

MATEMATIKA И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2004
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2004
*Proceedings of the Thirty Third Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–4, 2004*

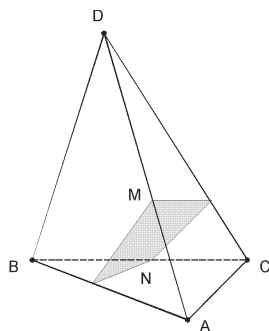
ОБЕМ НА ОКТАЕДЪР

Ирина Здр. Вутова

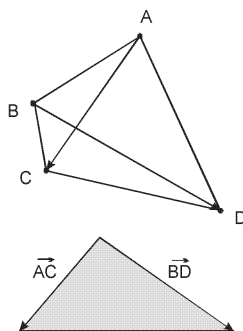
В представената статия е изложен нетрадиционен начин за намиране обема на октаедър. За целта е формулирано и доказано едно стереометрично твърдение. В доказателството са използвани елементарни резултати от аналитичната геометрия и линейната алгебра. Доказаното твърдение дава възможност обемът на октаедъра (и на други многостени) да бъде изчисляван непосредствено (без разбиване и допълване), като за целта се използва подходящ тетраедър, чиито определящи вектори са зададени от върховете на октаедъра. Материалът може да бъде използван за обучение в училища със засилено изучаване на математика.

1. Предварителни бележки. Както е известно, още в древността са били открити формулите за изчисляване на обемите на призми и на пирамиди. По-късно е открита и формула за изчисляване на обема на призматок, т.е. многостен, чиито върховете са разположени в две успоредни равнини. (Призмата и пирамидата са частни случаи на призматок.) Но често пъти в стереометричните задачи за обем участват многостени, които не са призматок. Например, в задачата от училищния курс по стереометрия: *“Да се докаже, че всяка равнина, която минава, през средите на два кръстосани ръба на тетраедъра, разделя неговия обем на две равни части.”* двата многостена на които се разделя тетраедъра не са призматок, (черт.1).

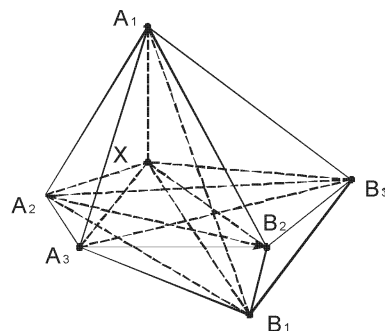
При намиране (изчисляване) обема на многостен, който не е призматок, обикновено се прибегва до неговото разделяне на пирамиди (призми) или до допълване до пирамиди (призми). Училищната практиката показва, че задачите за изчисляване на обема на непризматок са трудни, като при това най-трудната част от решението е точно начинът за подходящо разделяне или допълване на многостена. В тази връзка възниква въпроса дали не съществуват и други класове от многостени, (освен призматоките), чиито обем може да бъде изчисляван непосредствено, (без разделяне и или допълване). Основание за този въпрос ни дава и обстоятелството, че в равнината за лицето на многоъгълник вече има подобен прецедент. Действително, известно е че лицето на всеки четириъгълник (не само на специалните) може да бъде намерено без разделяне на триъгълници. Това е възможно, тъй като лицето на четириъгълника е равно на лицето на триъгълник, определен от векторите-диагонали на четириъгълника, (черт. 2).



Черт. 1



Черт. 2



Черт. 3

Като се вземе предвид възможността за намиране лицето на четириъгълника, чрез неговото “редуциране” към триъгълник, въпросът може да бъде конкретизиран така: “Съществуват ли многостени (и ако съществуват кои са те), които могат да бъдат “обемно редуцирани” към подходящи тетраедри?”.

След направените изследвания бяха достигнати конкретни резултати. Оказа се, че съществуват класове от многостени, които не са призматоиди, и техните обеми могат да бъдат изчислявани по начините, по които се изчислява обема на тетраедър. Един от тези класове е класът на октаедрите. И по-конкретно: За всеки октаедър, съществува тетраедър, определен от (три некомпланарни) вектори, чийто представители имат за крайща върховете на октаедъра, така че октаедърът и тетраедърът са равнообемни?”. От текста на задачата, става ясно, че векторите, определящи тетраедъра имат представители само върху ръбовете или върху диагоналите на октаедъра. С други думи, решена е задача за обем на многостен, която е пространствен аналог на задачата за лице на четириъгълник.

2. Замяна на октаедър с тетраедър

Теорема. Нека $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ е октаедър, за който точките A_1 и B_1 , A_2 и B_2 , A_3 и B_3 са двойки противоположни върхове. (Отсечките A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 са диагонали на октаедъра.) Тогава тетраедърът, определен от векторите $\vec{A_1B_1}$, $\vec{A_2B_2}$, $\vec{A_3B_3}$ е равнообемен на октаедъра.

В следващите редове ще изложим накратко доказателството.

Нека $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ е октаедър, за който точките A_1 и B_1 , A_2 и B_2 , A_3 и B_3 са двойки противоположни върхове.

