблем може да се интерпретира по-следния начин:

Да се намерят явно числа $H(n)$ такива, че ако X и Y са полиноми от степен ненадвишаваща n , то броят на граничните цикли на (1) да е по-малък или равен на $H(n)$.

Ще обърна внимание, че се иска броят на граничните цикли да се оцени чрез величина, зависеща от степента на полиномите, но не от коефициентите. Нека отбележа, обаче, че дори доказателство за краен брой гранични цикли във всяка индивидуална система с полиномиална дясна част не е било известно по времето на Хилберт.

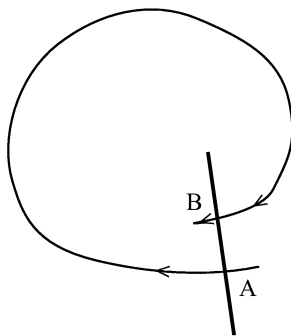
За формулирането, а и при опитите за решаването на проблема трябва да се отдаде заслуженото на А. Поанкаре. На него принадлежи създаването на качествената теория на диференциалните уравнения – едно от основните направления на съвременната математика. Проблемът на Хилберт е естествен именно в рамките на тази теория [3]. И може би най-важното – на Поанкаре принадлежи привличането на вниманието на математиците към изучаването на периодичните решения, както в качествената теория, така и в небесната механика. Затова ако искаме да сме справедливи, приносът на Поанкаре, (чиито работи са написани преди формулирането на проблема!), непременно трябва да се подчертае.

Следващият математик, чието име е преплетено с опитите за решаване на шестнадесетият проблем, е това на Дюлак. През 1923 г. той доказва [4], че всяка индивидуална система има само краен брой гранични цикли, (чиито брой би могъл да расте с варирането на коефициентите). В следващите години се наблюдава значителна активност в качествената теория, породена преди всичко от нейната изключителна приложност в инженерните и природните науки. Нека отбележа работите на Ван дер Пол, Андронов, Вит, Хайкин, Хопф, и др. в радиотехниката и хидромеханиката. Въпреки това, съществено придвижване в решаването на проблема няма. Толкова по-изненадващо в 1955 г. И. Петровски и Е. Ландис обявяват [5] решение на

проблема за степен на полиномите не надвишаваща 2, т.е. за квадратични векторни полета. Те доказват, че такива системи, (които се наричат квадратични) имат не повече от 3 гранични цикъла. Две години по-късно те получават [5] и явна оценка на броя на граничните цикли само чрез степента на полиномите в десните страни на (1), т.е. окончателно решение на проблема на Хилберт.

Само няколко години след това С. П. Новиков и Ю. С. Иляшенко намират сериозни пропуски в доказателството на Петровски-Ландис. По-късно биват построени квадратични векторни полета с четири гранични цикъла, т.е. контрапримери към оценката за квадратични векторни полета. А в 1981 г. отново Иляшенко намира много сериозна грешка и в доказателството на Дюлак. Така след 80 години се оказва, че придвижването в шестнадесетия проблем е нулево.

Веднага трябва да призная, че освен грешното доказателство на Петровски-Ландис съществуват още много текстове, чиито автори претендират за славата, която се полага на решилия проблема. В това отношение шестнадесетият проблем на Хилберт прилича на теоремата на Ферма. Тъй като се формулира лесно, опитите да се реши с елементарни средства са често явление. Такъв опит миналата година даже привлече вниманието на световните медии, особено шведските, появили се стотици сайтове в Интернет. Повечето от тези работи нямат никаква стойност – те само издават невежеството на техните автори. Работите [4, 5], обаче, въвеждат дълбоки нови идеи и солидна техника. Затова и се спрях на тях. По-долу ще се опитам да дам бегла представа за някои от тези идеи. Ще започна с едно централно понятие, произхождащо от Поанкаре. Разглеждаме фиксирана система (1). Да изберем точка в равнината, която не е особена за системата, т.е. в която двете функции X и Y не се анулират едновременно. Да прекараме трансверзала към траекторията на системата през тази точка (това е линия, която пресича траекторията под ненулев ъгъл). Ако траекториите на системата, започващи върху трансверзалата в околност на избраната точка, се връщат и отново я пресичат, можем да дефинираме **изображение на Поанкаре** P : на точка A от трансверзалата съпоставяме точка B на следващото пресичане на траекторията през A с трансверзалата, т.е. $P(A) = B$.



Фиг. 1. Изображение на Поанкаре

Точките, които се изобразяват в себе си чрез изображението на Поанкаре, отговарят на граничните цикли. Следователно е много важно да умеем да строим

изображение на Поанкаре. Лесно се вижда, че далеч от особените точки изображението е аналитично. По-интересно е, че то може да се продължи диференцируемо и до някои особени точки.

