МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2004
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2004
Proceedings of the Thirty Third Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–4, 2004

НАЙ-МАЛКА И НАЙ-ГОЛЯМА СТОЙНОСТ НА ФУНКЦИЯ

Тома М. Георгиев

Материалът по математика в 9 клас дава много добри възможности на учителя да предложи на учениците в началото на 10 клас съдържателни задачи за намиране, само с помощта на определенията и основните методи от учебния материал, без използване на знания от математическия анализ и класически неравенства, на най-малка и най-голяма стойност на функция. В тази статия се разглежда набор от задачи, илюстриращи опита на автора за реализиране на такива възможности.

Настоящата разработка е насочена към работата по математика с ученици от 10 клас по новата учебна програма и отразява опита на автора от часовете по задължителноизбираема и свободноизбираема подготовка. При разглеждане на задачи за намиране на най-голяма и най-малка стойност на функция на този етап не се използват методите на математическия анализ за изследване на функции, а само определенията(вж. [1], стр. 9). В учебната и помощната литература няма голям брой задачи, които могат да бъдат разгледани при тези знания на учениците, а задачи от този вид, давани на математически състезания, в повечето случаи са с прилагане на класическите неравенства и са насочени към по-тесен кръг ученици. По време на моята учителска практика съм установил, че за да заинтригуват повече ученици, задачите трябва да са свързани с методите и идеите, които най-често се прилагат в часовете по задължителна подготовка. В началото на 10 клас, когато се разглежда въпроса за най-голяма и най-малка стойност на функция, са актуални такива методи като отделяне на точен квадрат, сравняване на корени по големина, рационализиране при ирационални изрази, въвеждане на помощно неизвестно и др. В изложението по-долу се предлагат задачи, в решенията на които дефиниционното множество се състои от всички допустими стойности на аргумента и не се използват знанията за квадратна функция. Тези задачи могат да бъдат решавани и в 9 клас.

Преди да бъдат разгледани задачи с повишена трудност, е необходимо учениците да бъдат подготвени с примери от следния вид:

1 зад. Намерете най-малката стойност на функцията:
а) $y = x^2 - 2x - 3$; б) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$; в) $y = x + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

Отг. а) $y_{\min} = y(1) = -4$; б) $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $y_{\min} = y(2) = 3$.

2 зад. Намерете най-голямата стойност на функцията:
а) $y = 1 - 6x - x^2$; б) $y = \sqrt{6 - 3x - x^2}$; в) $y = \sqrt{4 - x} - \sqrt{x + 1}$.

Отг. а) $y_{\max} = y(-3) = 10$; б) $y_{\max} = y\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{33}}{2}$; в) $y_{\max} = y(-1) = \sqrt{5}$.

При успешно справяне с тези задачи могат да бъдат разгледани и такива, в които се изисква комбинирано прилагане на посочените методи и умения за преобразуване на изрази. Предлагам на вашето внимание такива задачи, които съм използвал в своята практика, повечето от които съм съставил самостоятелно за реализиране на идеите, посочени по-горе.

3 зад. Намерете най-малката стойност на функцията $y = \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$.

Решение: Използваме представянето $y = \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1 - 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ $= 1 - \frac{2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = 1 - \frac{2}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ и $y \geq 1 - \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 - 4 = -3 = y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Следователно $y_{\min} = y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3$.

4 зад. Намерете най-голямата стойност на функцията

$$y = \frac{4 + 2x - 3x^2 + 2x^3 - x^4}{x^2 - x + 3}.$$

Решение: Извършваме делението на полиномите в числителя и знаменателя на дробта и получаваме $y = -x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2 - x + 3}$, $-x^2 + x + 1 = \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}$, $\frac{1}{x^2 - x + 3} = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} \leq \frac{4}{11}$. Следователно $y \leq \frac{5}{4} + \frac{4}{11} = \frac{71}{44}$ и $y_{\max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{71}{44}$.

5 зад. Намерете най-голямата стойност на функцията $y = 2\sqrt{x - 5} - x$.

Решение: Нека положим $\sqrt{x - 5} = t$. Тогава $x = t^2 + 5$ и $y = 2t - t^2 - 5 = -4 - (t - 1)^2 \leq -4$. Равенство се достига при $t = 1$ и $x = 6$. Следователно $y_{\max} = y(6) = -4$.

6 зад. Намерете най-малката стойност на функцията $y = x^2 - (x + 1)\sqrt{2 - 8x}$.

Решение: Представяме $y = x^2 + 2x + 1 - 2(x + 1)\sqrt{\frac{1}{2} - 2x} + \frac{1}{2} - 2x - \frac{3}{2}$ $= \left(x + 1 - \sqrt{\frac{1}{2} - 2x}\right)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}$. След решаване на уравнението $x + 1 - \sqrt{\frac{1}{2} - 2x} = 0$ получаваме $x = \sqrt{\frac{7}{2}} - 2$ и следователно $y_{\min} = y\left(\sqrt{\frac{7}{2}} - 2\right) = -\frac{3}{2}$.

