

МЯСТО НА КЛАСИЧЕСКАТА ФОРМУЛА ЗА ВЕРОЯТНОСТ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Христо В. Вълчев (Павлов)

В работата се предлага и използва класическата формула за вероятност (КФВ), която чувствително облекчава решаването на широк кръг задачи за намиране на вероятност.

Въпреки привидната си простота, при прилагането на класическата дефиниция за вероятност (КДВ) учащите се твърде често допускат грешки.

КДВ: Ако в резултат на опита сигурно ще се сбъдне точно едно от равновъзможните елементарни събития $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, ще казваме, че вероятността на A е $P(A) = \frac{m(A)}{n}$, където $m(A)$ е броят на благоприятстващите A елементарни събития, а n е броят на всички елементарни събития.

Понякога множеството на елементарните събития е многобройно. Това е така, защото елементарното събитие дава изчерпателна информация за възможния резултат от провеждания опит.

Безпогрешното преброяване на елементите на такова множество и на някои негови подмножества, например на множеството на благоприятстващите елементарни събития на събитието чиято вероятност търсим, е наистина трудна задача.

Това провокира идеята да се докаже класическата формула за вероятност (КФВ).

КФВ. Ако съществува пълна група от N равновъзможни събития, M от които благоприятстват събитието A , а останалите $N - M$ благоприятстват $\bar{A}$, то $P(A) = \frac{M}{N}$.

С $\bar{A}$ е означено събитието: събитието A няма да се сбъдне.

Учудващо е, че толкова проста и полезна информация не фигурира в нито един учебник.

КФВ е съвсем просто следствие на първите три аксиоми на вероятностите. Подолу КФВ ще бъде доказана в случая, когато КДВ е приложима. Това се прави, за да се даде възможност това доказателство да може да се ползва от учители и ученици.

С използването на КФВ се достигат две основни цели:

- Чувствително се опростява пресмятането на търсените вероятности;
- Намалява се вроятността учащите се да забравят, че при прилагането на КФВ събитията от пълната група трябва да са равновъзможни.

Това е така, защото при доказателството на КФВ условието за равновъзможност се използва съществено, докато при КДВ просто се споменава, че елементарните събития трябва да са равновъзможни. В интерес на истината, през последните 35 години има няколко учебника по математика за българското средно училище, в които авторите са забравили да подчертаят, че при прилагането на КДВ елементарните събития задължително трябва да са равновъзможни.

Определение 1. *Ще казваме, че събитията $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуват пълна група събития, ако в резултат на опита сигурно ще се сбъдне точно едно от тях.*

Определение 2. *Ще казваме, че събитието A благоприятства събитието B ($A \Rightarrow B$), ако от сбъдването на A , следва сигурното сбъдване на B .*

Доказателство на КФВ. Да означим събитията от (пълната група равновъзможни събития) ПГРС с $A_1, A_2, \dots, A_N$, а с n – броят на всички елементарни събития. За определеност, благоприятстващите A събития ще означим с $A_1, A_2, \dots, A_M$, а благоприятстващите $\bar{A}$ събития с $A_{M+1}, A_{M+2}, \dots, A_N$. Тъй като в резултат на опита сигурно ще се сбъдне точно едно от събитията $A_1, A_2, \dots, A_N$, то $n = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_N)$. От равновъзможността на $A_1, A_2, \dots, A_N$ следва, че $m(A_1) = m(A_2) = \dots = m(A_N)$, откъдето следва, че $m(A_i) = \frac{n}{N}$. Тъй като $A_1, A_2, \dots, A_M$ са благоприятстващи за A , а останалите $N - M$ събития от пълната група благоприятстват $\bar{A}$, то $m(A) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_M) = \frac{Mn}{N}$. От КДВ имаме $P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{M}{N}$, с което доказахме КФВ.

При търсенето на $P(A)$, преди непосредственото прилагане на КФВ, трябва да бъдат развити уменията за намиране на подходяща ПГРС. Това може да стане като се решат задачи от типа на формулираните по-долу.

Задача 1. *Подхвърля се паралелепипеден зар с размери 9 mm на 10 mm на 11 mm. Равновъзможни ли са събитията от пълните групи:*

- 1) *На елементарните събития.* Отг. НЕ
- 2) *A и $\bar{A}$, където A означава, че зарът е показал нечетно число?* Отг. ДА

Забележка. Сумата от точките, изобразени върху срещулежащи стени на всеки зар, е равна на 7.

Задача 2. *Едновременно се подхвърлят бял и черен зар.*

Равновъзможни ли са събитията от пълните групи:

- 1) *на 36-те елементарни събития?* Отг. ДА
- 2) *$A_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq 6$)? $A_{i,j}$ означава, че заровете са показали i и j точки, но $A_{i,j}$ не дава информация за това кой зар е показал i , а кой j точки.* Отг. НЕ
- 3) *$\xi_1 < \xi_2$, $\xi_1 = \xi_2$, $\xi_1 > \xi_2$, където ξ_1 и ξ_2 са броевете на точките, които ще покажат съответно белия и черния зар?* Отг. НЕ

При избора на подходящата за намирането на $P(A)$ ПГРС е разумно да се придържаме към следното правило – всяко от събитията на тази ПГРС да носи информация за сбъдването или несбъдването на A и по възможност да не носи друга информация.

Задача 3. Околооколо кръгла маса има 6 стола, на които по случаен начин сядат Жулиета, Мария, Ана, Ромео, Иван и Стоян.