В мемоара на Дюлак се построява изображение на Поанкаре близо до особени точки. Дюлак успява да намери асимптотично разлагане на изображението. Грешката му е удивителна за аналитик от неговата класа. Разсъждението на Дюлак е приблизително следното. Нека имаме безкрайно-диференцируема функция, чиито производни в една точка са нули. Тогава функцията е константа. Контрапримир към това заключение е известен дори на студентите. Дефинираме функцията $y(x)$ с равенствата

$$y(x) = e^{-1/x^2}$$

при $x \neq 0$ и $y(0) = 0$. Очевидно функцията е безкрайно-диференцируема и има нулеви производни в нулата.

В статиите на Петровски-Ландис се използва продължение на изображението на Поанкаре в комплексната област. Въвежда се и понятие граничен цикъл в комплексната област. По-нататък те прехвърлят своя анализ само в комплексната област, като се опитват да докажат проблема на Хилберт в тази по-обща ситуация. Практически те основават ново направление – качествена теория на динамичните системи в комплексната област. При тях обаче допуснатите грешки не са очевидни. Най-трудните от тях са свързани с дефиниционната област на изображението на Понкаре за комплексен аргумент.

През 1991–92 г. Иляшенко и Екал [6, 7] независимо един от друг все пак успяват да докажат теоремата на Дюлак. И двете доказателства са доста сложни и заемат по една монография. Вероятно това е най-голямото постижение в проблема. То има нужда да се разбере по-добре.

Многогодишните усилия да се реши шестнадесетият проблем на Хилберт са довели до убеждението, че в посочената форма той е въвн от обсега на съвременната математика. Затова са формулирани серия моделни или опростени варианти. Аз ще се спра на един от тях, известен като **инфинитезимален проблем на Хилберт**. Обсъждане на други варианти може да се намери в статиите на Смейл [8] или Иляшенко [9]. Нека са дадени три полинома $H(x, y)$, $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Да разгледаме кривата зададена с уравнението $H(x, y) = h$, където h е реално число. Ще предположим, че тази крива съдържа затворена компонента, наречена овал. Ще го означим с $\delta(h)$. Ще предположим още, че за стойности на параметъра h от някакъв интервал Δ , затвореният овал $\delta(h)$ е дефиниран. Тогава съществува функцията $I(h)$, дефинирана чрез криволинейния интеграл:

$$(2) \quad I(h) = \oint_{\delta(h)} f(x, y)dy - g(x, y)dx$$

взет по затворения контур $\delta(h)$. Инфинитезималният проблем на Хилберт се състои в това, да се оцени броят на нулите на функцията $I(h)$ в интервала Δ чрез степените на полиномите $H(x, y)$, $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Този проблем възниква при ограничаването на проблема на Хилберт върху системи, близки до хамилтонови и най-вероятно решението му ще участва в решението на общия проблем. По-точно нека разгледаме системата

$$(3) \quad \dot{x} = H_y + \epsilon f(x, y), \quad \dot{y} = H_x + \epsilon g(x, y).$$

За малки ϵ можем да построим функция на Поанкаре по следния начин. Да изберем трансверзала l към семейство затворени траектории на хамилтоновата система, получена от горната при $\epsilon = 0$. След това да фиксираме $\epsilon \neq 0$ и да вземем точка A върху l . Нека $x(t), y(t)$ е траекторията на системата (3), започваща в точката A . За малки $\epsilon \neq 0$ тя ще пресече трансверзалата l в следваща точка B . Нека още означим с h стойността на функцията H в точката A . Тогава разликата $H(B) - H(A)$ може да послужи като изображение на Поанкаре. Лесно се пресмята, че

$$H(B) - H(A) = \epsilon I(h) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Виждаме, че изолираните нули на функцията $I(h)$ дават гранични цикли (обратно-то не е вярно). Това просто наблюдение на Понтрягин [10] е дало повод на Арнолд [11], повлиян също от някои работи на Иляшенко, да формулира инфинитезималния проблем. Например, посочените по-горе работи на Ван дер Пол, Андронов в радиотехниката могат частично да се изучават и така. Поради това е важно да умеем да оценяваме *явно* броя на граничните цикли, да намираме *явно* техните положения (нещо, което също трябва да се причисли към проблема на Хилберт).

А с какво е по-лесно изследването на функцията $I(h)$ в сравнение с други функции? Специалистите по алгебрична геометрия биха забелязали, че стойността h в точката h е период на диференциал върху алгебричната крива $H = h$ (поради това, в нарушение на терминологията, функцията често се нарича „абелев интеграл“). Това дава възможност да се използват някои алгебрико-геометрични средства.