7 зад. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията
$$y=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}.$$

Решение: Лесно се вижда, че $x\in[-2\ ,\ 3]$, $y\geq 0$ и следователно $y=\sqrt{(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x})^2}=\sqrt{5+2\sqrt{(x+2)(3-x)}}\geq\sqrt{5}$ и $y_{\min}{=}y(-2){=}y(3){=}\sqrt{5}$.
От друга страна $y=\sqrt{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)^2}=\sqrt{5+2\sqrt{(x+2)\,(3-x)}}=$
$=\sqrt{5+2\sqrt{-x^2+x+6}}=\sqrt{5+2\sqrt{\frac{25}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\leq\sqrt{5+2\sqrt{\frac{25}{4}}}=\sqrt{10},$
$y_{\max}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{10}.$

8 зад. Намерете най-голямата стойност на функцията $y=17\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}-4x$.

Решение: Представяме $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}-\left(4x-16\sqrt{x+2}\right)$ и нека $y_1=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$, $y_2=-\left(4x-16\sqrt{x+2}\right)$. За y_1 рационализираме числителя, като умножаваме и делим с $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\neq 0$ за всяко допустимо $x\geq 2$ и получаваме $y_1=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{4}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}\leq\frac{4}{\sqrt{2+2}+\sqrt{2-2}}{=}2.$
За да представим най-удобно y_2 полагаме $\sqrt{x+2}=t$, $x=t^2{-}2$ и $y_2=-\left(4t^2-8-16t\right)$ $=-\left[(2t-4)^2-24\right]=24{-}(2t-4)^2\leq 24$, като равенство се достига при $t=2$ и $x=2$.
Следователно $y=y_1+y_2\leq 2+24=26$ и $y_{\max}=y\,(2)=26$.

9 зад. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията
$$y=\frac{|x+4|+|x-3|}{|x-1|+1}.$$

Решение: Прилагаме традиционния подход за освобождаване от модулите.

1) При $x\in(-\infty,-4]$
$$y=\frac{-x-4-x+3}{-x+1+1}=\frac{-2x-1}{-x+2}=\frac{2x+1}{x-2}=\frac{2\,(x-2)+5}{x-2}=2+\frac{5}{x-2}$$
От $x\leq -4$ следва $x-2\leq -6$ и $\frac{7}{6}\leq 2+\frac{5}{x-2}<2$ и $\frac{7}{6}\leq y<2$.

2) При $x\in[-4\ ,\ 1]$
$$y=\frac{x+4-x+3}{-x+1+1}=\frac{7}{-x+2}\quad\text{и аналогично}\quad\frac{7}{6}\leq y\leq 7.$$

3) При $x\in[1\ ,\ 3]$
$$y=\frac{x+4-x+3}{x-1+1}=\frac{7}{x}\quad\text{и аналогично}\quad\frac{7}{3}\leq y\leq 7.$$

4) При $x\in[3\,,\,+\infty)$
$$y=\frac{x+4+x-3}{x-1+1}=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}\quad\text{и аналогично}\quad 2<y\leq\frac{7}{3}.$$

От разгледаните случаи следва, че $\frac{7}{6}\leq y\leq 7$ и $y_{\min}=y(-4)=\frac{7}{6}$, $y_{\max}=y(1)=7$.

10 зад. Намерете най-голямата стойност на функцията

$$y=\frac{2\,|x-1|-|x-4|}{|x^2+5x+6|-|x^2-5x-14|}.$$

Решение: Разлагаме квадратните тричлени на множители $x^2+5x+6=(x+2)\,(x+3)$, $x^2-5x-14=(x+2)\,(x-7)$ и получаваме $y=\dfrac{2\,|x-1|-|x-4|}{|x+2|\,(|x+3|-|x-7|)}$. Допустимите стойности са $x\neq\pm2$.

1) При $x\in(-\infty\,,\,-3]$

$$y=\frac{2-2x+x-4}{-\,(x+2)\,(-x-3+x-7)}=\frac{-\,(x+2)}{-\,(x+2)\,(-10)}=-\frac{1}{10}.$$

2) При $x\in[-3\,,\,-2)$

$$y=\frac{2-2x+x-4}{-\,(x+2)\,(x+3+x-7)}=\frac{-\,(x+2)}{-\,(x+2)\,(2x-4)}=\frac{1}{2x-4}\quad\text{и}\quad-\frac{1}{8}<y\leq-\frac{1}{10}.$$

3) При $x\in(-2\ ,\ 1]$

$$y=\frac{2-2x+x-4}{(x+2)\,(x+3+x-7)}=\frac{-\,(x+2)}{(x+2)\,(2x-4)}=-\frac{1}{2x-4}\quad\text{и}\quad\frac{1}{8}<y\leq\frac{1}{2}.$$

4) При $x\in[1\,,\,2)\cup(2\,,\,4]$

$$y=\frac{2x-2+x-4}{(x+2)\,(x+3+x-7)}=\frac{3x-6}{(x+2)\,(2x-4)}=\frac{3\,(x-2)}{2\,(x+2)\,(x-2)}=\frac{3}{2\,(x+2)}$$

и $\dfrac{1}{4}\leq y\leq\dfrac{1}{2}$, $y\neq\dfrac{3}{8}$.