В доказателството на теоремата ще използваме резултати, известни от аналитичната геометрия. Един от тях е:

Нека векторите $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ са некомпланарни и $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ са вектори за които

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{a}_2 &= \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{a}_3 &= \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3\end{aligned}$$

и V е обемът на тетраедъра, определен от векторите $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, а V_1 е обемът на тетраедъра, определен от векторите $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Тогава

$$V_1 = |\Delta|V, \text{ където}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Ще използваме и едно непосредствено следствие от формулираното твърдение, а именно:

Ако предположим, че в пространството е зададена дясно ориентирана координатна система, чийто базисни вектори, определят тетраедър с обем V_0 и точките $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $C(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $D(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ са върхове на тетраедър с обем V , то

$$V = \begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 - \alpha_3 \\ \gamma_1 - \alpha_1 & \gamma_2 - \alpha_2 & \gamma_3 - \alpha_3 \\ \delta_1 - \alpha_1 & \delta_2 - \alpha_2 & \delta_3 - \alpha_3 \end{vmatrix} V_0.$$

Без да ограничаваме общността, можем да предполагаме, че координатната система в пространството е дясно ориентирана и тетраедърът, образуван от координатните вектори има обем $V_0 = 1$.

Нека върховете на октаедъра имат координати съответно:

$$\begin{aligned} A_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}) & B_1 &= (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}) \\ A_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}) & B_2 &= (\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23}) \\ A_3 &= (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}) & B_3 &= (\beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}) \end{aligned}$$

Нека $X(x_1, x_2, x_3)$ е вътрешна точка за октаедъра.

Тогава точката X разделя октаедъра на 8 тетраедъра, които са определени от тройките вектори:

$$\begin{aligned} &(\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{XA_2}, \overrightarrow{XA_3}), (\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{XA_2}, \overrightarrow{XB_3}), (\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{XB_2}, \overrightarrow{XA_3}), \\ &(\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{XB_2}, \overrightarrow{XB_3}), (\overrightarrow{XB_1}, \overrightarrow{XA_2}, \overrightarrow{XA_3}), (\overrightarrow{XB_1}, \overrightarrow{XA_2}, \overrightarrow{XB_3}), \\ &(\overrightarrow{XB_1}, \overrightarrow{XB_2}, \overrightarrow{XA_3}), (\overrightarrow{XB_1}, \overrightarrow{XB_2}, \overrightarrow{XB_3}). \end{aligned}$$

Това означава, че обемът на октаедъра е алгебрична сума от обемите на осемте тетраедъра (като се има пред вид ориентацията на всеки от тетраедрите). Обемът на всеки от осемте тетраедъра може да се представи чрез съответната детерминанта, т.е алгебричната сума на обемите се превръща в сума на съответните детерминанти. След елементарни тъждествени алгебрични преобразувания се достига до детерминанта, чрез която се изразява обема на тетраедъра, определен от тройката вектори $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$, по диагоналите на октаедъра, т.е.

$$\begin{aligned} V &= V_{A_1A_2A_3B_1B_2B_3} = \\ &= +V(\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{XA_2}, \overrightarrow{XA_3}) - V(\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{XA_2}, \overrightarrow{XB_3}) - V(\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{XB_2}, \overrightarrow{XA_3}) + V(\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{XB_2}, \overrightarrow{XB_3}) - \\ &- V(\overrightarrow{XB_1}, \overrightarrow{XA_2}, \overrightarrow{XA_3}) + V(\overrightarrow{XB_1}, \overrightarrow{XA_2}, \overrightarrow{XB_3}) - V(\overrightarrow{XB_1}, \overrightarrow{XB_2}, \overrightarrow{XA_3}) - V(\overrightarrow{XB_1}, \overrightarrow{XB_2}, \overrightarrow{XB_3}) = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x_1 & \alpha_{12} - x_2 & \alpha_{13} - x_3 \\ \alpha_{21} - x_1 & \alpha_{22} - x_2 & \alpha_{23} - x_3 \\ \alpha_{31} - x_1 & \alpha_{32} - x_2 & \alpha_{33} - x_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x_1 & \alpha_{12} - x_2 & \alpha_{13} - x_3 \\ \alpha_{21} - x_1 & \alpha_{22} - x_2 & \alpha_{23} - x_3 \\ \beta_{31} - x_1 & \beta_{32} - x_2 & \beta_{33} - x_3 \end{vmatrix} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x_1 & \alpha_{12} - x_2 & \alpha_{13} - x_3 \\ \beta_{21} - x_1 & \beta_{22} - x_2 & \beta_{23} - x_3 \\ \alpha_{31} - x_1 & \alpha_{32} - x_2 & \alpha_{33} - x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x_1 & \alpha_{12} - x_2 & \alpha_{13} - x_3 \\ \beta_{21} - x_1 & \beta_{22} - x_2 & \beta_{23} - x_3 \\ \beta_{31} - x_1 & \beta_{32} - x_2 & \beta_{33} - x_3 \end{vmatrix} - \\
&- \begin{vmatrix} \beta_{11} - x_1 & \beta_{12} - x_2 & \beta_{13} - x_3 \\ \alpha_{21} - x_1 & \alpha_{22} - x_2 & \alpha_{23} - x_3 \\ \alpha_{31} - x_1 & \alpha_{32} - x_2 & \alpha_{33} - x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} - x_1 & \beta_{12} - x_2 & \beta_{13} - x_3 \\ \alpha_{21} - x_1 & \alpha_{22} - x_2 & \alpha_{23} - x_3 \\ \beta_{31} - x_1 & \beta_{32} - x_2 & \beta_{33} - x_3 \end{vmatrix} - \\
&+ \begin{vmatrix} \beta_{11} - x_1 & \beta_{12} - x_2 & \beta_{13} - x_3 \\ \beta_{21} - x_1 & \beta_{22} - x_2 & \beta_{23} - x_3 \\ \alpha_{31} - x_1 & \alpha_{32} - x_2 & \alpha_{33} - x_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \beta_{11} - x_1 & \beta_{12} - x_2 & \beta_{13} - x_3 \\ \beta_{21} - x_1 & \beta_{22} - x_2 & \beta_{23} - x_3 \\ \beta_{31} - x_1 & \beta_{32} - x_2 & \beta_{33} - x_3 \end{vmatrix} = \\
&- \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11} & \alpha_{12} - \beta_{12} & \alpha_{13} - \beta_{13} \\ \alpha_{21} - \beta_{21} & \alpha_{22} - \beta_{22} & \alpha_{23} - \beta_{23} \\ \alpha_{31} - \beta_{31} & \alpha_{32} - \beta_{32} & \alpha_{33} - \beta_{33} \end{vmatrix} = V_{(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_3B_3})}
\end{aligned}$$