През 1984 г. Варченко и Ховански [12, 13] независимо доказаха теорема, която е екзистенциално решение на проблема. За да формулирам прецизно техния резултат ще въведа следните означения. Да означим с $n + 1$ и m съответно степените на полинома H и на полиномите f, g . *Теоремата на Варченко-Ховански твърди, че съществуват числа $Z(n, m)$, такива, че за произволен набор от полиноми H, f, g от степени – посочените числа, броят на нулите на функциите $I(h)$ във всеки интервал на реалната ос, където те съществуват, е по-малък от $Z(n, m)$* . Доказателството на теоремата на Варченко и Ховански, обаче, не дава никаква възможност да се оценят **явно** числата $Z(n, m)$. Нека отбележим, че задачи, в които се иска да се намерят граничните цикли на системи, близки до хамилтонови, често възникват в приложенията.

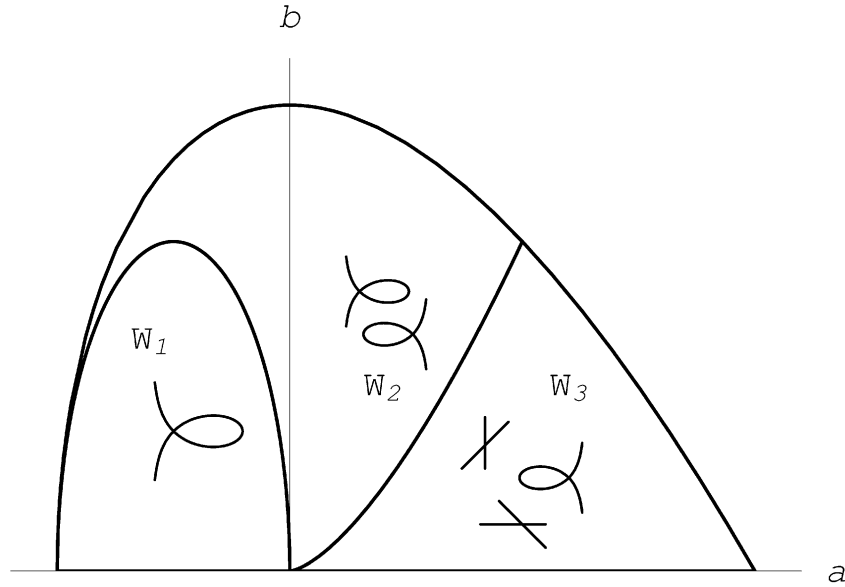
През 1987 г. в София беше организиран семинар, чиято цел беше да изучи квадратичните системи, близки до хамилтонови, от гледна точка на проблема на Хилберт. След 13 години работа основните участници в този семинар постигнаха окончателно решение на инфинитезималния проблем на Хилберт в този случай. Това е единствената точна (нетривиална) оценка в серията задачи, породени от опитите да се реши проблемът на Хилберт. По-долу ще се опитам да опиша накратко резултатите. Пълният текст [14, 15, 16, 18, 19] заема повече от 150 страници (без подготвителния материал) и естествено не може да се изложи пълно, освен на спецкурс.

Нека най-напред да отделим квадратичните хамилтониани, които има смисъл да се разглеждат, т.е. чиито линии на ниво съдържат овали. Всеки такъв овал съдържа особена точка на хамилтоновата система; можем да предположим, че това е точката $(0, 0)$. С подходяща (афинна) смяна на променливите можем да доведем

хамилтониана до вида

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1}{3}x^3 + axy^2 + \frac{1}{3}by^3$$

Лесно се вижда, че е достатъчно да разгледаме само хамилтонианите, отговарящи на стойности на параметрите $(a, b) \in \Omega$, където Ω се описва с неравенствата (виж и фиг. 2). Останалите се свеждат до тях чрез смяна на променливите. Горната форма на хамилтониана е само за удобство; например за стойности на h от интервала $(0, 1/6)$ кривата $H(x, y) = h$ има овали, независимо от стойностите на a, b .