5) При $x\in[4\,,\,7]$

$$y=\frac{2x-2-x+4}{(x+2)\,(x+3+x-7)}=\frac{x+2}{(x+2)\,(2x-4)}=\frac{1}{2x-4}\quad\text{и}\quad\frac{1}{10}\leq y\leq\frac{1}{4}.$$

6) При $x\in[7\,,\,+\infty)$

$$y=\frac{2x-2-x+4}{(x+2)\,(x+3-x+7)}=\frac{x+2}{(x+2)\,.10}=\frac{1}{10}.$$

От разгледаните случаи се вижда, че $y\leq\dfrac{1}{2}$ и $y_{\max}=y\,(1)=\dfrac{1}{2}$.

11 зад. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията

$$y=\frac{x^2-x-1}{x^2-2x+2}.$$

Решение: Нека с a означим една произволна фиксирана стойност на функцията. Тогава уравнението $\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x+2}=a$ има решение. Уравнението е равносилно на

$$(a-1)\,x^2+(1-2a)\,x+2a+1=0,\quad\text{защото}\quad x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0.$$

При $a=1$ получаваме $x=3$, при $a\neq1$ уравнението е квадратно и има реален корен. Следователно $D=(1-2a)^2-4\,(a-1)\,(2a+1)=5-4a^2\geq0$, $a^2\leq\dfrac{5}{4}$, $|\,a\,|\leq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\leq a\leq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Лесно се пресмята, че $a=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ при $x=3-\sqrt{5}$ и $a=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ при $x=3+\sqrt{5}$. Следователно $y_{\min}=y\left(3-\sqrt{5}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $y_{\max}=y\left(3+\sqrt{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

При посочените задачи и подобни на тях, които всеки преподавател може да състави самостоятелно, се упражняват учениците да преобразуват рационални и ирационални изрази, да делят полиноми, да решават квадратни и ирационални уравнения, да решават задачи с модули. Предлагам на вниманието на читателя и следните задачи:

12 зад. Намерете най-малката стойност на функцията

$$y = \frac{x^4 - 4x^3 + 15x^2 - 22x + 27}{x^2 - 2x + 4}.$$

Отг. $y_{\min} = y(1) = \dfrac{17}{3}$.

13 зад. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията

$$y = \sqrt{x - \sqrt{2 - x}} + \sqrt{x + \sqrt{2 + x}}.$$

Отг. $y_{\min} = y(1) = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$, $y_{\max} = y(2) = 2 + \sqrt{2}$.

14 зад. Намерете най-малката стойност на функцията

$$y = x^2 - 5x + 6 - 2(x - 3)\sqrt{x - 2}.$$

Отг. $y_{\min} = y\left(\dfrac{7 + \sqrt{5}}{2}\right) = -1$.

15 зад. Намерете най-голямата стойност на функцията

$$y = \frac{\sqrt{3x + 2} - \sqrt{x - 1}}{4x^2 + 4x - 3}.$$

Отг. $y_{\max} = y(1) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

16 зад. Намерете най-голямата стойност на функцията

$$y = \frac{1}{x^2 - 4|x - 1| + 10}.$$

Отг. $y_{\max} = y(-2) = \dfrac{1}{2}$.

17 зад. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията

$$y = \frac{|x - 2|}{|x - 1| + |x - 3|}.$$

Отг. $y_{\min} = y(2) = 0$, $y_{\max} = y(-1) = \dfrac{3}{4}$.

18 зад. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията

$$y = \frac{(3x - 4)(|x - 5| - |x + 1|)}{|x - 1| - |2x - 3|}.$$

Отг. $y_{\min} = y\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1$, $y_{\max} = y(5) = 22$.

19 зад. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията

$$y = \frac{6x^2 - 10x - 3}{x^2 - 3x + 3}.$$

Отг. $y_{\min} = y\left(\dfrac{21 - \sqrt{129}}{8}\right) = -\dfrac{2\sqrt{129}}{3}$, $y_{\max} = y\left(\dfrac{21 + \sqrt{129}}{8}\right) = \dfrac{2\sqrt{129}}{3}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски. Математика за 10 клас профилирана подготовка. София, Анубис, 2001.

Тома Маринов Георгиев
Ул. „Цар Александър II“, 80, вх. В, ап. 44
3700 Видин

MAXIMUM AND MINIMUM OF FUNCTION

Toma M. Georgiev

The mathematics curricula for grade 9 offers the teacher very good possibilities to equip the students at the beginning of the 10-th grade with variety of problems for maximum and minimum function calculation, which can be done only by means of definitions and basic methods from the school material, without using calculus and classic inequalities. This paper treats some problems exemplifying the author's experience in the realization of such possibilities.