С това теоремата е доказана. $\square$

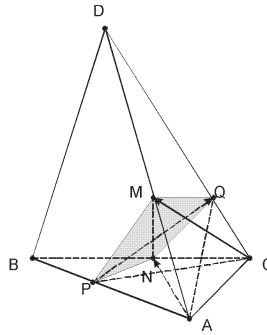
3. Приложение. Като използваме доказаната теорема ще предложим решение на задачата, формулирана в точка 1.

Нека $ABCD$ е даденият тетраедър и неговият обем е V . Нека точката M е средата на ръба AD и точката N е средата на ръба BC . Нека равнина минава през точките M и N и пресича ръбовете AB и CD в точките P и Q , съответно (черт. 4).

Ще докажем, че обемът V_1 на многостена с върхове A, C, N, P, M, Q е равен на половината от обема V на тетраедъра $ABCD$.

Тетраедърът $ABCD$ е определен от векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Многостенът с върхове A, C, N, P, M, Q може да бъде разглеждан като октаедър с двойки противоположни върхове A и N , C и M , P и Q . За целта е достатъчно да свържем върховете C с P , A с Q и N с M . При това свързване всяка от трите стени, които са четириъгълници се разделя на две триъгълни стени и общо стените стават осем. Това означава, че векторите $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{PQ}$ определят разглеждания многостен.



Черт. 4

Нека $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DQ} = y\overrightarrow{DC}$ (x и y са реални числа).

Тогава $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = -x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + (1-y)\overrightarrow{AD}.$$

Като образуваме детерминантата от координатите на векторите $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{PQ}$ спрямо базата $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ получаваме $V_1 = \left| \frac{-x+y}{4} - \frac{1}{2} \right| V$.

Но $\overrightarrow{AQ} = \alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{AM} + \gamma\overrightarrow{AN}$, където $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

$$\overrightarrow{AQ} = \alpha x \overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{\gamma}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{2} \overrightarrow{AC} = \left(\alpha x + \frac{\gamma}{2} \right) \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{\beta}{2} \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DQ} = y\overrightarrow{DC}, \text{ т.е. } \overrightarrow{AQ} = (1-y)\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AC}$$

Като изравним коефициентите пред равните вектори в двете представяния на вектора $\overrightarrow{AQ}$ получаваме, че $x = y$.

Тогава $V_1 = \frac{1}{2}V$. С това задачата е решена.

4. Заключение. Предлаганият подход за изчисляване на обем може да бъде приложен и за други многостени (не само за октаедър), както беше показано в приложението. Нещо повече, този подход е приложим при многостени, които имат не повече от шест върха и от всеки връх, излизат не повече от четири ръба.

Предложеният подход може да бъде изучаван и използван в последните класове на средното училище в часовете за избираема подготовка по математика.

Ирина Здравкова Вутова
ж.к. Дружба 1, бл. 159, вх. 2, ет. 4, ап. 409
1592 София, България
e-mail: irina_zdravkova@mail.bg

VOLUME OF OCTAHEDRON

Irina Zdr. Voutova

In this paper a statement about the volume of octahedron is proved. Elementary results from analytic geometry and linear algebra are used in the proof. The proved statement gives opportunity the volume of octahedron to be calculated directly (without division or complement of the body), and for that purpose a proper tetrahedron is used, whose defining vectors are determined by the vertices of the octahedron. The material can be used in schools with extra curricula in mathematics.