Фиг. 2. Област, в която разглеждаме параметрите

Следващата стъпка е да опишем функцията

$$I(h) = \oint_{\delta(h)} f(x, y)dy - g(x, y)dx$$

в този случай. Тя има вида (с подходящи константи α, β и γ)

$$I(h) = \oint_{\delta(h)} (\alpha xydx + \beta y^2dx + \gamma ydx).$$

За удобство нека да въведем следните означения:

$$M(h) = \oint_{\delta(h)} ydx, \quad X(h) = \oint_{\delta(h)} xydx, \quad Y(h) = \oint_{\delta(h)} 1/2y^2dx.$$

Можем да запишем уравнението за нулите на $I(h)$ като $\alpha X(h) + \beta Y(h) + \gamma M(h) = 0$. Нека също да отбележим, че функцията $M(h)$ не се анулира в интервала $(0, 1/6)$; нейната стойност е равна на лицето, заградено от $\delta(h)$. Следователно можем да разделим горното равенство на $M(h)$. Да положим:

$$\xi(h) = X(h)/M(h), \quad \eta(h) = Y(h)/M(h).$$

Още веднаж ще препишем уравнението за нулите на $I(h)$; сега по следния начин:

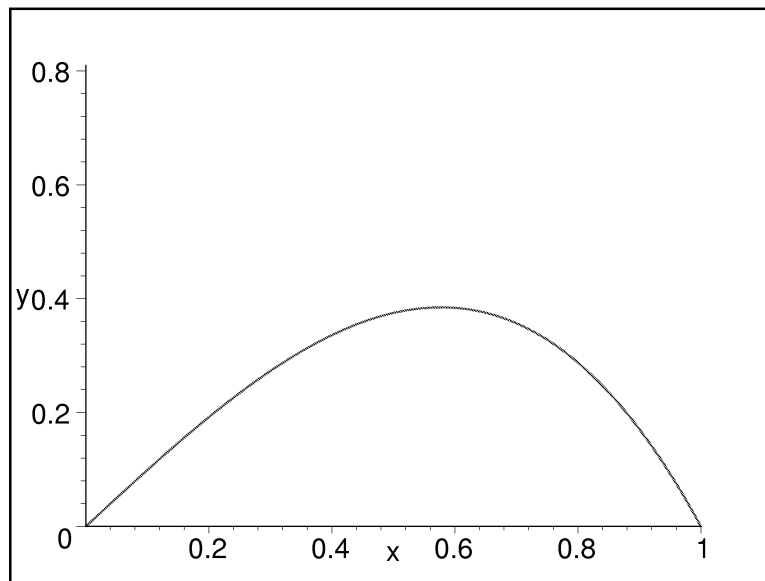
$$\alpha\xi(h) + \beta\eta(h) + \gamma = 0.$$

Това равенство ни дава възможност да интерпретираме нашата задача по следния начин: търсим броя на пресичанията на кривата $(\xi(h), \eta(h))$ с произволна права $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Елементарната преформулировка показва, че трябва да изучим геометрията на кривата $(\xi(h), \eta(h))$, която в механиката се нарича *центроидна крива*.

Лесно се пресмята, че областта Ω се разделя според броя и типа на особените точки на три части, във всяка от които фазовият портрет не се мени: Ω_1 , отговаряща на три седла и един център; Ω_2 - на две седла и два центъра и Ω_3 - на едно седло и един център.

Както беше казано по-горе, основната ни задача е да изучим геометрията на центроидната крива. Ще кажа веднага: центроидната крива е изпъкнала и има вида на Фиг. 2. Следователно всяка права я пресича най-много два пъти, т.е.

Теорема (Гаврилов-Илиев-Хорозов). (i) Абелевият интеграл има най-много две нули за всички квадратични системи близки до хамилтонови. (ii) Броят на граничните цикли за квадратични пертурбации на хамилтонови системи от трите области на Фиг. 2 не надминава 2.



Фиг. 3. Центроидната крива

Доказателството използва сякои от споменатите по-горе идеи – продължаване на абелевия интеграл в комплексната област, и до особената точка, както и оригинални идеи. Следните няколко стъпки са основни:

1) Доказателство, че центроидната крива е гладка, т.е. във всяка точка поне една от функциите $\xi(h), \eta(h)$, $h \in (0, 1/6)$ има различна от нула производна. Доказателството е основано на теоремата на Пикар-Лефшец [20].

2) Локален анализ на краищата на центроидната крива, т.е. формулировка и доказателство, че те изглеждат както на Фиг. 2 и че всяка права пресича крайните точки най-много с кратност 2. За единия край, отговарящ на центъра това е доказано в 1954 г. от Баутин [17], а за другия, отговарящ на седлото – в [18].

3) Доказателство, че всяка права пресича центроидната крива в най-много три точки. Това е най-трудната стъпка. Тя и сама по себе си би била хубав резултат, защото дава оценка, макар и не точна, на броя на нулите на абелевия интеграл, а също и оценка за броя на граничните цикли. Тук също се използва теоремата на Пикар-Лефшец, както и съображения от теорията на бифуркациите (в комплексната област).