Намерете вероятностите на събитията:

A – Ромео е седнал до Жулиета;

B – Ромео е седнал отляво на Жулиета;

C – трите момичета са седнали едно до друго;

D – от двете страни на всяко от момичета са седнали момчета;

E – от двете страни на Жулиета са седнали момичета.

Решение. Вероятността на всяко от събитията A , B и C може да се намери с помощта на КДВ ще получим, но тъй като броят на всичките елементарни събития е голям (720), то вероятността учащите се да преброят неправилно елементарните събития A , B и C е голяма.

Да разгледаме пълната група $A_{i,j}$ ($1 \leq i \leq j \leq 6$). $A_{i,j}$ означава, че заетите от Ромео и Жулиета столове са с номера i и j и не дава информация на кой от тези столове е седнал Ромео и на кой Жулиета. Общият брой на тези събития, които са равновъзможни е $C_6^2 = 15$.

Събитията $A_{1,2}$; $A_{2,3}$; $A_{3,4}$; $A_{4,5}$; $A_{5,6}$ и $A_{1,6}$ благоприятстват A , а останалите девет събития благоприятстват $\bar{A}$. Прилагайки КФВ, ще получим $P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

За намирането на $P(B)$ разумната ПГРС е $B_{i,j}$ $1 \leq i \leq 6$, $1 \leq j \leq 6$, където i е номерът на стола, зает от Ромео, а j от Жулиета. Броят на всички събития от тази ПГРС е $V_6^2 = 30$. Благоприятстващите B събития са $B_{2,1}$; $B_{3,2}$; $B_{4,3}$; $B_{5,4}$; $B_{6,5}$ и $B_{1,6}$ и $P(B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

Да въведем събитието $C_{i,j,k}$, което означава, че заетите от момичетата столове са с номера i , j и k . $C_{i,j,k}$ не дава информация на кой стол кое точно момиче е седнало. Събитията $C_{i,j,k}$ ($1 \leq j < k \leq 6$) образуват ПГРС. Благоприятстващите C събития са $C_{1,2,6}$; $C_{1,5,6}$; $C_{1,2,3}$; $C_{2,3,4}$; $C_{3,4,5}$ и $C_{4,5,6}$ и $P(C) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Благоприятстващите D събития са $C_{1,3,5}$ и $C_{2,4,6}$, а $P(D) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Аналогично се доказва, че $P(E) = \frac{1}{10}$.

Задача 4. Каква е вероятността при тегленето на тираж на ТOTO-2 (6 от 49) всяко следващо от изтеглените числа да е по-голямо от вече изтегленото преди това число?

Решение. С ξ_i е означено числото на i -тата изтеглена топка. Търси се вероятността $P(\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5 < \xi_6)$.

Събитията $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5 < \xi_6$, където i_s , за $s = 1 \div 6$ са пермутации на 1, 2, 3, 4, 5, 6 и образуват ПГРС, чийто брой е $6! = 720$. Само едно от тях благоприятства събитието $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5 < \xi_6$. Прилагайки КФПВ ще получим, че $P(\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_5 < \xi_6) = \frac{1}{720}$.

Задача 5. По случаен начин се избират 4 от върховете на правилен n -ъгълник ($n \geq 4$). Намерете вероятността на събитието A – отсечките, определени от първия и втория и от третия и четвъртия от избраните върхове, се пресичат във вътрешна точка на n -ъгълника.

Решение. С ξ_i ($i = 1, 2, 3$) означаваме броя на върховете от първия към i -тия избран връх (по часовата стрелка). Събитията $\xi_2 < \xi_3 < \xi_4$, $\xi_2 < \xi_4 < \xi_3$, $\xi_3 < \xi_2 < \xi_4$, $\xi_4 < \xi_2 < \xi_3$, $\xi_3 < \xi_4 < \xi_2$ и $\xi_4 < \xi_3 < \xi_2$ образуват ПГРС, две от които (третото и четвъртото) благоприятстват събитието A . От КФВ имаме $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Задача 6. *Последователно, по случаен начин се избират 3 от върховете на правилен n -ъгълник ($n \geq 4$). Намерете вероятността на събитията – избраните точки да определят:*

A – равнобедрен триъгълник.

B – равнобедрен правоъгълен триъгълник.

C – правоъгълен триъгълник.

Учителите сами биха могли да съставят подобни задачи, но могат и да се използват задачи, които фигурират в сборници и учебници (вж. [1] и [2]).

През последните 25 години беше осъществено проучване с общо 1153 студента (1051 от Шуменския и 102 от Великотърновския университет), които бяха безпристрастно разделени на две групи – студенти с нечетен факултетен номер (581) и с четен (572). Бяха проведени анонимни контролни, на които в продължение на 25 години бяха предлагани едни и същи пет задачи за намиране на вероятности. На първата група беше предложено да решат задачите, като използват задължително КДВ, а на втората – КФВ. Средният успех на първата група беше 3,53, а на втората 4,91.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. ПОРТЕВ и колектив. Математика. Учебно помагало за държавен зрелостен изпит в четири части – I Алгебра, Летера, Пловдив, в печат.
[2] Л. ПОРТЕВ и колектив. Математика. Учебно помагало за държавен зрелостен изпит в четири части – IV 20 примерни теми за матура с решения, Летера, Пловдив, 2003.

Христо В. Вълчев (Павлов)
ШУ „Епископ Константин Преславски“, ФМИИ
9700 Шумен, България
e-mail: h_valchev@mail.bg

THE POINT OF THE CLASSIC PROBABILITY FORMULA IN SECONDARY MATHEMATICAL COURSE

Hristo V. Valchev (Pavlov)

In the paper the classic probability formula is proven and used, which helps in solving wide area of probability problems.