Тъй като анализът в комплексната област и по-специално теоремата на Пикар-Лефшец играят основна роля, ще се опитам да скицирам начина, по-който става това. Най-напред ще обясня продължаването в комплексната област на абелевия интеграл $I(h)$. В интегралното представяне (2) на $I(h)$ участва затвореният контур $\delta(h)$. Последният е клон на реалната алгебрична крива, зададена с уравнението $H(x, y) = h$ за *реални стойности на h и реални x, y* . Разглеждайки същото уравнение в комплексната област, виждаме, че то задава алгебрична крива, която топологично има тип на тор с извадени три точки. Овалът $\delta(h)$ е една затворена крива, която не може да се деформира в точка. Но същия топологичен тип имат и алгебричните криви и при комплексни h при почти всички h . Изключение правят само тези стойности на h , за които алгебричната крива $H(x, y) = h$ има особености. Топологично тя изглежда като тор, който е прищипнат по една окръжност. Ясно, че и затвореният контур се продължава непрекъснато върху комплексните криви. Следователно и интегралът се продължава освен за онези h , дори и за които торът се прищипва. Но обикаляйки тези стойности, интегралът получава нарастване. Именно това нарастване се определя много точно чрез теоремата на Пикар-Лефшец. Като се използва характера на многозначността, както и ръста на абелевия интеграл в особените точки, включително и в безкрайността, можем да прилагаме принципа на аргумента. Разсъждения от този тип се използват в 1) и 3). Разбира се не си правя илюзии, че тези обяснения заместват 150 стр. текст.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. HILBERT. Gesammelte Abhandlungen, t. 3, 1935, 290-329; Руски превод, в: Проблемы Гильберта, под ред. П. С. Александрова, Из-во Наука, 1969.
- [2] Д. А. Гудков. УМН, **XXIX**, 4 (1974), 4-79.
- [3] H. POINCARÉ. *J. de Mathématiques*, 3e serie **7** (1881) 375-422; **8** (1882) 251-296; 4e serie **1** (1885) 167-224.
- [4] H. DULAC. *Bull. Soc. Math. France*, **51** (1923), 45-188.
- [5] И. ПЕТРОВСКИ, Е. ЛАНДИС. *Мат. сб.*, **37 (79)** 1955, 209-250; **85** (1957), 149-169.
- [6] J. S. ILYASHENKO. Finiteness theorems for limite cycles, Transl. Math. Mon. 1991 AMS, Providence, RI.
- [7] J. ÈCALLE. Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac, Hermann, Paris, 1992
- [8] S. SMALE. *Math. Intelligencer*, **20** (1998) 7-15.
- [9] Y. S. ILYASHENKO. *Bull. AMS*, **39**, 3 (2002), 301-354.
- [10] Л. С. ПОНТЯГИН. *Ж. Эксп. Теор. Физ.*, **4** (1934) 234-238.

- [11] В. И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Москва, Наука 1978.
- [12] А. И. Варченко. *Функц. анал.*, **18** (1984), 98–108.
- [13] А. М. Хованский. *Функц. анал.*, **18** (1984), 119–127.
- [14] L. GAVRILOV, E. HOROZOV. *J. de Mathématiques pures et appliquées*, **72** (1993), 213–238.
- [15] E. HOROZOV, I. ILIEV. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **69** (1994), 198–224.
- [16] L. GAVRILOV. *Inv. Math.*, **143** (2001), 449–497.
- [17] N. N. BAUTIN. *Amer. Math. Soc. Transl.*, **100** (1954), 1–19.
- [18] E. HOROZOV, I. D. ILIEV. *J. Diff. Eqns.*, **113** (1994), 84–105.
- [19] E. HOROZOV, I. D. ILIEV. *Ann. Inst. H. Poincaré*, **13** (1996), 17–56.
- [20] В. И. Арнольд, А. И. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений, т. II, Наука, Москва, 1984.

Емил Хорозов

Институт по математика и информатика

Българска Академия на Науките

ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8

1113 София, България

e-mail: horozov@fmi.uni-sofia.bg, horozov@math.bas.bg

ON THE ONE OF THE UNSOLVED HILBERT’S PROBLEMS – THE SIXTEENTH

Emil Horozov

The talk is a brief survey on the Hilbert’s Sixteenth problem (its second part). Towards the end of the talk we describe the only exact result in this circle of problems – the solution of the infinitesimal Hilbert’s problem for quadratic vector fields. This result belongs to the Bulgarian School. The exposition is intended for a broad audience and does not require knowledge of mathematics out of the two years in the university.